УДК 517.983

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

В. Ф. Журавлев

Житомир. нац. агроэкол. ун-т
Украина, 10008, Житомир, бульв. Старый, 7
e-mail: vfz2008@ukr.net

We consider boundary-value problems for integral equations with degenerate kernels. By using the pseudo-inverse operator, we find conditions for existence of a unique solution of the integral equation, as well as a representation for this solution. We also find conditions for existence of a solution of the boundary-value problem for this equation and give a representation of this solution. The results are illustrated with examples.

Розглянуто крайові задачі для інтегральних рівнянь з виродженим ядром. За допомогою псевдооберненого оператора отримано умови існування та зображення єдиного розв'язку вихідного інтегрального рівняння, а також умови існування та зображення розв'язку крайової задачі для цього рівняння. Результати проілюстровано прикладами.

Исследование разрешимости и построение решений линейных краевых задач

$$(Lx)(t) = f(t), \tag{1}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha, \tag{2}$$

где L — линейный ограниченный оператор, ℓ — линейный ограниченный функционал, зависят от разрешимости исходного операторного уравнения (1). Для большого числа краевых задач в случае, когда оператор L является всюду разрешимым [1], получены условия разрешимости и формулы для представления их решений [2–4]. Однако существует большой круг краевых задач вида (1), (2), у которых оператор L не является всюду разрешимым. Интегральные уравнения с вырожденным ядром как раз и относятся к такого рода задачам. Интегральный оператор, задающий исходное уравнение, является фредгольмовым [5, 6] с ненулевым ядром. Это значит, что оператор не имеет обратного, а исходное уравнение разрешимо не при любой правой части [1]. Необратимость исходного оператора вносит существенные трудности в исследование таких краевых задач.

Методы обобщенного обращения и псевдообращения фредгольмовых и нетеровых операторов [4, 7] позволяют решить эту задачу. Рассмотрим применение этих методов к задаче о нахождении критерия разрешимости и построении решений нормально разрешимых операторных уравнений и краевых задач для них в случае, когда оператор L исходного уравнения является фредгольмовым с ненулевым ядром.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную краевую задачу

$$(Lx)(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \tag{3}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha, \tag{4}$$

где $L : \mathbf{L}_2^n[a,b] \to \mathbf{L}_2^n[a,b]$ — интегральный оператор Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$(Lx)(t) \equiv x(t) - \Psi(t) \int\limits_a^b \Phi(s)x(s)\,ds, \tag{5}$$

$\ell = \mathrm{col}\,(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k) : \mathbf{L}_2^n[a,b] \to \mathbf{R}^k$ — k-мерный векторный функционал, действующий из пространства суммируемых с квадратом на промежутке $[a,b]$ функций $\mathbf{L}_2^n[a,b]$ в k-мерное векторное пространство $\mathbf{R}^k$. Столбцы $(n \times m)$-мерной матрицы $\Psi(t)$, строки $(m \times n)$-мерной матрицы $\Phi(t)$, векторы $x(t)$ и $f(t)$ принадлежат гильбертову пространству $\mathbf{L}_2^n[a,b]$. Ставится задача: найти условия разрешимости и формулы для представления решений операторного уравнения (3) и краевой задачи (3), (4) с помощью псевдообратного оператора L^+ к оператору L.

Предварительные сведения. Известно [5], что интегральный оператор (5) является фредгольмовым ($\dim N(L) = \dim N(L^*) = s < \infty$). Изложим в общем виде один из способов построения оператора, псевдообратного к фредгольмовому, действующего из вещественного гильбертового пространства $\mathbf{H}_1$ в вещественное гильбертово пространство $\mathbf{H}_2$.

Пусть $(x_1(t), x_2(t)) = \int_a^b x_1^*(t)x_2(t)\,dt$ — скалярное произведение n-мерного вектора-столбца $x_1(t)$ на n-мерный вектор-столбец $x_2(t)$ в пространстве $\mathbf{H}_1$, где $*$ — операция транспонирования. Тогда по формуле $(X(t), x(t)) = \int_a^b X^*(t)x(t)\,dt$ определим скалярное произведение $(n \times r)$-мерной матрицы $X(t)$ на n-мерный вектор-столбец $x(t)$, результатом которого будет r-мерный вектор-столбец констант, а по формуле $(X(t), Y(t)) = \int_a^b X^*(t)Y(t)\,dt$ — скалярное произведение $(n \times m)$-мерной матрицы $X(t)$ на $(n \times m)$-мерную матрицу $Y(t)$, результатом которого будет $(m \times m)$-мерная постоянная матрица.

