

## СЕКРЕТИ ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ

Дубишевська Т.Ю., студентка I курсу інженерно-технічного факультету ЖНАЕУ

Корнійчук О.Е., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики та прикладної механіки

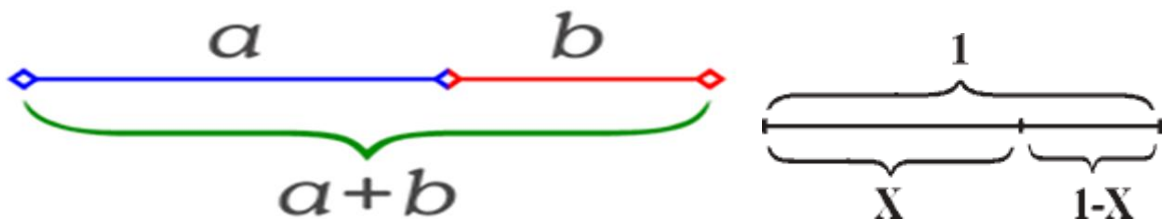
У статті розкрито деякі особливості і таємниці золотого перерізу, його приховані властивості у повсякденному житті та деякі застосування золоті пропорції в науці і техніці, творчості і мистецтві, а також у галузі кібернетики та електроенергетики.

**Ключові слова:** золота пропорція, золотий переріз, логарифмічна спіраль, числа Фібоначчі, код Фібоначчі.

Із багатьох пропорцій, якими споконвіку користувалася людина у сфері гармонії власних творінь, вирізняється одна, єдина і неповторна пропорція, у якій приховуються унікальні секрети. Цю пропорцію називали по-різному: «золотою», «Божественною», «золотим перерізом», «золотою серединою», «золотим числом».

«Золота пропорція» – поняття математичне і її вивчення є, насамперед, завданням математики. Золота пропорція є критерієм гармонії і краси, проте вона має бути категорією не тільки мистецтва та естетики, а й інших галузей наук, зокрема – комп'ютерних та електротехнічних. Адже Золотий переріз займає значне місце в сучасних дослідженнях живої і неживої природи, про що необхідно знати майбутнім інженерам.

Золотий переріз – це такий пропорційний поділ відрізка на дві нерівні частини, при якому весь відрізок відноситься до більшої частини так само, як більша частина відноситься до меншої:  $\varphi = (a+b) : a = a : b$ .



Число  $\varphi$  називають відношенням однієї частини відрізка до іншої. Простіше, пропорція золотого перерізу наближено дорівнює 8:5, а точніше - 13:8. Математики обчислили значення числа  $\varphi = 1,61803398\dots$

Якщо взяти відрізок одиничної довжини, позначити одну з частин за  $x$  ( $b=x$ ), то інша буде  $1-x$  ( $a=1-x$ ). Отримаємо рівняння:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x},$$

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618 \dots, x_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx -1,6180339.$$

Проте частіше розглядають відношення всього відрізка до  $x$ , тобто  $\frac{1}{x}$ .

Саме число  $\varphi = \frac{1}{x} = 1,618$  називають *числом золотого перерізу*.

Практичне знайомство із золотим перерізом починають з поділу відрізка прямої у золотому відношенні за допомогою циркуля і лінійки (рис. 1).

З точки  $B$  проводимо перпендикуляр, що дорівнює половині  $AB$ . Отримана точка  $C$  з'єднується з точкою  $A$ . Відкладаємо на  $AC$  відрізок  $AD=BC$ . Відрізок  $AD$  переносимо на пряму  $AB$ . Отримана при цьому точка  $E$  ділить відрізок  $AB$  у відношенні золоті пропорції.

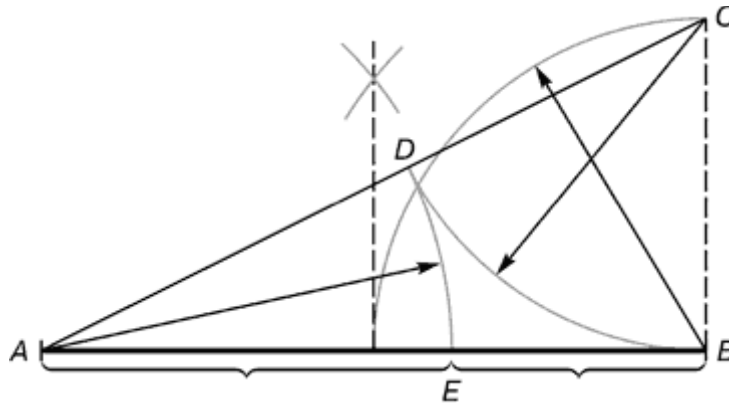


Рис. 1. Поділ відрізка прямої у золотому відношенні.

