УДК 517.983

В. Ф. Журавлев (Житомирский нац. агроэкологический ун-т)

СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. II. КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

The paper highlights the weak non-linear operator equations with generalized inverse operator in the linear part. The operators function in Banach spaces. The author has obtained necessary and sufficient conditions for finding the solutions of such equations in the critical case of the second order. The author also managed to establish the converging iterative procedures for constructing the only possible solution, or at least one of possible solutions.

В работе рассмотрены слабонелинейные операторные уравнения с обобщенно обратимым оператором в линейной части. Операторы действуют в банаховых пространствах. Получены необходимые и достаточные условия существования решений таких уравнений в критическом случае второго порядка, построены сходящиеся итерационные процедуры для построения единственного решения и хотя бы одного из возможных решений.

Эта статья является продолжением работы [1]. Используя введенные в ней понятия и обозначения, напомним основные моменты постановки задачи.

Рассматриваются условия разрешимости и итерационные алгоритмы построения решений слабонелинейного операторного уравнения

$$(Az(\cdot,\varepsilon))(t) = f(t) + \varepsilon F(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon) \tag{1}$$

с обобщенно обратимым оператором $A \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1),\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2))$ [1] при условии, что порождающее операторное уравнение [2], [3]

$$(Az_0)(t) = f(t), \tag{2}$$

которое получается из (1) при $\varepsilon = 0$ при выполнении условия

$$(\mathcal{P}_{Y_A}f)(t) = 0 \tag{3}$$

имеет семейство решений [4–6]

$$z_0(t) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{z})(t) + (A^- f)(t), \tag{4}$$

где $\mathcal{P}_{Y_A}$, $\mathcal{P}_{N(A)}$– линейные ограниченные проекторы [1], $\hat{z}(t)$– произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$, $A^- : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$ – ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору A [4], [7–9].

При помощи замены

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,\hat{z}_0) + x(t,\varepsilon),$$

где $\hat{z}_0 = \hat{z}_0(t)$– решение уравнения для порождающих элементов [1]

$$(G\hat{z}_0(\cdot))(t) = (\mathcal{P}_{Y_A}F(z_0(\cdot,\hat{z}_0),\cdot,0))(t) = 0, \tag{5}$$

для определения отклонения $x(t,\varepsilon)$ от порождающего решения получим операторное уравнение

$$(Ax(\cdot,\varepsilon))(t) = \varepsilon F(z_0(t,\hat{z}_0) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon). \tag{6}$$

Используя разложение нелинейной вектор-функции $F(z,t,\varepsilon)$

$$F(z_0(t,\hat{z}_0) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = F_0(t,\hat{z}_0) + (Tx(\cdot,\varepsilon))(t) + R(x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{7}$$

далее было установлено, что уравнение (6) эквивалентно операторной системе

$$x(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}(t,\varepsilon),$$

$$(B_0\hat{x}(\cdot,\varepsilon))(t) = -(\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t), \tag{8}$$

$$\bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + Tx(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t),$$

второе уравнение которой разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$(\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) = 0, \tag{9}$$

где $B_0 = \mathcal{P}_{Y_A}T\mathcal{P}_{N(A)}$, $B_0 : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1) \to Y_A-$ линейный ограниченный обобщенно обратимый оператор, действующий из пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$ в подпространство $Y_A \subset \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} : Y_A \to Y_{B_0}-$ ограниченный проектор, $Y_{B_0}-$ подпространство пространства Y_A изоморфное нуль-пространству $N(B_0^*)$ сопряженного к B_0 оператора B_0^*.

При $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A} = 0$, условие (9) всегда выполняется и от операторной системы (8) приходим к операторной системе:

$$x(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}(t,\varepsilon),$$

$$\hat{x}(t,\varepsilon) = -B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) + \breve{x}^\sharp(t,\varepsilon), \tag{10}$$

$$\bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[(\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon)) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t),$$

где B_0^- — обобщенно-обратный оператор к оператору B_0, $\breve{x}^\sharp(t,\varepsilon)$ — фиксированный элемент из нуль-пространства $N(B_0)$ оператора B_0.

В [1] доказано, что для построения единственного решения операторной системы (10) применим сходящийся итерационный алгоритм, основанный на принципе неподвижной точки.

Критический случай второго порядка. Рассмотрим операторное уравнение (1) в случае, который будем называть критическим случаем второго порядка. Он характеризуется тем, что существование решения исходного уравнения зависит от условий, полученных с помощью нелинейного оператора F и первого приближения к искомому решению [3].

Пусть:

(a1) $A \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_2))$;
(a2) F — нелинейная по z ограниченная вектор-функция, которая в окрестности порождающего решения $||z - z_0|| \le q$ имеет производную Фреше по z и непрерывная по совокупности переменных z, t, ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, q и ε_0 — достаточно малые константы; (11)
(a3) $F(z, t, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по ε в окрестности порождающего решения (4);
(a4) $F(0, t, 0) = 0, F'_z(0, t, 0) = 0$;
(a5) $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_2)$.