Пусть $\{f_i\}_{i=1}^s$ — базис нуль-пространства $N(L)$ оператора L, а $\{\varphi_j\}_{j=1}^s$ — базис нуль-пространства $N(L^*)$ оператора L^*, сопряженного к оператору L. Из базисных векторов нуль-пространств $N(L)$ и $N(L^*)$ составим $(n \times s)$-мерные матрицы

$$X(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_s(t)),$$

$$Y(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_s(t))^*.$$

По формулам (3.4) [4, с. 62] построим ортопроекторы $P_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \to N(L)$ и $P_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \to N(L^*)$:

$$(P_{N(L)}x)(t) = X(t)\alpha^{-1}(X^*(t), x(t))_{\mathbf{H}_1}, \tag{6}$$

$$(P_{N(L^*)}y)(t) = Y(t)\beta^{-1}(Y^*(t), y(t))_{\mathbf{H}_2}, \tag{7}$$

где $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}_i}$, $i = 1, 2,$ — скалярное произведение в пространствах $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ соответственно, α^{-1} и β^{-1} — матрицы, обратные к симметрическим матрицам Грама

$$\alpha = (X^*(t), X(t))_{\mathbf{H}_1}, \quad \beta = (Y^*(t), Y(t))_{\mathbf{H}_2}.$$

Если базисы нуль-пространств $N(L)$ и $N(L^*)$ ортонормированы, то матрицы α и β будут единичными.

Введем в рассмотрение операторы

$$\begin{aligned}(\overline{P}_{N(L^*)}x)(t) &= Y(t)\alpha^{-1}(X^*(t), x(t))_{\mathbf{H}_1}, \overline{P}_{N(L^*)} : \mathbf{H}_1 \to N(L^*),\\ (\overline{P}_{N(L)}y)(t) &= X(t)\beta^{-1}(Y^*(t), y(t))_{\mathbf{H}_2}, \overline{P}_{N(L)} : \mathbf{H}_2 \to N(L).\end{aligned} \tag{8}$$

Оператор $\overline{P}_{N(L^*)}$ является расширением на пространство $\mathbf{H}_1$ оператора, который осуществляет изоморфизм $N(L)$ на $N(L^*)$, а $\overline{P}_{N(L)}$ — оператор, являющийся расширением оператора, обратного изоморфному, на пространство $\mathbf{H}_2$.

Лемма 1. *Оператор* $\overline{L} = L + \overline{P}_{N(L^*)}$ *имеет ограниченный обратный* $\overline{L}^{-1}$.

Доказательство леммы аналогично приведенному в [4].

С помощью леммы 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор*

$$L^+ = \overline{L}^{-1} - \overline{P}_{N(L)} \tag{9}$$

является ограниченным псевдообратным оператором к ограниченному фредгольмову оператору L.

Доказательство теоремы сводится к проверке соотношений, определяющих единственный псевдообратный оператор [7].

Формула (9) для представления единственного псевдообратного оператора к фредгольмовому в гильбертовом пространстве позволяет решить задачу об условиях разрешимости и представлении общего решения интегрального уравнения второго рода с вырожденным ядром.

Критерий разрешимости интегральных уравнений с вырожденным ядром. Псевдообратный оператор к интегральному. Предположим, что однородное уравнение

$$(Lx)(t) \equiv x(t) - \Psi(t)\int_a^b \Phi(s)x(s)\,ds = 0 \tag{10}$$

имеет нетривиальные решения, т. е. уравнение (3) не является всюду разрешимым [1]. Найдем условия разрешимости и общий вид решения уравнения (3) при сделанных выше предположениях.

Для построения псевдообратного оператора к интегральному оператору L построим базисы ядер $N(L)$ и $N(L^*)$ операторов L и L^* соответственно. Для этого найдем общие решения однородного уравнения (10) и сопряженного ему

$$(L^*y)(t) \equiv y(t) - \Phi^*(t) \int_a^b \Psi^*(s)y(s)\,ds = 0. \tag{11}$$

Найдем базисы нуль-пространств операторов L и L^*. Для этого необходимо решить однородные уравнения (10), (11). Решение этих уравнений будем искать в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \Psi(t)\,c, \\ y(t) &= \Phi^*(t)\,d, \end{aligned} \tag{12}$$

где $c = \operatorname{col}[c_1, c_2, \ldots, c_m]$, $d = \operatorname{col}[d_1, d_2, \ldots, d_m]$.

Подставив (12) в (10) и (11) соответственно, получим алгебраические системы относительно c и d :

$$\begin{aligned} Dc &= 0, \\ D^*d &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $D = A - E$ $(D^* = A^* - E)$.

$$A = \int_a^b \Phi(t)\Psi(t)\,dt$$

— $(m \times m)$-мерная постоянная матрица.

Пусть $P_{N(D)} : \mathbf{R}^m \to N(D)$ и $P_{N(D^*)} : \mathbf{R}^m \to N(D^*)$ — ортопроекторы [4] на нуль-пространства $N(D)$ и $N(D^*)$ матриц D и D^* соответственно.

