ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРИ МАТЕМАТИЧНОЇ ОБРОБЦІ ГЕОДЕЗІЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Р. С. Богатиренко
к.т.н.
Н. В. Гонгало
старший викладач

У статті висвітлюється доцільність використання методів математичного програмування в геодезичних обчислювальних роботах та їх подальшого вдосконалення з урахуванням особливостей розглянутих питань; викладено метод обчислення координат,

який дозволяє знаходити їх, використовуючи мінімум вихідної інформації, створений на основі теорії нелінійного програмування.

Постановка проблеми. Великий клас геодезичних задач, пов'язаних з оптимальним плануванням робіт, проектуванням геодезичних мереж, розробкою раціональних методів обробки вимірів та ін., вирішується одним з математичних апаратів теорії дослідження операцій методом математичного програмування.

На етапі попередніх обчислень завдання полягає в розробці таких нелінійних методів, які використовують мінімум початкової інформації. Так, наприклад, при вирішенні зарубок одного пункту методом релаксації [6,9] не потрібно знати початкові координати пункту. Вони знаходяться як середнє арифметичне з координат вихідних пунктів. Це відбувається завдяки застосуванню відповідних методів нелінійного програмування і використуванні нормуючих множників для нелінійних рівнянь з метою розширення області збіжності. Крім того, завдяки нелінійним методам вдається розробити загальний алгоритм для вирішення будь-яких видів одноразових зарубок[9].

На етапі зрівняльних обчислень в більшості випадків перехід до різних методів зрівнювання може бути здійснений шляхом відповідного вибору цільової функції без зміни алгоритму мінімізації .

У процесі досліджень над розробкою нелінійних методів з'ясувалось, що в ряді випадків вони дають рішення тоді, коли система лінійних рівнянь характеризується виродженої матрицею. Звичайно, основу математичної обробки вимірів складають лінійні методи[8], а нелінійні методи варто застосовувати тоді, коли лінійні методи неефективні.

Аналіз останніх досліджень та постановка завдання.

Найбільше застосування в практиці геодезичних обчислювальних робіт отримали методи квадратичного програмування, розраховані на ті випадки, коли цільова функція є квадратичною, а обмеження, яких може і не бути, лінійні[1,7]. Якщо розглядається задача з відшуканням екстремуму квадратичної форми без обмежень, то оптимізація виконується за методом найменших квадратів, який є частинним випадком квадратичного програмування [2,3,4]. Методи зрівнювання, засновані на теорії математичного програмування володіють наступними позитивними особливостями:

- у методах математичного програмування розглядаються рішення оптимізаційних завдань з обмеженнями лінійного та нелінійного характеру у вигляді рівностей або нерівностей. Згідно з дослідженнями[2,3], зрівнювання високоточних геодезичних мереж методом квадратичного програмування на основі принципу найменших квадратів з урахуванням обмежень на величини поправок в результати вимірювань забезпечує кращі узгодження поправок з їх істинними значеннями.
- методи квадратичного програмування дозволяють розв'язувати великі системи рівнянь обчислювальними алгоритмами, найбільш пристосовуваними до їх реалізації на ЕОМ[5]. Прикладом можуть служити різні градієнтні методи: найшвидшого спуску; проекції градієнта та ін.
- методи нелінійного програмування дозволяють розв'язувати системи нелінійних рівнянь без лінеаризації вихідних параметричних рівнянь. В результаті попередні значення параметрів в більшості випадків можуть бути отримані без залучення додаткових відомостей про геодезичні мережі[5,9,10].

Об'єкти і методика досліджень.

Для успішного вирішення завдань попередньої обробки вимірювань потрібно знати координати пунктів, які визначаються, з необхідною точністю. При цьому слід передбачати ітеративний процес уточнення координат шляхом переходу від вектора початкових координат $\tilde{O}^{(1)}$ до векторів $\tilde{O}^{(2)}, \tilde{O}^{(3)}$ і т.д., кожен раз, заново обчислюючи редукційні поправки у вимірах. Алгоритм обчислення координат побудуємо на застосуванні методів нелінійного програмування.