Пусть порождающее операторное уравнение (2) имеет семейство решений (4) и выполнено условие $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$.

При выполнении условия (9) второе из уравнений системы (8) имеет решение в виде прямой суммы

$$\hat{x}(t, \varepsilon) = \hat{x}^{(1)}(t, \varepsilon) + \hat{x}^{(0)}(t, \varepsilon), \tag{12}$$

где

$$\hat{x}^{(1)}(t, \varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}(\cdot, \varepsilon))(t) = (\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot, \varepsilon))(t)$$

— произвольный элемент из $N(B_0)$, $\mathcal{P}_{N(B_0)}$— ограниченный проектор,

$$\hat{x}^{(0)}(t, \varepsilon) = -(B_0^- \mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t),$$

$\hat{x}^{(0)}(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1) - N(B_0)$, $\hat{x}^{(0)}(t, \varepsilon) = ((I - \mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}(\cdot, \varepsilon))(t)$, B_0^- — линейный ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору B_0, I — тождественный оператор в пространстве $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$.

Далее рассмотрим два случая разложения (7). Вначале предположим, что в (7) оператор $R(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям:

$$R(0, t, 0) = 0, \quad R'_x(0, t, \varepsilon) = 0, \tag{13}$$

где R'_x — линейный оператор, представляющий собой производную Фреше от нелинейного оператора R по переменной x при $x = 0$.

Учитывая представление (12), из третьего уравнения операторной системы (10) получаем следующее выражение:

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon(A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot, \varepsilon))(t) + \bar{x}^{(1)}(t, \varepsilon),$$

где $A_1 = A^- T\mathcal{P}_{N(A)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$— линейный ограниченный оператор,

$$\bar{x}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(A)}(I - \mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(\cdot, \varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \bar{x}^{(1)}(\cdot, \varepsilon)] + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t).$$

Из условия разрешимости (9) второго уравнения операторной системы (8) приходим к операторному уравнению для определения $\hat{x}^{(1)}(t, \varepsilon) \in N(B_0)$:

$$\varepsilon(B_1\hat{x}^{(1)}(\cdot, \varepsilon))(t) + (\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t) = 0, \tag{14}$$

где $B_1 = \mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}TA_1\mathcal{P}_{N(B_0)}$, $B_1 : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}\ to\mathbf{B}_1), Y_{B_0}$ — линейный ограниченный оператор.

Пусть $B_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1), Y_{B_0})$ — обобщенно обратимый оператор. Обозначим через $\mathcal{P}_{N(B_1)} : N(B_0) \to N(B_1)$, $\mathcal{P}_{Y_{B_1}} : Y_{B_0} \to Y_{B_1}$ ограниченные проекторы; B_1^-– линейный ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору B_1. Тогда необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (14) относительно $\varepsilon\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon)$ примет вид:

$$(\mathcal{P}_{Y_{B_1}}\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) = 0. \tag{15}$$

При выполнении этого условия операторное уравнение (14) разрешимо относительно $\varepsilon\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon)$ и имеет решение

$$\varepsilon\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon) = \hat{x}^{(2)}(t,\varepsilon) - (B_1^-\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t),$$

где $\hat{x}^{(2)}(t,\varepsilon)$– произвольный элемент из пересечения нуль-пространств $N(B_0)$ и $N(B_1)$, $\hat{x}^{(2)}(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(B_1)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t) = (\mathcal{P}_{N(B_1)}\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t) \in N(B_0) \cap N(B_1)$.

1. Построение единственного решения. Предположим, что пересечение нуль-пространств $N(B_0)$ и $N(B_1)$ нулевое, т.е. $\mathcal{P}_{N(B_1)}\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$, тогда операторное уравнение (14) имеет единственное решение. Для выполнения условия (15) достаточно, чтобы

$$\mathcal{P}_{Y_{B_1}}\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A} = 0.$$

Таким образом, при условиях

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0, \quad \mathcal{P}_{N(B_1)}\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0, \quad \mathcal{P}_{Y_{B_1}}\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A} = 0 \tag{16}$$

от системы (10) приходим к эквивалентной системе

$$\begin{gathered}
x(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}(I - \mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(\cdot,\varepsilon))(t) + \\
+\varepsilon(A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon), \\
\hat{x}^{(0)}(t,\varepsilon) = -(B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{T[\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \\
+\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t), \\
\varepsilon\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon) = -(B_1^-\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t), \\
\bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(A)}(I - \mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(\cdot,\varepsilon) + \\
+\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).
\end{gathered} \tag{17}$$

В случае $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$ операторная система (8) не принадлежит к классу систем, для решения которых применим метод простых итераций [2], [10].

Покажем, что выделением дополнительной переменной система (8) при условиях (16) сводится к операторной системе (17), для решения которой применим сходящийся метод простых итераций.