$$BC = \frac{1}{2} AB; CD = BC$$

Відрізки золоті пропорції виражаються нескінченним ірраціональним дробом  $AE = 0,618\dots$ , якщо  $AB$  прийняти за одиницю,  $BE = 0,382\dots$  Для практичних цілей часто використовують наближені значення 0,62 і 0,38. Якщо відрізок  $AB$  прийняти за 100 частин, то більша частина відрізка рівна 62, а менша – 38 частинам.

Поділ відрізка у крайньому та середньому відношеннях був уперше розкритий Піфагором 2500 років тому, а перші письмові свідчення про золотий переріз зустрічаються у «Началах» Евкліда (3 ст. до н.е.). Проте, існують факти, що про золоту пропорцію знали задовго до Піфагора.

Золотий переріз можна побачити у **пентаграмі** – так називали греки зірчастий багатокутник (рис. 2). Він є символом Піфагорійського союзу – релігійної секти і наукової школи на чолі з Піфагором, яка сповідувала братську любов один до одного, зречення від зовнішнього світу, спільність майна тощо. На подібних традиціях ґрунтувалися дуже багато сект.



Рис. 2. Пентаграма захисту від зла

Піфагорійський союз відрізняло від інших те, що піфагорійці вважали можливим домогтися очищення духу за допомогою математики. За їхньою теорією, в основу світового порядку покладено числа. Світ, вважали вони, складається з

протилежностей, а гармонія приводить протилежності до єдності. Гармонія ж полягає в числових відношеннях. Піфагорійці приписували числам різні властивості. Так, парні числа вони називали жіночими, непарні (крім 1) – чоловічими. Число 5 – як сума першого жіночого числа (2) та першого чоловічого (3) – вважалось символом любові. Звідси така увага до пентаграми, яка має 5 кутів.

Особливими властивостями володіє й «золотий прямокутник» (рис. 3), у якого відношення більшої сторони до меншої дорівнює «золотій пропорції», тобто:

$$\frac{AL}{LK} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Якщо відрізати від цього прямокутника квадрат, сторона якого дорівнює меншій стороні прямокутника, ми знову отримуємо золотий прямокутник менших розмірів. Продовжуючи багаторазово цю процедуру отримуємо нескінченну послідовність квадратів і «золотих прямокутників», які сходяться до деякої границі в точці  $O$  (рис. 3а).

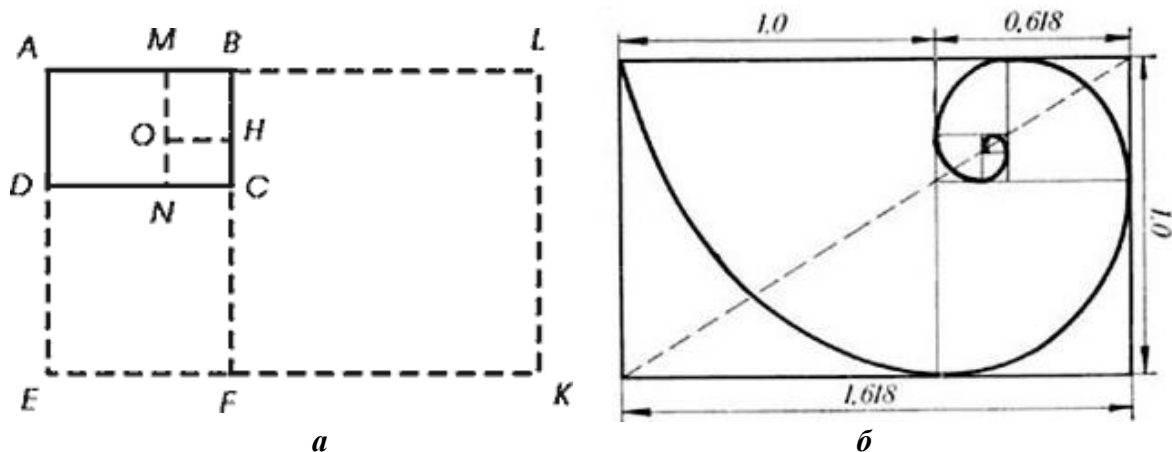


Рис. 3. Золотий прямокутник. Логарифмічна спіраль

Якщо на основі «золотого прямокутника» через точки  $L, F, D, M, H, N$  провести криву, то отримуємо спіраль, яка буде також «золотою», її називають *логарифмічною спіраллю* (рис. 3б),  $O$  – полюс спіралі. Це єдиний тип спіралі, яка не змінює своєї форми при збільшенні розмірів.

