УДК 517.983

В. П. Журавльов (Житомир. нац. агроекол. ун-т)

СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

The paper highlights the weak non-linear Fredholm integral equations with degenerated kernel in Banach spaces. The author has obtained necessary condition and sufficient conditions for finding the solutions of such equations. The author also managed to establish the converging iterative procedures for constructing the only possible solution, or at least one of possible solutions.

Рассматриваются слабонелинейные уравнения Фредгольма с вырожденным яром в банаховых пространствах. Получены необходимое условие и достаточные условия существования решений таких уравнений, построены сходящиеся итерационные процедуры для построения единственного решения и хотя бы одного из возможных решений.

Дослідження умов розв'язності та побудова розв'язків слабконелінійних операторних рівнянь

$$(Lz)(t) = f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon) \tag{1}$$

бере свій початок з робіт І. Г. Малкіна [1] і Є. О. Гребенікова, Ю. О. Рябова [2], де розглядалися задачі про побудову періодичних розв'язків слабконелінійних диференціальних систем у скінченновимірному евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$. Цей метод було узагальнено на дослідження умов розв'язності крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь та систем функціонально-диференціальних рівнянь у загальному нетеровому випадку [3, 4].

Подальшим узагальненням задачі (1) став її розгляд у банаховому просторі, тобто скінченновимірний евклідів простір $\mathbf{R}^n$ значень функції розв'язку замінювався на загальний банахів простір. О. А. Бойчук та Є. В. Панасенко [5] досліджували рівняння (1) у випадку, коли L — диференціальний оператор, який діє у банаховому просторі, а А. М. Самойленко та Ю. В. Теплінський [6] досліджували умови існування періодичних розв'язків диференціальних та різницевих рівнянь у банаховому просторі обмежених числових послідовностей.

Суттєвою особливістю цих задач є те, що лінійне породжуюче рівняння $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки при будь-якій правій частині, тобто, за термінологією С. Г. Крейна [7], рівняння $(Lz)(t) = f(t)$ є скрізь розв'язним.

У цій роботі з використанням конструкції узагальнено-обернених операторів L^- у банахових просторах, а також теореми про розв'язність операторних рівнянь з узагальнено-оборотними операторами L розглянуто задачу про умови існування та способи побудови розв'язків слабконелінійних (з узагальнено-оборотною лінійною частиною) інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах.

Постановка задачі. Нехай $z(t)$ — вектор-функція, яка діє з відрізка $\mathcal{I} = [a, b]$ у дійсний банахів простір $\mathbf{B}_1$, $z(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) := \{z(\cdot) \to \mathbf{B}_1, \|z\| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}\}$, $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахів простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій, $\mathbf{C}[0, \varepsilon_0]$ — простір неперервних по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ вектор-функцій.

Розглянемо слабконелінійне операторне інтегральне рівняння Фредгольма з малим параметром ε

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int_a^b N(s)z(s)ds = f(t) + \varepsilon\int_a^b K(t,s)Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds, \tag{2}$$

де

(a_1) оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервні з нормами $|||M||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|M(t)\|_{\mathbf{B}_1} = M_0 < \infty$ та $|||N||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|N(t)\|_{\mathbf{B}_1} = N_0 < \infty$;

(a_2) оператор-функція $K(t,s)$ є визначеною у квадраті $\mathcal{I}\times\mathcal{I}$ і діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$ по кожній змінній, сильно неперервна по t,s з нормою $|||K||| = \sup_{t,s\in\mathcal{I}}\|K(t,s)\|_{\mathbf{B}_1} = K_0 < \infty$;

(a_3) $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ — нелінійна по z обмежена оператор-функція, яка в околі породжуючого розв'язку $\|z-z_0\| \le q$ має сильно неперервну похідну Фреше по z і неперервна за сукупністю змінних z,t,ε; q і ε_0 — досить малі сталі;

(a_4) $Z(0,t,0) = 0$, $Z'_z(0,t,0) = 0$;

(a_5) $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$.

Знайдемо умови існування та алгоритм побудови розв'язку $z = z(t,\varepsilon)$ рівняння (2), який визначений у класі вектор-функцій $z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$, $z(t,\cdot) \in \mathbf{C}[0,\varepsilon_0]$ і перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із породжуючих розв'язків не скрізь розв'язного лінійного породжуючого рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$z_0(t) - M(t)\int_a^b N(s)z_0(s)ds = f(t). \tag{3}$$

Для дослідження рівняння (2) застосуємо методи узагальненого обернення лінійних обмежених операторів у банахових просторах [4, 8–10] та перехід за допомогою методів типу Ляпунова–Шмідта [1–3] від рівняння (2) до операторної системи, для розв'язання якої застосовні збіжні ітераційні процедури, основані на принципі нерухомої точки.