Алгебраические системы (13) имеют ненулевые решения тогда и только тогда, когда $P_{N(D)} \neq 0$, что необходимо влечет за собой и $P_{N(D^*)} \neq 0$. Эти условия эквивалентны условию $\det D = 0$, что мы и предполагаем.

Пусть $\operatorname{rank} D = m - r$ $(\operatorname{rank} D^* = m - r)$. Тогда $(m \times m)$-мерные матрицы-ортопроекторы $P_{N(D)}$ и $P_{N(D^*)}$ имеют по r линейно независимых столбцов, из которых составим $(n \times r)$-мерные матрицы $P_{N_r(D)}$ и $P_{N_r(D^*)}$ соответственно.

С помощью этих матриц общие решения систем (13) можно представить в виде [4]

$$\begin{aligned} c &= P_{N_r(D)}c_r, \\ d &= P_{N_r(D^*)}d_r, \end{aligned} \tag{14}$$

где $c_r \in \mathbf{R}^r$ и $d_r \in \mathbf{R}^r$ — произвольные r-мерные постоянные векторы.

Подставив (14) в (12), получим общие решения однородных интегральных уравнений (10) и (11)

$$x(t) = X_r(t)c_r,$$

$$y(t) = Y_r(t)d_r,$$

где $X_r(t) = \Psi(t)P_{N_r(D)}$ и $Y_r(t) = \Phi^*(t)P_{N_r(D^*)}$ — $(n\times r)$-мерные фундаментальные матрицы, столбцы которых составляют базисы нуль-пространств $N(L)$ и $N(L^*)$ операторов L и L^*.

По формулам (7), (8) построим ортопроектор $P_{N(L^*)}$, операторы $\overline{P}_{N(L)}$ и $\overline{P}_{N(L)}$:

$$(P_{N(L^*)}y)(t) = Y_r(t)\beta^{-1}\int\limits_a^b Y_r^*(s)y(s)\,ds, \quad P_{N(L^*)} : \mathbf{L}_2^n[a,b] \to N(L^*),$$

$$(\overline{P}_{N(L^*)}x)(t) = Y_r(t)\alpha^{-1}\int\limits_a^b X_r^*(s)x(s)\,ds, \quad \overline{P}_{N(L^*)} : \mathbf{L}_2^n[a.b] \to N(L^*),$$

$$(\overline{P}_{N(L)}y)(t) = X_r(t)\beta^{-1}\int\limits_a^b Y_r^*(s)y(s)\,ds, \quad \overline{P}_{N(L)} : \mathbf{L}_2^n[a,b] \to N(L).$$

Здесь α^{-1} и β^{-1} — матрицы, обратные к $(r\times r)$-мерным симметрическим матрицам Грама

$$\alpha = \int\limits_a^b X_r^*(t)X_r(t)\,dt, \quad \beta = \int\limits_a^b Y_r^*(t)Y_r(t)\,dt.$$

Тогда по лемме 1 оператор

$$\left(L + \overline{P}_{N(L^*)}\right)\,x(t) \equiv x(t) - \Psi(t)\int\limits_a^b \Phi(s)x(s)\,ds + Y_r(t)\beta^{-1}\int\limits_a^b X_r^*(s)x(s)\,ds$$

имеет ограниченный обратный, т. е. интегральное уравнение

$$([L + \overline{P}_{N(L^*)}]x)\,(t) = f(t) \tag{15}$$

разрешимо при любой правой части.

Для нахождения решения этого уравнения запишем (15) в виде

$$(\overline{L}x)(t) = [(L + \overline{P}_{N(L^*)})x](t) \equiv x(t) - \Psi_1(t)\int\limits_a^b \Phi_1^*(s)x(s)\,ds = f(t), \tag{16}$$

где $\Psi_1(t) = [\Psi(t), -Y_r(t)\alpha^{-1}]$ — $(n\times(m+r))$-мерная матрица, составленная из матриц $\Psi(t)$ и $-Y_r(t)\alpha^{-1}$, а $\Phi_1(t) = [\Phi^*(t), X_r(t)]$ — $(n\times(m+r))$-мерная матрица, составленная из матриц $\Phi(t)$ и $X_r^*(t)$.