Одна з чудових властивостей логарифмічної спіралі полягає в тому, що довільний промінь, який виходить з її полюса, перетинає будь-який виток спіралі під одним й тим самим кутом (рис. 4).

Ця властивість застосовується в ріжучих машинах. *Шлях обертання ножів соломорізки утворює логарифмічну спіраль*. Кут різання такого механізму є сталим вздовж всієї кромки рухомого ножа.

Виявляється, що *трубу, яка постачає воду до лопатей турбінного колеса на гідроелектростанції, також слід згорнути по логарифмічній спіралі*. Тоді втрати енергії рухомої води будуть мінімальними.

Спіраль – це плоска лінія, яка утворена точкою, що рухається і одночасно віддаляється за визначеним законом від початку вектора, який рівномірно обертається навколо своєї початкової точки. Якщо початок спіралі вибрати за полюс полярної системи координат, то математично спіраль може бути представлена у вигляді

полярного рівняння  $\rho = f(\varphi)$ ,  $\rho$  – радіус-вектор спіралі,  $\varphi$  – кут, що відкладається на полярній осі,  $f(\varphi)$  – деяка монотонно зростаюча або спадаюча додатна функція.

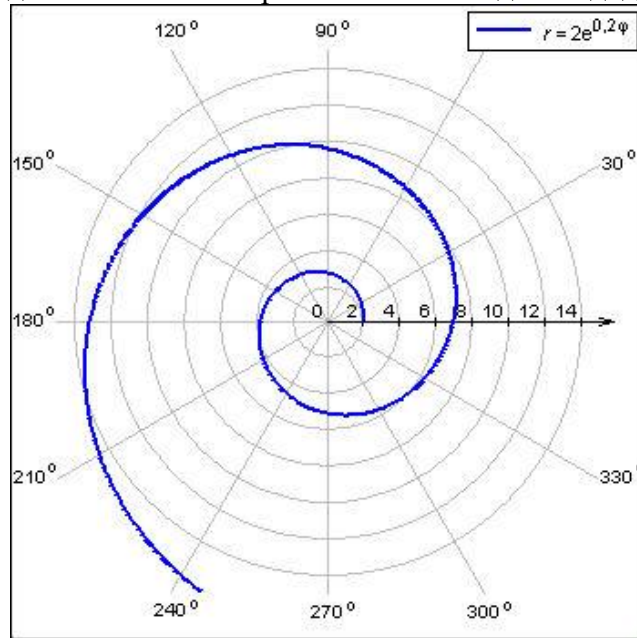


Рис. 4. Логарифмічна спіраль у полярних координатах

Якщо точка віддаляється від початку *рівномірно*,  $\rho = a\varphi$ , то маємо *спіраль Архімеда*. Якщо – за експонентним законом (рис. 4),  $\rho = ae^{m\varphi}$ , де  $a$  – довільне додатне число, то це буде *логарифмічна спіраль*.

Звичайна воронка, яка утворюється водою під час витікання з раковини, лютий смерч, який спустошує все на своєму шляху, величний кругообіг гігантського космічного вихору туманностей і галактик – всі вони мають форму спіралей (рис. 5). Побачити криві, що є близькими до закручування логарифмічної спіралі можна й у витках раковини слимака, й у розміщенні насіння у квітці соняшника, й у рогах гірського барана та дзьобах папуг, й у контурах траєкторії руху деяких комах, які летять до світла.



Рис. 5. Формування тіла циклону

Усяка логарифмічна спіраль являє собою схему росту чи зростання і може бути виражена геометричною прогресією. При цьому особливе значення має «золота» логарифмічна спіраль, у якій члени геометричної прогресії, які відповідають спіралі, є ступенями золотого пропорції  $\{\varphi^n\}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ . Така спіраль має властивість бути одночасно і геометричною, і арифметичною прогресією, тобто експонентний ріст у неї забезпечується шляхом простого додавання двох сусідніх елементів – для нашого випадку це числа Фібоначчі.