Введем следующие обозначения:

$$y(\cdot,\varepsilon) = \mathrm{col}(x(\cdot,\varepsilon), \hat{x}^{(0)}(\cdot,\varepsilon), \tilde{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon), \bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon))$$

— вектор-столбец из банахова пространства $\mathbf{B} = \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1) \times \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1) \times \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1) \times \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$, где $\tilde{x}^{(1)} = \varepsilon \hat{x}^{(1)}$;

вспомогательные ограниченные операторы:

$$P_{12} = \mathcal{P}_{N(A)}(I - \mathcal{P}_{N(B_0)}), \quad P_{13} = A_1 \mathcal{P}_{N(B_0)},$$

$$B_{23} = -B_0^- \mathcal{P}_{Y_A} T A_1 \mathcal{P}_{N(B_0)}, \quad B_{24} = -B_0^- \mathcal{P}_{Y_A} T, \quad B_{34} = -B_1^- \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_A} T;$$

матричный оператор верхнетреугольного вида, составленный из ограниченных операторов

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & P_{12} & P_{13} & I \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 0 & B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{18}$$

оператор-функцию

$$U_2(y(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ -(B_0^- \mathcal{P}_{Y_A} R(x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon))(t) \\ \\ -(B_1^- \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_A} R(x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon))(t) \\ \\ \varepsilon(A^- \{F_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(A)}(I - \mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(\cdot,\varepsilon) + \\ +\varepsilon A_1 \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t). \end{bmatrix},$$

которая удовлетворяет условиям (a2), (a4) из (11).

Используя введенные обозначения, систему (17) можно представить в виде операторного уравнения

$$y(t,\varepsilon) = (W_2 y(\cdot,\varepsilon))(t) + (U_2(y(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon))(t). \tag{19}$$

В силу структуры клеточно-матричного оператора W_2 верхнетреугольного вида с нулевыми клетками на главной диагонали и ниже операторная система (18) преобразуется в систему

$$V_2 y = U_2(y, t, \varepsilon),$$

где оператор V_2 имеет вид:

$$V_2 = I_{\mathbf{B}} - W_2 = \begin{bmatrix} I & -P_{12} & -P_{13} & -I \\ 0 & I & -B_{23} & -B_{24} \\ 0 & 0 & I & -B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Далее необходимо показать, что оператор V_2 имеет ограниченный обратный.

В силу структуры клеточно-матричного оператора V_2 верхнетреугольного вида с тождественными операторами на главной диагонали оператор V_2 имеет обратный оператор V_2^{-1} вида:

$$V_2^{-1} = \begin{bmatrix} I & P_{12} & P_{12}B_{23} + P_{13} & I + P_{12}[B_{23}B_{34} + B_{24}] + P_{13}B_{34} \\ 0 & I & B_{23} & B_{23}B_{34} + B_{24} \\ 0 & 0 & I & B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Оператор V_2^{-1} действует на вектор-столбец $y = \mathrm{col}(x, \hat{x}^{(0)}, \tilde{x}^{(1)}, \bar{x}^{(1)})$ по правилу:

$$V_2^{-1}y = \begin{bmatrix} x + P_{12}\hat{x}^{(0)} + [P_{12}B_{23} + P_{13}]\tilde{x}^{(1)} + \\ +[I + P_{12}(B_{23}B_{34} + B_{24}) + P_{13}B_{34}]\bar{x}^{(1)} \\ \\ \hat{x}^{(0)} + B_{23}\tilde{x}^{(1)} + [B_{23}B_{34} + B_{24}]\bar{x}^{(1)} \\ \\ \tilde{x}^{(1)} + B_{34}\bar{x}^{(1)} \\ \\ \bar{x}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Для доказательства ограниченности оператора V^{-1} покажем, что существует константа $c_1 > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$|||V^{-1}y|||_{\mathbf{B}} \leq c_1\{|||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||\hat{x}^{(0)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||\tilde{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)}\} + |||\bar{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)}\}.$$

Для этого докажем ограниченность каждой компоненты вектора y в банаховом пространстве $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$:

Операторы $P_{12}, P_{13}, B_{23}, B_{34}, B_{34}-$ ограничены как суперпозиции ограниченных операторов. Обозначим их нормы в пространстве $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$, соответственно, через:

$$|||P_{12}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} = p_{12}, \quad |||P_{13}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} = p_{13},$$
$$|||B_{23}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)} = b_{23}, \quad |||B_{24}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)} = b_{24}, \quad |||B_{34}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_2)} = b_{34}.$$