Попередні відомості. Лінійне породжуюче інтегральне рівняння Фредгольма з виродженим ядром (3) у банаховому просторі не є скрізь розв'язним. У [10] встановлено умови узагальненої оборотності [11] інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у банаховому просторі та побудовано узагальнено-обернений оператор L^- до нього.

Добуток $M(t)x$ сильно неперервної оператор-функції $M(t)$ на елемент $x \in \mathbf{B}_1$ є неперервною вектор-функцією [12, с. 141]. Тому оператор L діє з банахового простору $\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ у цей же простір.

Позначимо

$$D = I_{\mathbf{B}_1} - A, \qquad A = \int_a^b N(s)M(s)ds, \quad D\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1. \tag{4}$$

Нехай D — обмежений узагальнено-оборотний оператор. Тоді існують [13] обмежені проектори: $\mathcal{P}_{N(D)}: \mathbf{B}_1 \to N(D)$, який проектує банаховий простір $\mathbf{B}_1$ на нуль-простір $N(D)$ оператора D; $\mathcal{P}_{Y_D}: \mathbf{B}_1 \to Y_D$, який проектує банаховий простір $\mathbf{B}_1$ на підпростір Y_D, ізоморфний нуль-простору $N(D^*)$ спряженого оператора D^* до оператора D, та обмежений узагальнено-обернений оператор D^- [8].

Теорема 1 [10]. *Нехай $D\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ — обмежений узагальнено-оборотний оператор. Тоді інтегральний оператор L є узагальнено-оборотним.*

Для доведення узагальненої оборотності інтегрального оператора побудовано проектори

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds, \quad \mathcal{P}_{N(L)}: \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(L), \tag{5}$$

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds, \quad \mathcal{P}_{Y_L}: \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to Y_L, \tag{6}$$

та доведено, що вони обмежені.

Теорема 2 [10]. *Нехай $D\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ — обмежений узагальнено-оборотний оператор. Тоді оператор*

$$(L^- f)(t) = f(t) + M(t)D^-\int\limits_a^b N(s)f(s)ds \tag{7}$$

є обмеженим узагальнено-оберненим оператором до інтегрального оператора L, де D^- — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора D.

Для доведення теореми перевірено співвідношення $LL^-L = L$, яке визначає узагальнено-обернений оператор [11, с. 138].

Допоміжний результат. Розв'язок лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром. Розглянемо умови існування та вигляд загального розв'язку лінійного породжуючого інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром (3).

Теорема 3. *Нехай $D\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ — обмежений узагальнено-оборотний оператор. Тоді при виконанні умови*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0 \tag{8}$$

і тільки при ній операторне рівняння (3) є розв'язним і має сім'ю розв'язків

$$z_0(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + (L^-f)(t),$$

де $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}$ — оператор-функція, яка є розв'язком відповідного (3) однорідного інтегрального рівняння, $\hat{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, L^- — узагальнено-обернений оператор (7) до інтегрального оператора L.

Доведення. Оскільки оператор $D\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ є узагальнено-оборотним, то за теоремою 1 інтегральний оператор L теж є узагальнено-оборотним, а тому нуль-простір $N(L)$ і образ $R(L)$ доповнювальні у банаховому просторі $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$. Тоді загальний розв'язок рівняння (3) є прямою сумою $z_0(t) = \tilde{z}(t) + \bar{z}(t)$, де $\tilde{z}(t)$ — загальний розв'язок відповідного (3) однорідного рівняння $(Lz)(t) = 0$, а $\bar{z}(t)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3).

З означення проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ на нуль-простір $N(L)$ оператора L (5) маємо, що загальний розв'язок відповідного (3) однорідного рівняння має вигляд

$$\hat{z}(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \int\limits_a^b N(s)\hat{z}ds = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c}, \tag{9}$$

де $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ і $\hat{c} = \int_a^b N(s)\hat{z}ds$ — відповідно довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Оскільки оператор L є узагальнено-оборотним, то лінійне операторне рівняння (3) є нормально розв'язним. Для його розв'язності необхідно і достатньо [7], щоб елемент $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ належав образу $R(L)$ оператора L. З доповнювальності образу $R(L)$ та означення проектора $\mathcal{P}_{Y_L}$ (6) маємо $R(L) = N(\mathcal{P}_{Y_L})$. Таким чином, умова (8) гарантує належність елемента $f(t)$ образу $R(L)$ оператора L.