Припустимо, що для визначення координат пунктів виконані геодезичні вимірювання $\grave{O}_{з}$. Виражаючи результати вимірювань через параметри $\tilde{o}_i$, у вигляді функцій

$$T_i = \phi_i(x_1, x_2, ..., x_t), i = \overline{1, k}, \quad (1)$$

отримаємо систему в загальному випадку нелінійних рівнянь

$\varphi_1(x_1, x_2, ..., \tilde{o}_t) - T_1 = 0,$

………………………..

$\varphi_k(x_1, x_2, ..., \tilde{o}_t) - T_k = 0,$

яку запишемо векторній формі

$$\phi(X) - T = 0. \quad (2)$$

В фундаментальному параметричному рівнянні зв'язку (2) в якості невідомих приймемо координати пунктів, які визначаються. В залежності від числа невідомих *t* і кількості вимірювань *К* можуть виникнути різні ситуації:

- в деяких випадках можливі однозначні розв'язки при *К* < *t*, якщо довизначити систему (2) умовами, які пов'язують невідомі *X* математичними співвідношеннями;

- если *К* = *t*, то система (2) є сумісною;

- при *К* > *t* в результаті неизбежных похибок вимірювань та погрішностей математичної модели, пов'язаної з визначенням виду функції $\varphi(X)$, отримаємо перевизначену несумісну систему нелінійних рівнянь, яка не задовольняє жодному вектору невідомих *X*.

В усіх перерахованих випадках можливо застосувати методи нелінійного програмування, коли визначається вектор $\hat{\tilde{O}}$, який відповідає мінімуму цільової функції:

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{k} c_i \left|L_i(X)\right|, \quad (3)$$

де

$$L(X) = \phi(X) - T, \quad (4)$$

c_i — нормуючи множники, які обчислюються за формулою:

$$c_i = (S_{сер} \left\|\nabla \phi_i(X)\right\|)^{-1}, \quad (5)$$

де $S_{сер}$ – середня або відома(виміряна) відстань між пунктами геодезичної мережі.

Коефіцієнты c_i призначені для прискорення процессу мінімізації крітеріальної функції та для збільшості області збіжності ітерацій.

Теоретичне обґрунтування доцільності застосування методу найменших модулів для фільтрації грубих помилок вимірів дано в багатьох роботах, що дозволяє використовувати цільову функцію (3) на першому етапі математичної обробки - попередніх обчисленнях. На цьому етапі також можна застосовувати різні спрощені методи мінімізації , використовуючи різноманітні перетворення критеріальної функції для прискорення збіжності ітерацій. З цією ж метою можливе застосування спрощеної математичної моделі. Наприклад, при обробці геодезичних мереж на поверхні еліпсоїда доцільно первинне рішення отримувати на сфері, замінюючи функції в (1) на простіші.

При вирішенні будь-яких систем нелінійних рівнянь потрібно шукати відповідь на три основні питання:

- вибір алгоритму при мінімізації цільової функції з великим числом невідомих;

- вибір початкових значень невідомих з тим, щоб вони потрапили в область збіжності до глобального мінімуму ;

- локалізація впливу на результати грубих помилок інформації.

При обробці геодезичних мереж можливе вирішення цих питань наступним шляхом. Систему рівнянь (4) пропонується вирішувати за групами невідомих, розбиваючи будь-яку за складністю геодезичну мережу на окремі багаторазові або одноразові зарубки, застосовуючи метод послідовної вставки пунктів. Це призводить до необхідності вирішення частинних систем (4) при числі невідомих не більше шести (до трьох визначених без контролю пунктів). Так як вирішуватимуться системи з малим числом невідомих X , то для мінімізації функції (3) можна застосовувати трудомісткі в обчислюваному відношенні, але зручні для програмування методи мінімізації, яким притаманна велика область збіжності ітерацій. У результаті в більшості випадків можливе обчислення початкових компонент вектора X , як середнього арифметичного з координат оточуючих пунктів. Отже , начальні координати визначаються пунктів можна не ставити у вихідній інформації, а мати лише відомості про $S_{скр}$ для всієї геодезичної мережі.