Учитывая введенные обозначения, для каждой компоненты вектора $V^{-1}y$ получим:

$$|||x + P_{12}\hat{x}^{(0)} + [P_{12}B_{23} + P_{13}]\tilde{x}^{(1)} + [I + P_{12}(B_{23}B_{34} + B_{24}) + P_{13}B_{34}]\bar{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} \leq$$
$$\leq |||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||P_{12}\hat{x}^{(0)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||[P_{12}B_{23} + P_{13}]\tilde{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} +$$
$$+|||[I + P_{12}(B_{23}B_{34} + B_{24}) + P_{13}B_{34}]\bar{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} \leq$$
$$\leq |||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + p_{12}|||\hat{x}^{(0)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + [p_{12}b_{23} + p_{13}]|||\tilde{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} +$$
$$+[1 + p_{12}(b_{23}b_{34} + b_{24}) + p_{13}b_{34}]|||\bar{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)};$$

$$|||\hat{x}^{(0)} + B_{23}\tilde{x}^{(1)} + [B_{23}B_{34} + B_{24}]\bar{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} \leq$$
$$\leq |||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||B_{23}\tilde{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||[B_{23}B_{34} + B_{24}]\bar{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} \leq$$
$$\leq |||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + b_{23}|||\tilde{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + [b_{23}b_{34} + b_{24}]|||\bar{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)};$$

$$|||\tilde{x}^{(1)} + B_{34}\bar{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} \leq |||\tilde{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + b_{34}|||\bar{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)}.$$

Таким образом,

$$|||V^{-1}y|||_{\mathbf{B}} \leq |||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + [1+p_{12}]|||\hat{x}^{(0)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + [1+b_{23}+p_{12}b_{23}+p_{13}]|||\tilde{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} +$$
$$+[2 + (1 + p_{12})(b_{23}b_{34} + b_{24}) + p_{13}b_{34}]|||\bar{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} \leq$$
$$\leq c_1\{|||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||\hat{x}^{(0)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||\tilde{x}^{(1)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)} + |||\bar{x}^{(0)}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)}\},$$

где $c_1 = \max\{1, [1+p_{12}], [1+b_{23}+p_{12}b_{23}+p_{13}], [2+(1+p_{12})(b_{23}b_{34}+b_{24})+p_{13}b_{34}]\}$.

Тем самым ограниченность оператора V_1^{-1} доказана.

С учетом введенных выше обозначений запишем операторную систему (17) в виде:

$$y = V_2^{-1}U_2 y = V_2^{-1}\widetilde{U}_2(\varepsilon)y,$$

где $\widetilde{U}_2(\varepsilon)$, вообще говоря, нелинейный ограниченный оператор. Учитывая ограниченность оператора V_2^{-1}, можно подобрать $\varepsilon_* \in [0, \varepsilon_0]$ такое, что для всех $\varepsilon \le \varepsilon_*$ оператор $V_2^{-1}\widetilde{U}_2(\varepsilon)$ будет сжимающим. Отсюда следует, что операторная система (17) имеет единственную неподвижную точку, которая будет решением уравнения (1).

Прежде, чем строить итерационную процедуру, рассмотрим операторное уравнение (6) в более общем случае, когда, в отличие от (13), имеет место условие

$$R(0,t,0) = 0, \quad R'_x(0,t,0) = 0.$$

Для этого уточним разложение (7), выделив в нем еще одно слагаемое линейное по x и ε. Используя условие $(a3)$ из (11) и сохраняя для $R(x,t,\varepsilon)$ после выделения из него слагаемого $\varepsilon T_1 x$ прежнее обозначение, получим для нелинейного оператора $F(z_0(t, z_0^\sharp) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ следующее разложение типа (7)

$$F(z_0(t,\hat{z}_0) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = F_0(t,\hat{z}_0) + (Tx(\cdot,\varepsilon))(t) +$$

$$+\varepsilon(T_1 x(\cdot,\varepsilon))(t) + R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

где $T_1 = F''_{z,\varepsilon}(z,t,\varepsilon)\Big|_{\substack{z=z_0(t,\hat{z}_0)\\ \varepsilon=0}} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1) \times \mathcal{J} \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_2)$ — линейный ограниченный оператор;

В рассмотренном выше случае $T_1 = 0$.

Применяя теорему 2 из [4, с. 305], по аналогии с предыдущими выкладками, от операторного уравнения

$$(Ax(\cdot,\varepsilon))(t) = \varepsilon\{F_0(t,\hat{z}_0) + (Tx(\cdot,\varepsilon))(t) + \varepsilon(T_1 x(\cdot,\varepsilon))(t) + R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\} \quad (21)$$

приходим к эквивалентной на множестве вектор-функций $x(t,\varepsilon) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J}, \mathbf{B}_1)$ операторной системе

$$\begin{gathered} x(t,\varepsilon) = \mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(t,\varepsilon) + \bar{x}(t,\varepsilon), \\ (B_0\hat{x}(\cdot,\varepsilon)(t) = -(\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon))(t) + \varepsilon T_1[\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon) + \\ +\bar{x}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t), \\ \bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + [T+\varepsilon T_1]x(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t). \end{gathered} \quad (22)$$

Второе из уравнений (22) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} (\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon T_1[\mathcal{P}_{N(A)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)] + \\ +R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) = 0, \end{gathered} \quad (23)$$