Следуя [5], решение уравнения (16) можно записать в виде

$$x(t) = ((L + \overline{P}_{N(L^*)}f)(t) \equiv f(t) + \Psi_1(t)M^{-1}\int_a^b \Phi_1^*(s)f(s)\,ds, \tag{17}$$

где M^{-1} — $((m+r)\times(m+r))$-мерная матрица, обратная к матрице $M = I - B$,

$$B = \int_a^b \Phi_1^*(t)\Psi_1(t)\,dt.$$

Тогда согласно теореме 1 оператор, псевдообратный к оператору L, будет иметь вид

$$(L^+f)(t) = ((L + \overline{P}_{N(L^*)})^{-1} - \overline{P}_{N(L)})f)(t) =$$

$$= f(t) + \Psi_1(t)M^{-1}\int_a^b \Phi_1^*(s)f(s)\,ds - X_r(t)\beta^{-1}\int_a^b Y_r^*(s)f(s)\,ds. \tag{18}$$

Используя свойства построенного псевдообратного оператора L^+ и тот факт, что ортопроекторы $P_{N(L)}$ и $P_{N(L^*)}$ индуцируют разбиение гильбертова пространства $\mathbf{L}_2^n[a,b]$ в прямые суммы взаимно ортогональных подпространств $\mathbf{L}_2^n[a,b] = N(L)\oplus R(L^*)$, $\mathbf{L}_2^n[a,b] = N(L^*)\oplus R(L)$, легко доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{rank} D = m - r$, $r \neq 0$. *Тогда интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром (3) разрешимо для тех и только тех* $f(t) \in \mathbf{L}_2^n[a,b]$, *для которых*

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = Y_r(t)\beta^{-1}\int_a^b Y_r^*(s)f(s)\,ds = 0, \tag{19}$$

и при этом имеет r-параметрическое семейство решений вида

$$x(t) = X_r(t)\,c_r + (L^+f)(t), \tag{20}$$

первое слагаемое в котором есть общее решение соответствующего однородного уравнения, а второе слагаемое $(L^+f)(t)$ — единственное частное решение (18) уравнения (3), ортогональное к любому решению однородного уравнения (10), $c_r \in \mathbf{R}^r$ — произвольный r-мерный вектор-столбец констант.

Решения уравнения (3), если они существуют, в дальнейшем будем записывать в виде

$$x(t) = X_r(t)c_r + f(t) + \Psi_2(t)\int_a^b \Phi_2^*(s)f(s)\,ds. \tag{21}$$

где $\Psi_2(t) = [\Psi_1(t)M^{-1}, -X_r(t)\beta^{-1}]$ — $(n \times (m+2r))$-мерная матрица, составленная из матриц $\Psi_1(t)M^{-1}$ и $X_r(t)\beta^{-1}$, $\Phi_2(t) = [\Phi_1(t), Y_r(t)]$ — $(n \times (m+2r))$-мерная матрица, составленная из матриц $\Phi_1(t)$ и $Y_r(t)$.

Условие разрешимости (19) вследствие линейной независимости столбцов матрицы $Y_r(t)\beta^{-1}$ эквивалентно условию

$$\int_a^b Y_r^*(s)f(s)\,ds = 0.$$

Линейные краевые задачи для интегральных уравнений второго рода с вырожденным ядром. Найдем решения уравнения (3), удовлетворяющие краевым условиям (4).

Задачу (3), (4) будем рассматривать в предположении, что соответствующая однородная краевая задача

$$(Lx)(t) = 0, \qquad \ell x(\cdot) = 0 \tag{22}$$

имеет нетривиальные решения. В условиях теоремы 2 для того чтобы уравнение (3) имело решения, удовлетворяющие условиям (4), необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая система

$$Qc_r = \alpha - \ell\left\{f(\cdot) + \Psi_2(\cdot)\int_a^b \Phi_2^*(s)f(s)\,ds\right\}, \tag{23}$$

которая получается подстановкой решения (21) интегрального уравнения (3) в краевые условия (4), была разрешима относительно c_r. Здесь $Q = \ell X_r(\cdot)$ — $(k \times r)$-мерная постоянная матрица.

Пусть Q^+ — единственная $(r \times k)$-мерная псевдообратная матрица [4, 7] к матрице Q, $P_{N(Q)} : \mathbf{R}^r \to N(Q)$ — $(r \times r)$-мерная матрица-ортопроектор; $P_{N(Q^*)} : \mathbf{R}^k \to N(Q^*)$ — $(k \times k)$-мерная матрица-ортопроектор.

Обозначим через $P_{N_\rho(Q)}$ $(k \times \rho)$-мерную матрицу, столбцы которой — ρ линейно независимые столбцы матрицы $P_{N(Q)}$ $(\rho = k - n_1, n_1 = \operatorname{rank} Q)$; $P_{N_d(Q^*)}$ — $(d \times r)$ -мерная матрица, строки которой — d линейно независимые строки матрицы $P_{N(Q^*)}$ $(d = r - n_1)$.