При виконанні умови (8) частинний розв'язок $\bar{z}(t)$ неоднорідного рівняння (3) знаходиться за формулою

$$\bar{z}(t) = (L^- f)(t) = f(t) + M(t)D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds,$$

оскільки за теоремою 2

$$(L^- f)(t) = f(t) + M(t)D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds$$

— узагальнено-обернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром.

Таким чином, загальний розв'язок інтегрального рівняння (3) має вигляд

$$z_0(t, \hat{c}) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + f(t) + M(t)D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds. \tag{10}$$

Підставивши розв'язок (10) у (3), отримаємо

$$(Lz_0(\cdot, \hat{c}))(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + f(t) + M(t)D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds -$$

$$-M(t) \int\limits_a^b N(s) \left\{ M(s)\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + f(s) + M(s)D^- \int\limits_a^b N(\tau)f(\tau)d\tau \right\} ds.$$

Оскільки $D = I_{\mathbf{B}_1} - A$, $DD^- = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{Y_D}$, то з урахуванням умови (8) після перетворень отримаємо

$$(Lz_0(\cdot, \hat{c}))(t) = f(t) - M(t)D^- \int\limits_a^b N(s)f(s)ds = f(t). \tag{11}$$

***Зауваження* 1.** Якщо

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) f(s) ds = 0, \tag{12}$$

то умова (8) буде завжди виконуватись. Тому у подальшому будемо використовувати умову (12).

Основний результат. Необхідна умова існування розв'язків слабконелінійного рівняння Фредгольма з виродженим ядром. Знайдемо необхідну умову існування розв'язку $z(t, \varepsilon)$ операторного рівняння (2), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із породжуючих розв'язків $z_0(t, \hat{c}) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ (10) рівняння (3).

Ця задача розв'язується за допомогою операторного рівняння

$$F(\hat{c}) = \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b \int_a^b N(s) K(s, \tau) Z(z_0(\tau, \hat{c}), \tau, 0) d\tau ds = 0, \tag{13}$$

яке по аналогії з подібними задачами для скрізь розв'язних диференціальних рівнянь [5] у банахових просторах будемо називати рівнянням для породжуючих елементів.

Зауважимо, що у випадку періодичної крайової задачі у скінченновимірному просторі $\hat{c} \in \mathbf{R}^n$ — векторна стала, яка має фізичний зміст, – це амплітуда коливань породжуючого розв'язку. Тому в класичній періодичній задачі для диференціальних систем рівняння, аналогічне рівнянню (13), називається рівнянням для породжуючих амплітуд [1].

Теорема 4. *Нехай слабконелінійне операторне інтегральне рівняння* (2) *має розв'язок* $z = z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1),\ z(t, \cdot) \in \mathbf{C}[0, \varepsilon_0]$, *який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється в породжуючий розв'язок* (12) *з елементом* $\hat{c} = c_0 \in \mathbf{B}_1$. *Тоді елемент* c_0 *обов'язково повинен бути дійсним коренем рівняння* (13) *для породжуючих елементів.*

Доведення. Нехай рівняння (2) має розв'язки $z(t, \varepsilon)$. Тоді за теоремою 3, розглядаючи праву частину рівняння (2) як неоднорідність та враховуючи (12), записуємо умову його розв'язності у вигляді

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left\{ f(s) + \varepsilon \int_a^b K(s, \tau) Z(z(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau \right\} ds = 0. \tag{14}$$

З урахуванням (12) умова (14) набере вигляду

$$\varepsilon \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b \int_a^b N(s) K(s, \tau) Z(z(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds = 0.$$

При $\varepsilon \neq 0$ повинна виконуватись рівність

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b \int_a^b N(s) K(s, \tau) Z(z(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds = 0. \tag{15}$$

Далі, $z(t, \varepsilon) \to z_0(t, \hat{c})$ при $\varepsilon \to 0$. Враховуючи неперервність оператор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$ за сукупністю змінних $z,\ t,\ \varepsilon$, при переході до границі при $\varepsilon \to 0$ у рівності (15) отримуємо необхідну умову існування розв'язку операторного рівняння (2):

$$F(\hat{c}) = \mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b\int\limits_a^b N(s)K(s,\tau)Z(z_0(\tau,\hat{c}),\tau,0)d\tau ds = 0.$$