и при этом имеет решение в виде прямой суммы $\hat{x} = \hat{x}^{(0)} + \hat{x}^{(1)}$, где

$$\hat{x}^{(0)} = \hat{x}^{(0)}(t,\varepsilon) = -(B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon T_1\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot\varepsilon)\})(t);$$

$$\hat{x}^{(1)} = \hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}(\cdot,\varepsilon))(t) = (\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t) \in N(B_0).$$

Из третьего уравнения операторной системы (22) с учетом представления $\hat{x}$ получим $\bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)(t) + \bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon)$, где линейный ограниченный оператор A_1 определяется, как и ранее, по формуле $A_1 = A^{-}T\mathcal{P}_{N(A)}$, а вектор-функция $\bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon)$ имеет вид

$$\bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^{-}\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + [T+\varepsilon T_1][\mathcal{P}_{N(A)}(I-$$

$$-\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(\cdot,\varepsilon) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

С учетом представления A_1 и $\hat{x}(t,\varepsilon)$ из условия (23) разрешимости второго из уравнений (22) получим уравнение для определения $\varepsilon\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon)$:

$$\varepsilon(B_1\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t) + (\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon T_1[\mathcal{P}_{N(A)}(I - P_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(\cdot,\varepsilon) +$$

$$+\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) = 0,$$

где $B_1 = \mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\big[TA_1 + T_1\mathcal{P}_{N(A)}\big]\mathcal{P}_{N(B_0)}$ — линейный ограниченный оператор. Пусть как и ранее $B_1 : N(B_0) \to Y_{B_0}$— обобщенно обратимый оператор.

Обозначая, как и раньше, через $\mathcal{P}_{N(B_1)}$ и $\mathcal{P}_{Y_{B_1}}$ проекторы на нуль-пространство $N(B_1)$ и подпространство Y_{B_1} при условиях (16) от операторной системы (22) приходим к системе

$$\begin{gathered}
x(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}(I - \mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(\cdot,\varepsilon))(t) + \\
+\varepsilon(A_1(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t), \\
\hat{x}^{(0)}(t,\varepsilon) = -(B_0^{-}\mathcal{P}_{Y_A}\{T[\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \\
+\varepsilon T_1 x(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t), \\
\varepsilon\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon) = -(B_1^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon T_1 x(\cdot,\varepsilon) + \\
+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t), \\
\bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^{-}\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + [T+\varepsilon T_1][\mathcal{P}_{N(A)}(I - \mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(\cdot,\varepsilon) + \\
+\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\}(t).
\end{gathered} \tag{24}$$

Используя введенные выше обозначения, запишем операторную систему (24) в виде

$$y(t,\varepsilon) = (W_2 y(\cdot,\varepsilon))(t) + (U_3(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t),$$

где клеточно-матричный оператор W_2 имеет представление (18), в котором оператор $B_1 = \mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\big[TA_1 + T_1\mathcal{P}_{N(A)}\big]\mathcal{P}_{N(B_0)}$, а оператор U_3 будет иметь вид:

$$U_3(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(B_0^{-}\mathcal{P}_{Y_A}\{\varepsilon T_1 x(\cdot,\varepsilon) - R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) \\ -(B_1^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{\varepsilon T_1 x(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) \\ \varepsilon(A^{-}\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + [T+\varepsilon T_1][\mathcal{P}_{N(A)}(I - \mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(t,\varepsilon) + \\ +\varepsilon A_1(\cdot)\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon)] + \bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\}(t) \end{bmatrix}.$$

В силу структуры клеточно-матричного оператора W_2 верхнетреугольного вида с нулевыми клетками на главной диагонали и ниже операторная система (24) преобразуется в систему

$$y(t,\varepsilon) = (V_2^{-1}\, U_3(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t),$$

где V_2^{-1} имеет представление (20).

С учетом введенных выше обозначений запишем операторную систему (24) в виде:

$$y = V_2^{-1}U_3 y = V_2^{-1}\widetilde{U}_3(\varepsilon)y,$$

где $\widetilde{U}_3(\varepsilon)$, вообще говоря, нелинейный ограниченный оператор. Учитывая ограниченность оператора V_2^{-1}, можно подобрать ε_* такое, что для всех $\varepsilon \le \varepsilon_*$ оператор $V_2^{-1}\widetilde{U}_3(\varepsilon)$ будет сжимающим. Отсюда следует, что операторная система (24) имеет единственную неподвижную точку, которая будет решением уравнения (1).

Таким образом, для операторной системы (24) применим метод простых итераций для нахождения решений операторного уравнения (6) в классе вектор-функций непрерывных по ε, обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$. На основе операторной системы (24) построим итерационный процесс нахождения решения $x(t,\varepsilon)$, $x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$, $x(t,\cdot) \in \mathbf{C}_\varepsilon$ операторного уравнения (6).