Алгебраическая система (23) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие [2, 4]

$$P_{N_d(Q^*)}\left\{\alpha - \ell[f(\cdot) + \Psi_2(\cdot)\int_a^b \Phi_2^*(s)f(s)\,ds]\right\} = 0$$

и при этом имеет ρ-параметрическое семейство решений

$$c_r = P_{N_\rho(Q)}c_\rho - Q^+\left\{\alpha - \ell\left[f(\cdot) + \Psi_2(\cdot)\int_a^b \Phi_2^*(s)f(s)\,ds\right]\right\}, \quad c_\rho \in \mathbf{R}^\rho. \tag{24}$$

Подставив (24) в общее решение (21) уравнения (3), получим общее решение краевой задачи (3), (4):

$$x(t) = X_r(t)P_{N_\rho(Q)}c_\rho + X_r(t)Q^+\alpha - X_r(t)Q^+\ell\left[f(\cdot) + \Psi_2(\cdot)\int_a^b \Phi_2^*(s)f(s)\,ds\right] + f(t)+$$

$$+\Psi_2(t)\int_a^b \Phi_2^*(s)f(s)\,ds = X_\rho(t)c_\rho + f(t)+$$

$$+X_r(t)Q^+[\alpha - \ell f(\cdot)] + [\Psi_2(t) - X_r(t)Q^+\ell\Psi_2(\cdot)]\int_a^b \Phi_2^*(s)f(s)ds.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{rank} Q = n_1 \le \min(k, r)$. *Тогда соответствующая (3), (4) однородная краевая задача (22)* ($f(t) = 0$) *имеет* $\rho = r - n_1$ *и только* ρ *линейно независимых решений.*

Неоднородная краевая задача (3), (4) разрешима для тех и только тех $f(t)$ *и* α, *которые удовлетворяют* $r + d$ *линейно независимым условиям*

$$\int_a^b Y_r^*(s)f(s)\,ds = 0.$$

$$P_{N_d(Q^*)}\left\{\alpha - \ell\left[f(\cdot) + \Psi_2(\cdot)\int_a^b \Phi_2^*(s)f(s)\,ds\right]\right\} = 0,$$

и при этом имеет ρ*-параметрическое семейство решений*

$$x(t) = X_\rho(t)c_\rho + \overline{f}(t) + \overline{\Psi}_2(t)\int_a^b \Phi_2^*(s)f(s)\,ds,$$

где $X_\rho(t) = X_r(t)P_{N_\rho(Q)}$ — $(n\times\rho)$*-мерная фундаментальная матрица краевой задачи (3), (4);* $\overline{f}(t) = f(t) - X_r(t)Q^+\ell f(\cdot)$; $\overline{\Psi}_2(t) = \Psi_2(t) - X_r(t)Q^+\ell\Psi_2(\cdot)$.

Пусть $\operatorname{rank} Q = r$. Тогда необходимо выполнение неравенства $k \le r$. В этом случае краевая задача (3), (4) переопределена и для нее имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\operatorname{rank} Q = r$. *Тогда соответствующая (3), (4) однородная краевая задача (22) не имеет решений, кроме тривиального.*

Неоднородная краевая задача (3), (4) разрешима для тех и только тех $f(t)$ *и* α, *которые удовлетворяют* $r + d$ *линейно независимым условиям*

$$\int_a^b Y_r^*(s)f(s)\,ds = 0.$$

$$P_{N_d(Q^*)}\left\{\alpha - \ell\left[f(\cdot) + \Psi_2(\cdot)\int\limits_a^b \Phi_2^*(s)f(s)\,ds\right]\right\} = 0, \quad d = k - r,$$

и при этом имеет единственное решение

$$x(t) = \overline{f}(t) + \overline{\Psi}_2(t)\int\limits_a^b \Phi_2^*(s)f(s)\,ds,$$

где $\overline{f}(t) = f(t) - X_r(t)Q^+\ell f(\cdot)$, $\overline{\Psi}_2(t) = \Psi_2(t) - X_r(t)Q^+\ell\Psi_2(\cdot)$.

Действительно, так как $\operatorname{rank} Q = r$, то $P_{N(Q)} = P_{N_\rho(Q)} = 0$, $X_\rho(t) = X_r(t)P_{N_\rho(Q)} \equiv 0$ и из теоремы 3 следует утверждение теоремы 4.