З історією золотого перерізу невід'ємно пов'язане ім'я італійського математика Леонардо Фібоначчі. У 1202 г вийшла у світ його математична праця «Книга про Абак» (лічильну дошку), у якій були зібрані всі відомі на той час задачі. *Задача*: "Скільки пар кроликів в один рік від однієї пари народиться". Розмірковуючи на цю тему, Леонардо побудував ряд чисел: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144..., який отримав назву – ряд Фібоначчі.

Особливість послідовності чисел полягає в тому, що кожен її член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх  $2 + 3 = 5$ ;  $3 + 5 = 8$ ;  $5 + 8 = 13$ ,  $8 + 13 = 21$ ;  $13 + 21 = 34$  і т.д., а відношення суміжних чисел ряду наближається до відношення золотого розподілу. Так,  $21 : 34 = 0,617$ , а  $34 : 55 = 0,618$ . Це відношення позначається символом Ф. Саме це відношення,  $0,618 : 0,382$ , дає безупинний розподіл відрізка прямої в золотій пропорції, збільшення його або зменшення веде до нескінченності, коли менший відрізок так відноситься до більшого, як більший до всього цілого.

Серед при шляхових трав росте ніяк не примітна рослина – цикорій (рис. 6). Придивимось до нього уважно: від основного стебла утворився відросток, тут же розташований перший листок.

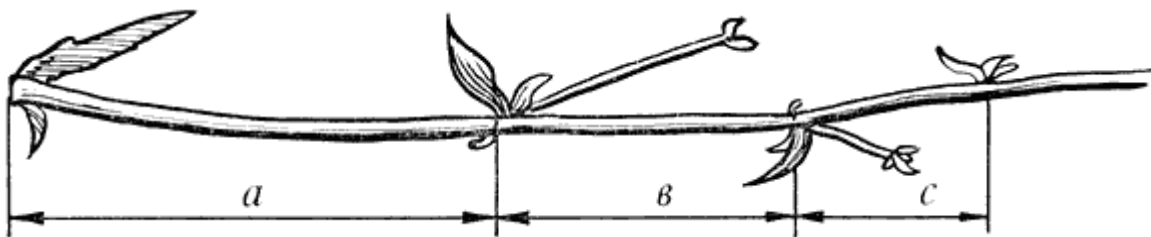


Рис. 6. Цикорій

Відросток робить сильний викид у простір, зупиняється, випускає листок, але вже коротше першого, знову робить викид у простір, але вже меншої сили, випускає листок ще меншого розміру й знову викид. Якщо перший викид прийняти за 100 одиниць, то другий дорівнює 62 одиницям, третій – 38, четвертий – 24 і т.д. Довжина пелюсток теж підпорядковується золотій пропорції. У зростанні, завоюванні простору рослина зберігала певні пропорції. Імпульси його росту поступово зменшувалися у золотій пропорції.

У ящірки (рис. 7) з першого погляду вловлюються приємні для нашого ока пропорції – довжина її хвоста так ставиться до довжини іншої частини тіла, як 62 до 38. Отже, і в рослинному, і у тваринному світі наполегливо пробивається формотворна тенденція природи – симетрія щодо напрямку росту та руху.

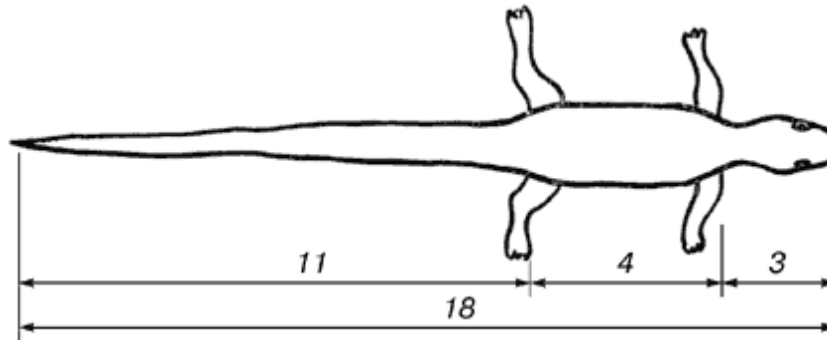


Рис. 7. Ящірка живородна

Всі відомості про фізіологічні особливості живих істот зберігаються у мікроскопічній молекулі ДНК, будова якої також містить у собі закон золоті пропорції. Молекула ДНК складається з двох вертикально переплетених між собою спіралей (рис. 8). Довжина кожної з цих спіралей становить 34 ангстрема, ширина 21 ангстрема (1 ангстрем – одна стомільйонна частка сантиметра). Так ось 21 і 34 – це цифри, наступні один за одним у послідовності чисел Фібоначчі, тобто співвідношення довжини і ширини логарифмічної спіралі молекули ДНК несе в собі формулу золотого перерізу 1:1,618.