Отже, якщо рівняння (13) має розв'язок $\hat{c} = c_0 \in \mathbf{B}_1$, то елемент c_0 визначає той породжуючий розв'язок $z_0(t,c_0)$, якому може відповідати розв'язок $z(t,\varepsilon)$ нелінійного рівняння (2). Якщо ж рівняння (13) не має розв'язків, то і операторне рівняння (2) не має шуканого розв'язку. Мова йде про дійсні розв'язки рівняння (13), оскільки розглядаються дійсні банахові простори. Таким чином, необхідна умова існування розв'язку рівняння (2) задовольняється вибором константи $\hat{c}$ у породжуючому розв'язку (12), як дійсного кореня рівняння для породжуючих елементів (13).

Достатні умови існування розв'язків. Для отримання достатніх умов існування розв'язків інтегрального рівняння Фредгольма (2) у випадку, коли породжуюче операторне рівняння (3) має сім'ю розв'язків (12), виконаємо у рівнянні (2) заміну змінних

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon), \tag{16}$$

де $z_0(t,c_0)$ — породжуючий розв'язок (10) рівняння (3), а елемент $c_0 \in \mathbf{B}_1$ є дійсним коренем рівняння для породжуючих елементів (13). Враховуючи нову змінну, будемо шукати умови існування розв'язку $x(t,\varepsilon): x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$, $x(t,\cdot) \in \mathbf{C}[0,\varepsilon_0]$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в нульовий розв'язок рівняння

$$x(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)x(s)ds = \varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)Z(z_0(s,c_0) + x(t,\varepsilon),s,\varepsilon)ds. \tag{17}$$

Використавши неперервну диференційовність вектор-функції $Z(z,t,\varepsilon)$ по z в околі точки $\varepsilon = 0$, виділимо у вектор-функції $Z(z_0 + x, t, \varepsilon)$ лінійну частину по z і члени нульового порядку по ε. Тоді будемо мати розвинення

$$Z(z_0 + x, t, \varepsilon) = Z(z_0, t, 0) + T(t)x + R(x, t, \varepsilon), \tag{18}$$

де вектор-функція $Z(z_0(t,c_0),t,0)$ належить $\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$, а оператор-функція

$$T(t) = T(t,c_0) = \frac{\partial Z(z,t,0)}{\partial z}|_{z=z_0(t,c_0)}$$

діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервна з нормою $|||T||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|T(t)\|_{\mathbf{B}_1} = T_0 < \infty$.

Нелінійна вектор-функція $R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ задовольняє умови (a_3) та (a_4).

Отже, враховуючи заміну (16), будемо розглядати операторне рівняння

$$x(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)x(s)ds =$$

$$= \varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)\Big\{Z(z_0(s,c_0),s,0) + T(s)x(s,\varepsilon) + R(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big\}ds \tag{19}$$

для знаходження відхилення $x(t,\varepsilon)$ від породжуючого розв'язку $z_0(t,c_0)$.

Використовуючи розвинення (18), записуємо умову розв'язності операторного рівняння (19):

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b\int\limits_a^b N(s)K(s,\tau)\Big\{Z(z_0(\tau,c_0),\tau,0)+$$

$$+T(\tau)\Big[M(\tau)\mathcal{P}_{N(D)}c+\bar{x}(\tau,\varepsilon)\Big]+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau ds=0, \tag{20}$$

де c — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, $\bar{x}(t,\varepsilon)$ — частинний, а $x(t,\varepsilon)$ — загальний розв'язок операторного рівняння (19).

Позначимо через

$$B_0=\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b\int\limits_a^b N(s)K(s,\tau)T(\tau)M(\tau)d\tau ds\mathcal{P}_{N(D)}$$

лінійний обмежений оператор, який діє з простору $\mathbf{B}_1$ у підпростір $Y_D\subset\mathbf{B}_1$. Тоді з урахуванням (13) рівняння (20) для визначення елемента c набере вигляду

$$B_0c+\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b\int\limits_a^b N(s)K(s,\tau)\Big[T(\tau)\bar{x}(\tau,\varepsilon)-R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau ds=0. \tag{21}$$

Припустимо, що $B_0:\mathbf{B}_1\to Y_D$ — узагальнено-оборотний оператор. Нехай $\mathcal{P}_{N(B_0)}:\mathbf{B}_1\to$ $\to N(B_0)$ і $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}:Y_D\to Y_{B_0}$ — обмежені проектори, а B_0^- — узагальнено-обернений оператор до оператора B_0.