Пусть $\operatorname{rank} Q = k$. Тогда $k \geq r$. В этом случае краевая задача (3), (4) недоопределена и для нее имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $\operatorname{rank} Q = k$. *Тогда соответствующая (3), (4) однородная краевая задача (22) имеет* $\rho = r - k$ *и только* ρ *линейно независимых решений.*

Неоднородная краевая задача (3), (4) разрешима для тех и только тех $f(t)$, *которые удовлетворяют* r *линейно независимым условиям*

$$\int\limits_a^b Y_r^*(s)f(s)\,ds = 0,$$

и при этом имеет ρ*-параметрическое семейство решений*

$$x(t) = X_\rho(t)c_\rho + \overline{f}(t) + \overline{\Psi}_2(t)\int\limits_a^b \Phi_2^*(s)f(s)\,ds,$$

где $X_\rho(t) = X_r(t)P_{N_\rho(Q)}$ — $(n \times \rho)$*-мерная фундаментальная матрица,* $\overline{f}(t) = f(t) - X_r(t)Q^+\ell f(\cdot)$, $\overline{\Psi}_2(t) = \Psi_2(t) - X_r(t)Q^+\ell\Psi_2(\cdot)$.

Поскольку $\operatorname{rank} Q = k$, то $P_{N(Q^*)} = P_{N_d(Q^*)} = 0$, и из теоремы 3 следует утверждение теоремы 5.

В случае периодической краевой задачи (3), (4) справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть элементы вектора-столбца* $f(t)$ *и матриц* $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ *являются периодическими по* T *функциями и* $\operatorname{rank} Q = n_1 \leq \min(k, r)$. *Тогда соответствующая (3), (4) однородная краевая задача имеет* $\rho = r - n_1$ *и только* ρ *линейно независимых периодических решений.*

Неоднородная краевая задача (3), (4) имеет периодические решения для тех и только тех $f(t)$, *которые удовлетворяют условиям*

$$\int\limits_0^T Y_r^*(s)f(s)\,ds = 0.$$

$$P_{X_d(Q^*)}\left\{f(0)-f(T)+[\Psi_2(0)-\Psi_2(T)]\int\limits_0^T \Phi_2^*(s)f(s)\,ds\right\}=0.$$

и при этом имеет ρ-параметрическое семейство периодических решений

$$x(t)=X_\rho(t)c_\rho+\overline{f}(t)+\overline{\Psi}_2(t)\int\limits_0^T \Phi_2^*(s)f(s)\,ds,$$

где $X_\rho(t)=X_r(t)P_{X_\rho(Q)}$ — $(n\times\rho)$-мерная фундаментальная матрица, $\overline{f}(t)=f(t)-X_r(t)Q^+[f(0)-f(T)]$, $\overline{\Psi}_2(t)=\Psi_2(t)-X_r(t)Q^+[\Psi_2(0)-\Psi_2(T)]$.

Пример 1. В качестве иллюстрации предложенного выше алгоритма построения решений линейных краевых задач для интегральных уравнений Фредгольма второго рода рассмотрим краевую задачу

$$(Lx)(t)=x(t)-\begin{pmatrix}0&0&t-1\\1&0&0\end{pmatrix}\int\limits_0^2\begin{pmatrix}0&s-\dfrac{1}{2}\\1&0\\\dfrac{3s}{2}&0\end{pmatrix}x(s)\,ds=f(t). \tag{25}$$

$$\ell x(\cdot)=x(0)-x(2)=0, \tag{26}$$

где $x(t)=\operatorname{col}(x_1(t),x_2(t))$ и $f(t)=\operatorname{col}(f_1(t),f_2(t))$ принадлежат пространству $\mathbf{L}_2^2[0,2]$, $t\in[0,2]$.

Оператор L^*, сопряженный оператору L, имеет вид

$$(L^*y)(t)=y(t)-\begin{pmatrix}0&1&\dfrac{3t}{2}\\t-\dfrac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}\int\limits_0^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\s-1&0\end{pmatrix}y(s)\,ds.$$

Найдем базисы ядер $\ker L$ и $\ker L^*$ операторов L и L^*. Для этого решим однородные уравнения

$$\begin{gathered}(Lx)(t)=0,\\(L^*y)(t)=0.\end{gathered} \tag{27}$$

Решения будем искать в виде

$$\begin{gathered}x(t)=\begin{pmatrix}0&0&t-1\\1&0&0\end{pmatrix}c,\\ y(t)=\begin{pmatrix}0&1&\dfrac{3t}{2}\\t-\dfrac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}d.\end{gathered} \tag{28}$$

Подставив (28) в (27), получим относительно $c \in \mathbf{R}^3$ и $d \in \mathbf{R}^3$ алгебраические системы

$$\begin{aligned} (E - A)\,c &= 0, \\ (E - A^*)\,d &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$A = \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ t-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3t}{2} \\ t - \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $D = D^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{N(D)} = P_{N(D^*)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Поскольку $\operatorname{rank} D = 1$, $r = 2$ и $P_{N_r(D)} = P_{N_r(D^*)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, решения алгебраических уравнений (29) будут иметь вид

$$c = P_{N_r(D)} c_r, \quad c_r \in \mathbf{R}^2,$$

$$d = P_{N_r(D^*)} d_r, \quad d_r \in \mathbf{R}^2.$$

Соответственно, общие решения уравнений (27) запишутся следующим образом:

$$x(t) = X_r(t) c_r = \begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c_r,$$

$$y(t) = Y_r(t) d_r = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3t}{2} \\ t - \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} d_r,$$

где

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{N_r(D)}, \quad Y_r(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3t}{2} \\ t - \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{N_r(D^*)}.$$

Таким образом, столбцы матриц $X_r(t)$ и $Y_r(t)$ составляют базисы соответственно нуль-пространств $N(L)$ и $N(L^*)$ операторов L и L^*.