Надалі шукають не грубі помилки вимірювань, а грубі промахи в вихідної інформації, що виникають при її наборі або в процесі вимірювань при невірному ототожненні назв навколишніх пунктів. Якщо мінімум цільової функції знайдений, то перевіряється виконання нерівності.

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \left| L_i(\hat{X}) \right| \leq 3 \cdot \sum_{i=1}^{k} c_i \sigma_i, \tag{6}$$

де σ_i - стандарт вимірювання .

Дана нерівність використовується тільки після введення в вектор T редукційних поправок. Якщо ця нерівність не виконується, а K- t = 1 , то отримані координати не запам'ятовуються. Якщо число надлишкових вимірів K- t = 2, то при недотриманні нерівності (6) грубі промахи визначаються методом послідовного виключення одного рівняння (4) з розв'язуваної системи з черговою мінімізацією функції (3). Якщо K- t> 2, то у всіх можливих комбінаціях виключаються по два рівняння. Мета таких обчислень - вирішити систему (4) при K- t> 1 з дотриманням нерівності (6) і запам'ятати координати, отримані з контролем.

Щоб поставити заслін на вплив грубих промахів в інформації на результати обчислень , у виробничих програмах слід передбачити важливе обмеження: не обробляти безконтрольні зарубки , якщо в них існує хоча б один зв'язок з безконтрольним пунктом. Це призводить до необхідності циклічної обробки геодезичної мережі.

Висновки.

Обраний метод значно розширює можливості програм по обробці різноманітних геодезичних побудов. Досягається це тим, що знайдено спільний підхід до вирішення завдання, що не залежить від виду нелінійних рівнянь (4), способу визначення пункту (тобто допускається будь-яка можлива комбінація виміряних величин), розмірності простору та виду поверхні, на якій проводяться обчислення. Тут раціонально використовуються надлишкові результати вимірювань для виявлення грубих промахів в інформації та забезпечення високої точності попередніх координат пунктів, які визначаються. Тільки в рідкісних випадках, наприклад, при обробці трилатерації або зарубок, що володіють двоїстим рішенням, потрібно задавати інформацію про початкові координатах визначаються пунктів.

Список використаних джерел

1. Мицкевич В.И., Скорик О.Г., Ялтыхов В.В. Поиск оптимальных весов результатов измерений в условиях многокритериальной оптимизации // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования, - 2003. - № 11 -С. 19.
2. Назаренко В.Г. Математическое программирование в уравнительных вычислениях // Инженерная геодезия. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. - Киев. 1968. - Вып. 4. - С. 134 - 139.
3. Назаренко В.Г. О решении задач геодезического уравновешивания методом квадратичного программирования // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. - 1967. - № 3. - С. 21 - 24.
4. Видуев Н.Г., Ковтун Н.Т. Теория оптимизации в инженерной геодезии // Инженерная геодезия. Республиканский межведомственный научно- технический сборник. - Киев. - 1975. Вып. 18. - С. 63-73.
5. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. - 1962, т.Ш. -№3.-С. 701 -709.

6. Маркузе Ю.И. Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей, - М.: Недра. 1972. - 152 с.
7. Мицкевич В.И. Применение нелинейного программирования при обработке результатов геодезических измерений // Тезисы докладов Всесоюзной конференции “Совершенствование построения геодезических сетей”, Новосибирск, - 1979. - с. 90-92.
8. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математикостатистической теории обработки наблюдений. Изд. 2, доп. и испр. - М.: Физматгиз. 1962.-349 с.
9. Мицкевич В.И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования. Новополоцк, из-во ИГУ. 1997. - 64с.
10. Мицкевич В.И., Ялтыхов В.В. Уравнивание и оценка точности геодезических засечек под различными критериями оптимальности решения // Геодезия и картография. - 1994, - № 7. - С. 14 - 16.