За теоремою 3, розглядаючи нелінійну оператор-функцію Z як неоднорідність і використовуючи формулу (10), для розв'язку $x(t,\varepsilon)$ отримуємо

$$x(t,\varepsilon)=M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c+\bar{x}(t,\varepsilon).$$

Елемент $c\in\mathbf{B}_1$ визначається з умови (21) розв'язності рівняння (19), а вектор-функція

$$\bar{x}(t,\varepsilon)=\varepsilon\left\{\int\limits_a^b K(t,\tau)\Big[Z(z_0(\tau,c_0),\tau,0)+T(\tau)x(\tau,\varepsilon)+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau+\right.$$

$$\left.+M(t)D^-\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\Big[Z(z_0(\tau,c_0),\tau,0)+T(\tau)x(\tau,\varepsilon)+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau ds\right\}$$

— частинний розв'язок рівняння (19).

Таким чином, враховуючи, що c_0 задовольняє рівняння для породжуючих елементів (13), для визначення розв'язку $x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$, $x(t,\cdot)\in\mathbf{C}[0,\varepsilon_0]$, $x(t,0)=0$ від рівняння (19) приходимо до еквівалентної операторної системи

$$x(t,\varepsilon)=M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c+\bar{x}(t,\varepsilon),$$

$$B_0 c = -\mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b \int\limits_a^b N(s) K(s,\tau) \Big[T(\tau) \bar{x}(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) \Big] d\tau ds = 0, \tag{22}$$

$$\bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon \int\limits_a^b \left[K(t,\tau) + M(t) D^- \int\limits_a^b N(s) K(s,\tau) ds \right] \times$$

$$\times \Big[Z(z_0(\tau,c_0),\tau,0) + T(\tau) x(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) \Big] d\tau.$$

Розв'язність операторної системи (22) залежить від розв'язності її другого рівняння. Оскільки за припущенням оператор B_0 є узагальнено-оборотним, то воно може бути скрізь розв'язним ($\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0$), однозначно розв'язним ($\mathcal{P}_{N(B_0)}) = 0$ або неоднозначно і не скрізь розв'язним ($\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$) [7, с. 7, 8].

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$ та $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$.

Друге операторне рівняння системи (22) має розв'язки тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b \int\limits_a^b N(s) K(s,\tau) \Big[T(\tau) \bar{x}(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) \Big] d\tau ds = 0, \tag{23}$$

яка буде виконуватись завжди, якщо

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_D} = 0. \tag{24}$$

При виконанні умови (23) сім'я розв'язків другого рівняння системи (22) має вигляд

$$c = \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{c} - B_0^{-} \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b \int\limits_a^b N(s) K(s,\tau) \Big[T(\tau) \bar{x}(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) \Big] d\tau ds,$$

де $\hat{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Таким чином, при виконанні умови (24) від системи (22) переходимо до операторної системи

$$x(t,\varepsilon) = M(t) \mathcal{P}_{N(D)} c + \bar{x}(t,\varepsilon),$$

$$c = \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{c} - B_0^{-} \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b \int\limits_a^b N(s) K(s,\tau) \Big[T(\tau) \bar{x}(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) \Big] d\tau ds, \tag{25}$$

$$\bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon \int\limits_a^b \left[K(t,\tau) + M(t) D^- \int\limits_a^b N(s) K(s,\tau) ds \right] \times$$

$$\times \Big[Z(z_0(\tau,c_0),\tau,0) + T(\tau) x(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) \Big] d\tau,$$

де [illegible] овільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Покажемо, що операторна система (25) належить до класу систем, для розв'язку яких застосовний метод простих ітерацій.

Введемо такі позначення:

$y(\cdot,\varepsilon) = \operatorname{col}(x(\cdot,\varepsilon), c, \bar{x}(\cdot,\varepsilon))$ — вектор-стовпець з банахового простору $\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_1 \times \times \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & M(t)\mathcal{P}_{N(D)} & I \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

— клітинно-матричний оператор верхньотрикутного вигляду, де I — тотожний оператор у просторі $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, а оператор K діє на вектор-функцію g за правилом

$$(Kg)(\cdot,\varepsilon) := -B_0^- \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b \int_a^b N(s) K(s,\tau) T(\tau) g(\cdot,\varepsilon) d\tau ds,$$

$$U(y(t,\varepsilon), t, \varepsilon) := \begin{bmatrix} 0 \\ -B_0^- \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b \int_a^b N(s) K(s,\tau) R(x(\tau,\varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds + c^\sharp \\ \varepsilon \int_a^b \left[K(t,\tau) + M(t) D^- \int_a^b N(s) K(s,\tau) ds \right] \times \\ \times \left[Z(z_0(\tau, c_0), \tau, 0) + T(\tau) x(\tau,\varepsilon) + R(x(\tau,\varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \end{bmatrix},$$

де $c^\sharp = \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{c}_0$ — деякий фіксований елемент із нуль-простору $N(B_0)$ оператора B_0. Вектор-функція $U(y, t, \varepsilon)$ задовольняє умови (a_3) та (a_4).