Первое приближение $x_1(t,\varepsilon)$ к $x(t,\varepsilon)$ найдем как решение операторного уравнения

$$(Ax_1(\cdot,\varepsilon))(t) = \varepsilon F_0(t,\hat{z}_0).$$

Решение $x_1(t,\varepsilon)$ существует в силу выбора элемента $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$ из уравнения (5) для порождающих решений:

$$\bar{x}_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^- F(\cdot,\hat{z}_0))(t).$$

При этом первое приближение $x_1(t,\varepsilon)$ к $x(t,\varepsilon)$ считаем равным $\bar{x}_1^{(1)}(t,\varepsilon)$.

Второе приближение $\bar{x}_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ к $\bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon)$ находим как частное решение операторного уравнения

$$\begin{gathered}(A\bar{x}_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t) = \varepsilon\{F_0(t,\hat{z}_0) + [T+\varepsilon T_1][\mathcal{P}_{N(A)}(I-\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}_1^{(0)}(t,\varepsilon)+ \\ +\bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon)] + R(x_1^{(1)}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}).\end{gathered} \tag{25}$$

Существование решения $\bar{x}_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ обеспечивается выбором элемента $\hat{x}_1^{(0)}(t,\varepsilon)$ из условия разрешимости уравнения (25)

$$(B_0\hat{x}_1^{(0)}(\cdot,\varepsilon))(t) = -(\mathcal{P}_{Y_A}\{[T+\varepsilon T_1]\bar{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(\bar{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t). \tag{26}$$

В свою очередь, необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (26) имеет вид:

$$(\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{[T+\varepsilon T_1]\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) = 0. \tag{27}$$

При выполнении условия (27) из операторного уравнения (26) определим первое приближение $\hat{x}_1^{(0)}(t,\varepsilon)$ к $\hat{x}^{(0)}(t,\varepsilon)$ по формуле:

$$\hat{x}_1^{(0)}(t,\varepsilon) = -(B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{[T+\varepsilon T_1]\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

В качестве второго приближения $x_2(t,\varepsilon)$ к искомому решению $x(t,\varepsilon)$ возьмем выражение:

$$x_2(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}(I-\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}_1^{(0)}(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}_2^{(1)}(t,\varepsilon).$$

Третье приближение ищем как решение операторного уравнения

$$(Ax_3(\cdot,\varepsilon))(t) = \varepsilon(F_0(\cdot,\hat{z}_0) + [T+\varepsilon T_1]([\mathcal{P}_{N(A)}(I-\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}_2^{(0)}(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \bar{x}_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]) + R(x_2(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon))(t),$$

где $\hat{x}_2^{(0)}(t,\varepsilon)$ и определяется из условия его разрешимости

$$(B_0\hat{x}_2^{(0)}(\cdot,\varepsilon))(t) = -(\mathcal{P}_{Y_A}\{[T+\varepsilon T_1][\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+\bar{x}_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + R(x_2(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

А из необходимого и достаточного условия разрешимости последнего уравнения относительно $\hat{x}_2^{(0)}(t,\varepsilon)$ получаем уравнение для определения $\varepsilon\hat{x}_1^{(1)}(t,\varepsilon) \in N(B_0)$:

$$\varepsilon(B_1\hat{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t) = -(\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(\bar{x}_2(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

При выполнении условий $\mathcal{P}_{N(B_0)}\mathcal{P}_{N(B_1)} = 0$ и $\mathcal{P}_{Y_{B_1}}\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A} = 0$, из последних двух систем однозначно находим первое приближение $\hat{x}_1^{(1)}$ к $\hat{x}^{(1)}$ и второе приближение $\hat{x}_2^{(0)}$ к $\hat{x}^{(0)}$ по формулам

$$\varepsilon\hat{x}_1^{(1)}(t,\varepsilon) = -(B_1^-\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{Tx_2^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + R(x_2(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t),$$

$$\hat{x}_2^{(0)}(t,\varepsilon) = -(B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{[T+\varepsilon T_1][\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + R(x_2(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

В качестве третьего приближения $\hat{x}_3^{(2)}(t,\varepsilon)$ к $\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon)$ и $x_3(t,\varepsilon)$ к искомому решению $x(t,\varepsilon)$ берем

$$\bar{x}_3^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + [T+\varepsilon T_1][\mathcal{P}_{N(A)}(I-\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}_2^{(0)}(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \bar{x}_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + R(x_2(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).$$

$$x_3(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}(I-\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}_2^{(0)}(\cdot,\varepsilon))(t) + \varepsilon(A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}_3^{(1)}(t,\varepsilon).$$