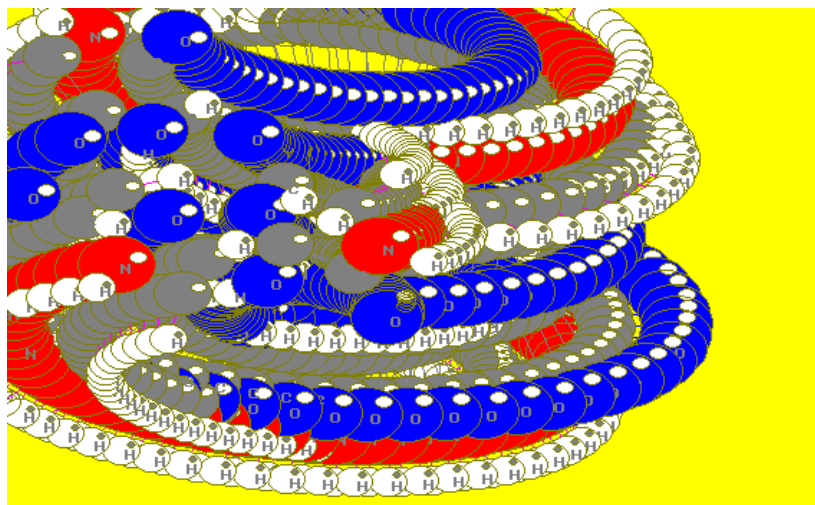


Рис. 8. Художній образ динамічної молекулярно-генетичної структури

Людина розрізняє оточуючі його предмети за формою. Інтерес до будь-якої форми може бути продиктований життєвою необхідністю, а може бути викликаний красою форми. Форма, в основі побудови якої лежать поєднання симетрії і золотого перетину, сприяє найкращому зоровому сприйняттю і появі відчуття краси і гармонії. Ціле завжди складається з частин, частини різної величини знаходяться в певному відношенні один до одного і до цілого.

Принцип золотого перерізу – вищий прояв структурної та функціональної досконалості цілого і його частин у мистецтві, науці, техніці та природі.

Ще в епоху Відродження художники відкрили, що будь-яка картина має певні точки, які мимоволі приковують нашу увагу, так звані зорові центри. При цьому абсолютно неважливо, який формат має картина – горизонтальний або вертикальний.



Таких точок всього чотири, і розташовані вони на відстані  $\frac{3}{8}$  і  $\frac{5}{8}$  від відповідних країв площині (рис. 9).

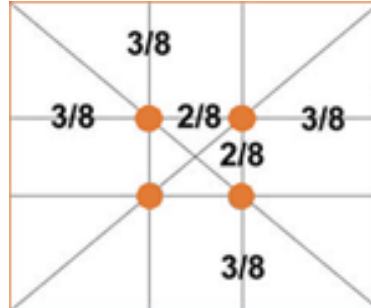


Рис. 9. Розташування зорових центрів

Намалювавши сітку, ми отримуємо дані точки в місцях перетину ліній. Людина завжди акцентує свою увагу на цих точках, незалежно від формату кадру або картини.

Використання золотого перерізу іноді здійснюється інтуїтивно, на підсвідомому рівні, що зумовлюється близькістю цього поняття до законів гармонії, які існують у природі. Мабуть, саме від цього відштовхувався Леонардо да Вінчі, створюючи свої неперевершені картини (рис. 10-11).



Рис. 10. Джоконда



Рис. 11. Таємна вечеря

А славнозвізні італійські майстри смичкових інструментів Н. Амати (1596-1684) і А. Страдіварі (1644-1737) свідомо застосовували пропорцію золотого перерізу, надаючи своїм виробам привабливого зовнішнього вигляду (рис. 12).