По формулам (7), (8) построим операторы

$$(P_{N(L^*)} y)(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{4} \\ \frac{6t-3}{7} & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & s - \frac{1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} y(s)\, ds,$$

$$(\overline{P}_{N(L^*)}x)(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{9t}{4} \\ \frac{2t-1}{4} & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s-1 & 0 \end{pmatrix} x(s)\,ds.$$

$$(\overline{P}_{N(L)}y)(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t-1}{6} \\ \frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & s-\frac{1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} y(s)\,ds.$$

Оператор $(\overline{L}x)(t) = (L + \overline{P}_{N(L^*)})x(t)$ будет иметь вид

$$(\overline{L}x)(t) = x(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 & 0 & \frac{9t}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-2t+1}{4} & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 \\ s-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^* x(s)\,ds.$$

По формуле (17) построим оператор $\overline{L}^{-1}$, обратный к оператору $\overline{L}$:

$$(\overline{L}^{-1}f)(t) = f(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 & 0 & \frac{9t}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-2t+1}{4} & 0 \end{pmatrix} M^{-1} \times$$

$$\times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 \\ s-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^* f(s)\,ds,$$

где $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{23} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{12} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{12}{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Тогда, следуя (18), оператор L^+ запишем в виде

$$(L^+f)(t) = ((\overline{L}^{-1} - \overline{P}_{N(L)})f)(t) =$$

$$= f(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-2t+5}{12} & 0 & \frac{-3(t-1)}{2} & 0 & \frac{1-t}{6} \\ \frac{-6(t-2)}{23} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{-6}{7} & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s)\,ds. \qquad (30)$$

При условии

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{4} \\ \frac{6t-3}{7} & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{s-1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} f(s)\,ds = 0 \qquad (31)$$

общее решение уравнения (25) таково:

$$x(t) = X_r(t)c_r + (L^+f)(t) = \begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c_r + (L^+f)(t), \quad c_r \in \mathbf{R}^2,$$

где $(L^+f)(t)$ имеет представление (30).

С учетом того, что $f(t) = \operatorname{col}(f_1(t), f_2(t))$, условие (31) можно записать в более простом виде

$$\int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{s-1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds = \int_0^2 \begin{pmatrix} \frac{s-1}{2} f_2(s) \\ \frac{3s}{2} f_1(s) \end{pmatrix} ds = 0.$$

Найдем теперь условия разрешимости и общий вид решения краевой задачи (23), (25).

Подставив общее решение интегрального уравнения (25) в краевые условия (26), получим алгебраическое уравнение

$$Qc_r = -(L^+f)(0) + (L^+f)(2) \qquad (32)$$

для определения константы c_r.

Для этой задачи имеем

$$Q = X_r(0) - X_r(2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{N(Q)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{N(Q^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{rank} Q = 1$, а $\rho = 1$, то $P_{N_\rho(Q)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_{N_\rho(Q^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Уравнение (32) разрешимо при выполнении условия

$$P_{N_\rho(Q^*)}\{f(0) - f(2) + (L^+f)(0) - (L^+f)(2)\} = 0,$$

которое с учетом того, что $P_{N_\rho(Q^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \operatorname{col}(f_1(t), f_2(t))$, примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(2) \\ f_2(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \frac{12}{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds \right\} = 0.$$

После преобразований получим

$$f_2(0) - f_2(2) + \frac{6}{23} \int_0^2 (s-1) f_2(s)\, ds. \tag{33}$$

При выполнении условия (33) уравнение (32) имеет решение вида

$$c_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_\rho - Q^+ \left\{ f(0) - f(2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \frac{12}{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s)\, ds \right\}, \quad c_\rho \in \mathbf{R}^1.$$

Таким образом, задача (25), (26) разрешима при выполнении условий (31) и (33) имеет общее решение вида

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_\rho + \begin{pmatrix} \frac{1-t}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \{f(0) - f(2)\} + f(t) +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1-t}{6} \\ \frac{6(2-t)}{23} & 0 & 0 & 0 & \frac{3(1-t)}{2} & \frac{-6}{7} & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s)\, ds.$$

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу для уравнения (25) с краевыми условиями

$$\ell x(\cdot) = \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} \end{pmatrix} x(t)\, dt = \alpha. \qquad (34)$$

Краевая задача (25), (34) переопределена. Решение будем искать, используя теорему 4.