Продолжая аналогичный процесс дальше, из операторной системы (24) получаем следующую итерационную процедуру для нахождения решения $x(t,\varepsilon)$ операторного уравнения (6), обращающегося в нуль при $\varepsilon = 0$:

$$\varepsilon\hat{x}_{k-1}^{(1)}(t,\varepsilon) = -(B_1^-\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{Tx_k^{(2)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon T_1x_k(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t),$$

$$\hat{x}_k^{(0)}(t,\varepsilon) = -(B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{[T\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}_{k-1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \bar{x}_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]+$$

$$+\varepsilon T_1x_k(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t),$$

$$\bar{x}_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + [T+\varepsilon T_1][\mathcal{P}_{N(A)}(I-\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}_k^{(0)}(\cdot,\varepsilon)+ \qquad (28)$$

$$+\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}_{k-1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\bar{x}_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]+R(\bar{x}_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t),$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon)=(\mathcal{P}_{N(A)}(I-\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}_k^{(0)}(\cdot,\varepsilon))(t)+$$

$$+\varepsilon(A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}_{k-1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t)+\bar{x}_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x_0(t,\varepsilon)=x_0^{(2)}(t,\varepsilon)\equiv 0,\quad k=0,1,2,3,\ldots.$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть операторное уравнение (1) удовлетворяет условиям (11), а соответствующее порождающее уравнение (2) при условии (3) имеет семейство порождающих решений (4). Тогда, если* $B_0\in\mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1),Y_A)$, $B_1\in\mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1),Y_{B_0})$, *то для каждого элемента* $\hat{z}_0^\sharp\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$, *удовлетворяющего уравнению для порождающих функций (5) при выполнении условий*

$$\mathcal{P}_{N(B_0)}\neq 0,\quad \mathcal{P}_{N(B_0)}\mathcal{P}_{N(B_1)}=0,\quad \mathcal{P}_{Y_{B_1}}\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}=0,$$

$$(\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{[T+\varepsilon T_1]\bar{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(\bar{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t)=0 \tag{29}$$

операторное уравнение (1) имеет единственное решение $z(t,\varepsilon)$ *непрерывное по* ε *и обращающееся при* $\varepsilon=0$ *в порождающее* $z_0(t,\hat{z}_0)$ *с порождающей функцией* $\hat{z}_0\in\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$. *Это решение можно найти с помощью сходящегося на* $[0,\varepsilon_*]\subset[0,\varepsilon_0]$ *итерационного процесса (28) и формулы*

$$z_k(t,\varepsilon)=z(t,\hat{z}_0)+x_k(t,\varepsilon).$$

2. Построение по крайней мере одного решения. Далее предположим, что пересечение нуль-пространств $N(B_0)$ и $N(B_1)$ не является нулевым, т.е. $\mathcal{P}_{N(B_1)}\mathcal{P}_{N(B_0)}\neq 0$. Тогда из разрешимости операторного уравнения (21) получим операторное уравнение

$$\begin{gathered}(B_0\hat{x}^{(0)}(\cdot,\varepsilon))(t)=-(\mathcal{P}_{Y_A}\{[T+\varepsilon T_1][\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\\ +\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t).\end{gathered} \tag{30}$$

А из необходимого и достаточного условия разрешимости уравнения (30) относительно $\hat{x}^{(0)}(t,\varepsilon)$ получаем уравнение для определения $\varepsilon\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\in N(B_0)$:

$$\varepsilon(B_1\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t)=-(\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(\bar{x}(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t). \tag{31}$$

Таким образом, при условии $\mathcal{P}_{Y_{B_1}}\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}=0$ условие разрешимости уравнения (31) будет всегда выполнено и оно будет иметь по крайней мере одно решение относительно $\varepsilon\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon)$

$$\varepsilon\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon)=-(B_1^-\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t)+(\mathcal{P}_{N(B_1)}\breve{x}_0^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t),$$

где $\breve{x}_0^{(1)}(\cdot,\varepsilon)$– произвольный элемент пространства $N(B_1)$, зафиксировав который, мы выбираем некоторое частное решение $(\hat{x}^{(1)})^\sharp(t,\varepsilon)=(\mathcal{P}_{N(B_1)}\breve{x}_0^{(1)}(t,\varepsilon))(t)$.

Тогда, подставляя найденный элемент $\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon)$ в условие разрешимости уравнения (30), обеспечим его выполнение. В этом случае операторное уравнение (30) будет иметь по крайней мере одно решение $\hat{x}^{(0)}(t,\varepsilon)$

$$\hat{x}^{(0)}(t,\varepsilon)=-(B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t)+(\mathcal{P}_{N(B_1)}\breve{x}_0^{(0)}(t,\varepsilon))(t),$$

где $\breve{x}_0^{(0)}(\cdot,\varepsilon)$– произвольный элемент пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$, зафиксировав который, мы выбираем некоторое частное решение $(\hat{x}^{(0)})^\sharp(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(B_0)}\breve{x}_0^{(0)}(t,\varepsilon))(t)$.