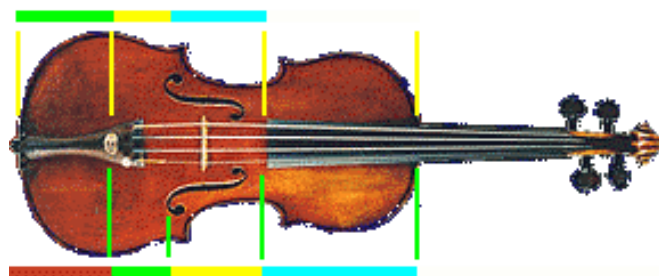


Рис. 12. Скрипка

Існують різні способи і правила для створення яскравої гармонійної композиції на фотознімку. Іноді достатньо розмістити об'єкти зйомки в певних місцях. В інших випадках достатньо правильно вибрати точку зйомки і для цього існують деякі допоміжні правила. Наприклад, якщо фотограф бажає створити більш динамічне фото, він обирає три прями, які виходять від правого верхнього краю до лівого нижнього краю. У межі цих діагоналей повинен потрапляти предмет, на який фотограф намагається звернути увагу (рис. 13а). Якщо лінійні елементи, наприклад, дороги, водні шляхи, огороження, встановлюються по діагональним прямим, то пейзажі стають більш динамічними (рис. 13б). Для отримання гармонійного фото накладають на зображення діагональну сітку, а головні об'єкти зображення розташовують в отриманих секціях (рис. 13в).

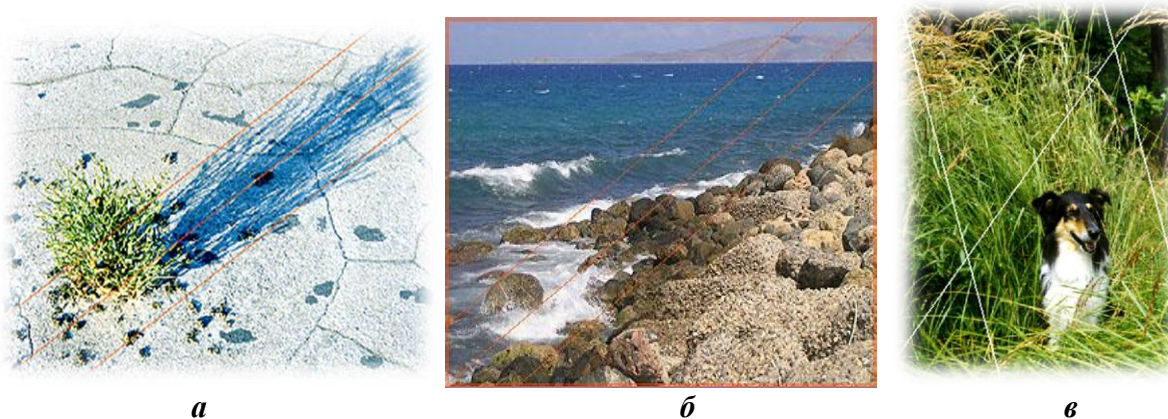


Рис. 13. Створення динамічного фотознімку

З розвитком дизайну і технічної естетики дія закону золотого перерізу розповсюдилася на конструювання машин, меблів тощо. Виникають витончені методи розв'язання ряду кібернетичних завдань (теорія пошуку рішення, теорія ігор, програмування). Проектування комп'ютерних інтерфейсів також не виключення. Форми діалогових вікон та елементів управління, сторони яких відносяться як 1:1,618, є привабливими для сприйняття користувачів.

У 1965 р американський інженер Кауц опублікував статтю «*Fibonacci Codes for Synchronization Control*» («IEEE Trans. IT», 1965, v.11, No 2). У статті обговорювалася галузь досить ефективного застосування кодів Фібоначчі у керуванні синхронізацією кодових сигналів у каналах зв'язку та цифрових магнітних записах. Перша з цих розробок – це волоконно-оптична лінія зв'язку підвищеної пропускної здатності. При цьому в системі використовувалося два способи кодування інформації: так званий "біфазний" код типу "Манчестер" і код Фібоначчі. Цей напрямок досліджень отримав свій розвиток у розробках РКТБ "Модуль".

Наведені нижче технічні характеристики волоконно-оптичних систем зв'язку (рис. 14), побудованих на різних системах кодування, свідчать про незаперечні переваги коду Фібоначчі.