Подставив решение уравнения (25) в краевые условия (34), получим алгебраическое уравнение относительно c_r :

$$Qc_r = \alpha - \ell L^+ f(\cdot) = \alpha - \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \\ 0 & \frac{s}{2} \end{pmatrix} f(s)\, ds -$$

$$- \Psi_2 \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s)\, ds, \qquad (35)$$

где

$$Q = \ell X_r(\cdot) = \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dt,$$

$$\Psi_2 = \ell\Psi_2(\cdot) = \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-2t+5}{12} & 0 & \frac{-3(t-1)}{2} & 0 & \frac{1-t}{6} \\ \frac{-6(t-2)}{23} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{-6}{7} & 0 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{23} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{23} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для данной краевой задачи имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{N(Q)} = 0, \quad P_{N(Q^*)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{rank} Q = 2$, а $\rho = 2$, то $P_{N_\rho(Q)} = 0$, $P_{N_d(Q^*)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Уравнение (35) разрешимо при выполнении условия

$$P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell \left[f(\cdot) + \Psi_2(\cdot) \int\limits_0^2 \Phi_2^*(s) f(s)\, ds \right] \right\} = 0,$$

которое с учетом того, что $P_{N_d(Q^*)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \operatorname{col}(f_1(t), f_2(t))$, $\alpha =$

$= \mathrm{col}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} - \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \\ 0 & \frac{s}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds - \right.$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{6}{23} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{23} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\left. \times \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds \right\} = 0.$$

После преобразований получим

$$\alpha_1 - \alpha_3 + \frac{13}{46} \int\limits_0^2 (s-1) f_2(s)\, ds = 0. \tag{36}$$

При выполнении условия (36) уравнение (35) имеет единственное решение вида

$$c_r = Q^+ \left\{ \alpha - \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \\ 0 & \frac{s}{2} \end{pmatrix} f(s)\, ds - \right.$$

$$\left. - \Psi_2 \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds \right\}.$$

Таким образом, краевая задача (25), (34) разрешима при выполнении условий (31) и (36) имеет единственное решение вида

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 & t-1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left\{ \alpha - \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \\ 0 & \frac{s}{2} \end{pmatrix} f(s)\, ds - \right.$$

$$\left. - \Psi_2 \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s)\, ds \right\} + (L^+ f)(t).$$

Пример 3. Рассмотрим краевую задачу для уравнения (25) с краевыми условиями

$$\ell x(\cdot) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} x(2) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}^1. \tag{37}$$

Краевая задача (25), (37) недоопределена. Решение будем искать, используя теорему 5.

Подставив решение уравнения (25) в краевые условия (37), получим алгебраическое уравнение относительно c_r :

$$Qc_r = \alpha - \ell L^+ f(\cdot) = \alpha - \overline{f} - \\ - \overline{\Psi}_2 \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s)\,ds, \tag{38}$$

где

$$Q = \ell X_r(\cdot) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} X_r(0) + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} X_r(2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{f} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} f(0) + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} f(2),$$

$$\overline{\Psi}_2 = \ell\Psi_2(\cdot) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \Psi(0) + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \Psi(2) = \begin{pmatrix} \frac{24}{23} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -3 & -\frac{24}{7} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Для данной краевой задачи имеем

$$Q^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_{N(Q)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{N(Q^*)} = 0.$$

Поскольку $\operatorname{rank} Q = 1$, $\rho = 1$, $d = 0$, то $P_{N_\rho(Q)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_{N_d(Q^*)} = 0$.

Так как $P_{N_d(Q^*)} = 0$, уравнение (38) разрешимо при любой правой части и имеет однопараметрическое ($c_\rho \in \mathbf{R}^1$) семейство решений вида

$$c_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_\rho + Q^+ \left\{ \alpha - \overline{f} - \overline{\Psi}_2 \int\limits_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s)ds \right\}.$$

Таким образом, краевая задача (25), (37) разрешима при выполнении условия (31) и имеет общее решение вида

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_\rho + \begin{pmatrix} \dfrac{t-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \alpha - \overline{f} - \overline{\Psi}_2 \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dfrac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \dfrac{3s}{2} \\ \dfrac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^{*} f(s)\,ds \right\} + (L^{+}f)(t).$$

1. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
2. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
3. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.* Построение решений краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1990. — № 6. — С. 3–6.
4. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
6. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Boundary-value problem for linear systems of integro-differential equations with degenerate kernel // Ukr. Mat. Zh. — 1996. — **48**, № 11. — S. 1576–1579.
7. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.

Получено 30.03.10