Таким образом, упрощая условия существования решений и поступаясь единственностью, от системы (8) приходим к эквивалентной операторной системе

$$\begin{gathered} x(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(A)}(I-\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(\cdot,\varepsilon))(t)+ \\ +\varepsilon(A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon))(t) + \bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon), \\ \hat{x}^{(0)}(t,\varepsilon) = -(B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{T[\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ +\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) + (\hat{x}^{(0)})^\sharp(t,\varepsilon), \\ \varepsilon\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon) = -(B_1^-\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{T\bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) + (\hat{x}^{(1)})^\sharp(t,\varepsilon), \\ \bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(A)}(I-\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(\cdot,\varepsilon)+ \\ +\varepsilon A_1\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \bar{x}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t), \end{gathered} \tag{32}$$

в которой $\hat{x}^{(0)}(t,\varepsilon)$ и $\varepsilon\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon)$ находятся как некоторые частные решения операторного уравнения (14) и второго уравнения системы (8).

Для решения системы (17) применим метод простых итераций, поскольку она представима в виде

$$y(t,\varepsilon) = (W_2 y(\cdot,\varepsilon))(t) + U_4(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon) \tag{33}$$

где оператор W_2 определяется по формуле (18), а оператор U_4 имеет вид:

$$U_4(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(B_0^-\mathcal{P}_{Y_A}\{\varepsilon T_1 x(\cdot,\varepsilon) - R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) + (\hat{x}^{(0)})^\sharp(t,\varepsilon) \\ -(B_1^-\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{\varepsilon T_1 x(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) + (\hat{x}^{(1)})^\sharp(t,\varepsilon) \\ \varepsilon(A^-\{F_0(\cdot,\hat{z}_0) + [T+\varepsilon T_1][\mathcal{P}_{N(A)}(I-\mathcal{P}_{N(B_0)})\hat{x}^{(0)}(t,\varepsilon)+ \\ +\varepsilon A_1(\cdot)\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{x}^{(1)}(t,\varepsilon)] + \bar{x}^{(1)}(t,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\}(t) \end{bmatrix}.$$

Теорема 2. *Пусть операторное уравнение (1) удовлетворяет условиям (11), а соответствующее порождающее уравнение (2) при условии (3) имеет семейство порождающих решений (4). Тогда, если* $B_0 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1),Y_A)$, $B_1 \in \mathbf{GI}(N(B_0),Y_{B_0})$, *то для каждого элемента* $\hat{z}_0 \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{J},\mathbf{B}_1)$, *удовлетворяющего уравнению для порождающих функций (5) при выполнении условий*

$$\begin{gathered} \mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0, \quad \mathcal{P}_{N(B_0)}\mathcal{P}_{N(B_1)} \neq 0, \quad \mathcal{P}_{Y_{B_1}}\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A} = 0, \\ (\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_A}\{[T+\varepsilon T_1]\bar{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R(\bar{x}_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\})(t) = 0 \end{gathered} \tag{34}$$

операторное уравнение (1) имеет по крайней мере одно решение $z(t,\varepsilon)$ *непрерывное по* ε *и обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в порождающее* $z_0(t,\hat{z}_0)$. *Это решение можно найти с помощью сходящегося на* $[0,\varepsilon_*] \subset [0,\varepsilon_0]$ *итерационного процесса (32) и формулы*

$$z_k(t,\varepsilon) = z(t,\hat{z}_0) + x_k(t,\varepsilon).$$

Замечание 1. *В критическом случае второго порядка условия (29), (34) — естественные, необходимые и достаточные условия существования решения, являющегося вторым приближением к искомому. Если условия (29), (34) не выполняются, то решение* $z(t, \varepsilon)$ *операторного уравнения (1) из указанного класса, определяемого с помощью метода простых итераций, не существует. В этом случае можно говорить об обобщеннном решении (квазирешении [11], [12]), а в случае гильбертовых пространств — о псевдорешении операторного уравнения (1).*

Список использованной литературы

1. *Журавлев В.Ф.* Слабонелинейные операторные уравнения в банаховом пространстве. I. Критический случай первого порядка // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математика і інформатика. – 2014. – Вип. 25, № 2. – С. ??? – ???.
2. *Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
3. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
4. *Журавлев В.Ф.* Решение нормально разрешимых операторных уравнений в банаховых пространствах с базисом //Доклады РАН. – 1997.– **352**, 3. – С. 304 - 306.
5. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Покутный А. А.* Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 65, №2. - С. 163 – 174.
6. *Самойленко А.М., Бойчук А.А., Журавлев В.Ф.* Линейные краевые задачи для нормально разрешимых операторных уравнений в банаховом пространстве // Дифференц. уравн. – 2014. – Т. 50, №3. – С. 317 – 326.
7. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. – 320 с.
8. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. - Utrecht; Boston: VSP, 2004. - 317 p.
9. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
10. *Лика Д.К., Рябов Ю.А.* Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. – Кишинев: Штиинца, 1974. – 291 с.
11. *Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – Киев: Наук. думка, 1978. – 228 с.
12. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – 3-е изд. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

Одержано 15.03.2015