*Технічні характеристики волоконно-оптичної системи зв'язку:*

1. Швидкість передачі інформації:
  - біфазний код – 10 Мбіт / сек;
  - код Фібоначчі – 20 Мбіт / сек.
2. Ймовірність помилки в каналі:



- біфазний код –  $10^{-9}$ ;
  - Код Фібоначчі –  $10^{-11}$ .
3. Максимальна довжина лінії зв'язку – 1000 м.

На замовлення ряду промислових підприємств в РКТБ "Модуль" був розроблений «фібоначчів» реєстратор вимірювальних сигналів на основі побутового відеомагнітофона (рис. 15).

Особливість розробки полягала в тому, що в каналі магнітної реєстрації було використано «фібоначчів» кодування. Реєстратор дозволяв здійснювати перетворення аналогових сигналів у цифровий код за двома різними каналами, реєструвати сформований цифровий потік від аналого-цифрових перетворювачів або від зовнішніх джерел на магнітний носій, далі відтворювати цифровий потік, подаючи його до комп'ютера, або на цифро-аналоговий перетворювач.

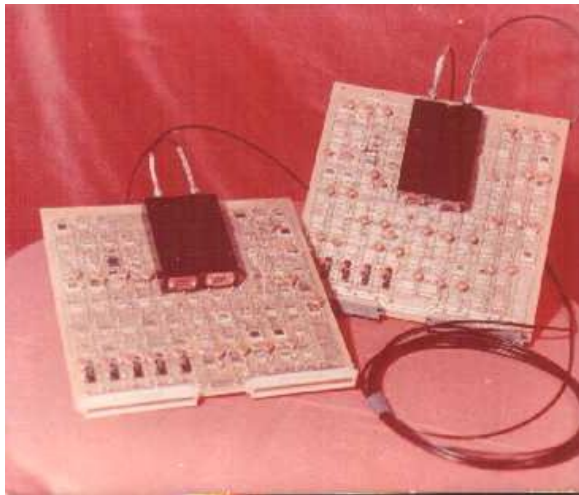


Рис. 14. Елементи волоконно-оптичної лінії зв'язку



Рис. 15. Фібоначчів реєстратор вимірювальних сигналів

Роботи щодо використання кодів Фібоначчі для вирішення проблем самосинхронізації каналів магнітної реєстрації проводилися спільно з Київським НВО "Маяк", яке вважалось провідною радянської фірмою щодо цифрових магнітофонів спеціального призначення. Ентузіастом досліджень в НВО "Маяк" був талановитий інженер Ю.П. Орлович, який захистив кандидатську дисертацію за цим напрямком. Результати спільних досліджень РКТБ "Модуль" і НВО "Маяк" були викладені в колективній монографії "Кодування даних в інформаційно-реєструючих системах".

«Двійкова» система числення є основою сучасних комп'ютерних технологій! Виникає питання: якщо ми будемо використовувати «фібоначчіву» систему числення та кодування, чи стане можливим перехід до нових комп'ютерів – Фібоначчі-комп'ютерів, як нової ідеї у розвитку комп'ютерної техніки?

У наш час багато науковців вивчають застосування чисел Фібоначчі та Золотий перерізу у фізиці, філософії, біології, медицині, математиці та комп'ютерній науці [1-11]. Художники, поети й музиканти використовують у своїй творчості принципи золоті пропорції. Завдяки дослідженням

американських учених Елліота, Пречтера і Фішера числа Фібоначчі стали основою оптимальних стратегій у сфері бізнесу і торгівлі.

Відкриття квазикристалів у 1984 р. ізраїльським вченим Даном Шехтманом, яке засноване на золотому перерізі та "пентагональній" симетрії, має революційне значення для сучасної фізики. Прорив у сучасних уявленнях про природу формоутворення біологічних об'єктів на початку 90-х років зробив український вчений Олег Боднар, створивши нову геометричну теорію філлотаксису. За гіпотезою американського вченого Д. Вінтера, керівника групи "Планетарні серцебиття", не лише енергетичний каркас Землі, але й будова усіх живих речовин, засновані на властивостях додекаедра і ікосаедра – двох «Платонових тіл», які пов'язані із золотим перерізом. І нарешті, саме, мабуть, головне – структура ДНК генетичного коду життя, являє собою чотиривимірну розгортку (за віссю часу) обертового додекаедра! Отже, виявляється, що весь Всесвіт – від Метагалактики до живої клітини – побудовано за одним принципом – нескінченно вписуємих один в одного додекаедра і ікосаедра, що знаходяться між собою у Золотій пропорції!

Поняття Міри і Гармонії пронизують всю історію науки. Тому глибоке вивчення питань, пов'язаних із Золотим перерізом, є підставою для роздумів щодо його застосувань і перспективним напрямом розвитку сучасних наукових досліджень.

### Література

1. Корнійчук О. Е. Новітні методи і прийоми навчання математичного моделювання та дослідження організації виробництва / О. Е. Корнійчук // Освіта та педагогічна наука. – Луганськ : Луганський національний педагогічний університет імені Тараса Шевченка, 2012. – № 3 (152). – С. 54-61.
2. Корнійчук О. Е. Формування професійного інтелекту в процесі моделювання систем штучного інтелекту / О. Е. Корнійчук // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського нац. ун-ту ім. І. Огієнка. Сер. Педагогічна. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2014. – Вип. 20. – С. 90-93.
3. Кривобочек М. М. Фрактальна геометрія у розвитку сучасних технологій та прикладної математики / М. М. Кривобочек, О. Е. Корнійчук // Передові технології виробництва та переробки сільськогосподарської продукції, енергозбереження та забезпечення тепловою й електричною енергією. Перспективи та проблеми впровадження в сільське господарство Полісся : зб. доповідей учасників III студентської наук.-техн. конф. інженерно-технічного фак. ЖНАЕУ, 25 груд. 2013 р. – Житомир : ЖНАЕУ, 2014. – С. 325-338.
4. Корнійчук О. Е. Взаємодія між дисциплінами фундаментальної і професійної підготовки в процесі вивчення компонент інтелектуальної системи / О. Е. Корнійчук, Є. Ю. Тімченко // Комп'ютер у школі та сім'ї. – Київ : Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України; Інститут інформаційних технологій і засобів навчання Національної академії педагогічних наук України, 2012. – № 7 (103). – С. 15-19.
5. Корнійчук О. Е. Комп'ютерно орієнтована методична система навчання вищої математики студентів економічних спеціальностей коледжів : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання

- 
- (математика)» / О. Е. Корнійчук. – Київ : Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова, 2010. – 21 с.
6. Корнійчук О. Е. Методи інтегрального числення та GRAN-застосування для розв'язування задач економічного змісту / О. Е. Корнійчук // Комп'ютер у школі та сім'ї. – Київ : Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України; Інститут інформаційних технологій і засобів навчання Національної академії педагогічних наук України, 2012. – № 8 (104). – С. 12-16.
  7. Корнійчук О. Е. Застосування вищої математики до розв'язання актуальних питань з проблеми екологізації економіки / О. Е. Корнійчук // Проблеми та перспективи наук в умовах глобалізації : матеріали VI Всеукр. наук. конф., 15 груд. 2010 р. – Тернопіль : Тернопільський нац. пед. ун-т ім. В. Гнатюка, 2010. – Ч. I. : Педагогіка, психологія, суспільствознавство, мовознавство. – С. 24-30.
  8. Корнійчук О. Система Maple в процесі навчання методам диференціального числення / Олена Корнійчук // Інформаційні технології в професійній діяльності : матеріали VI Всеукр. наук.-практ. конф., 28 берез. 2012 р. – Рівне : Рівненський державний гуманітарний університет, 2012. – С. 28-30.
  9. Корнійчук О. Е. GRAN-ілюстрація та прогнозні обчислення еколого-економічної моделі / О. Е. Корнійчук // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. № 2. Комп'ютерно орієнтовані системи навчання. – Київ : Національний пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, 2007. – Вип. 5 (12). – С. 131-136.
  10. Корнійчук О. Е. Комп'ютерні технології у вивченні математики для економістів / О.Е. Корнійчук, В.М. Єрмаков // Комп'ютер у школі та сім'ї. – Київ : Інститут педагогіки Національної академії пед. наук України; Інститут інформаційних технологій і засобів навчання Національної академії пед. наук України, 2004. – № 8(40). – С. 16-19.
  11. Корнійчук О. Математичні моделі в економічних розрахунках на базі MathCAD / Олена Корнійчук // Математика в школі : науково-методичний журнал. – Київ : МОН України; Академія пед. наук України, 2006. – № 6. – С. 35-41.