Оператори, які входять до матричного оператора (26), є лінійними, обмеженими за визначенням та як суперпозиції лінійних обмежених операторів.

Використовуючи введені позначення, систему (25) можна записати у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = Wy(\cdot,\varepsilon)(t) + U(y(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon)(t). \tag{27}$$

Операторна система (27) еквівалентна системі

$$Vy(t,\varepsilon) = U(y(\cdot,\varepsilon), \cdot, \varepsilon)(t),$$

де

$$V = I_{\mathbf{B}} - W = \begin{bmatrix} I & -M(t)\mathcal{P}_{N(D)} & -I \\ 0 & I & -K \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Далі необхідно показати, що оператор V має обмежений обернений.

Завдяки структурі матричного оператора V верхньотрикутного вигляду з тотожними операторами на головній діагоналі оператор $V = I_{\mathbf{B}} - W$ завжди має обернений оператор

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} I & M(t)\mathcal{P}_{N(D)} & M(t)\mathcal{P}_{N(D)}K + I \\ 0 & I & K \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Оператор V^{-1} діє на вектор-стовпець $y = \operatorname{col}(x, c, \bar{x})$ за правилом

$$V^{-1}y = \begin{bmatrix} x + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + [M(t)\mathcal{P}_{N(D)}K - I]\bar{x} \\ c - K\bar{x} \\ \bar{x} \end{bmatrix}.$$

Для доведення обмеженості оператора V^{-1} покажемо, що існує стала $k > 0$ така, що виконується нерівність

$$|||V^{-1}y|||_{\mathbf{B}} \leq k\Big\{|||x|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + |||c|||_{\mathbf{B}_1} + |||\bar{x}|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\Big\}.$$

Для цього доведемо обмеженість кожної компоненти вектора $V^{-1}y$ у банаховому просторі $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Оператори $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}$ та K є обмеженими. Позначимо їх норми:

$$|||M(t)\mathcal{P}_{N(D)}|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} = m, \qquad |||K|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} = p.$$

Враховуючи введені позначення, отримуємо

$$|||x + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}K\bar{x} + I\bar{x}|||_{\mathbf{B}} \leq$$

$$\leq |||x|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + |||M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + |||M(t)\mathcal{P}_{N(D)}K\bar{x}|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + |||I\bar{x}|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq$$

$$\leq |||x|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + m|||c|||_{\mathbf{B}_1} + (mp + 1)|||\bar{x}|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)},$$

$$|||c + K\bar{x}|||_{\mathbf{B}} \leq |||c|||_{\mathbf{B}_1} + |||K\bar{x}|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq |||c|||_{\mathbf{B}_1} + p|||\bar{x}|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}.$$

Отже,

$$|||V^{-1}y|||_{\mathbf{B}} \leq |||x|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + (m + 1)|||c|||_{\mathbf{B}_1} + (mp + p + 2)|||\bar{x}|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq$$

$$\leq k\big\{|||x|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + |||c|||_{\mathbf{B}_1} + |||\bar{x}|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\big\},$$

де $k = \max\big\{1, (m + 1), (mp + p + 2)\big\}$. Таким чином, обмеженість оператора V^{-1} доведено.

З урахуванням введених вище позначень запишемо операторну систему (25) у вигляді

$$y = V^{-1}Uy = V^{-1}\widetilde{U}(\varepsilon)y,$$

де $\widetilde{U}(\varepsilon)$ — взагалі кажучи, нелінійний обмежений оператор. Враховуючи обмеженість оператора V^{-1} і обмеженість проміжку $\mathcal{I}$, можна підібрати $\varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ так, що для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon_*$ оператор $V^{-1}\widetilde{U}(\varepsilon)$ буде оператором стиску. Звідси випливає, що операторна система (25) належить до класу систем, для розв'язання яких може бути застосований метод простих ітерацій

$$y = \lim_{k\to\infty} y_k, \qquad y_k = V^{-1}Uy_{k-1}, \quad y_0 = 0,$$

і має єдину нерухому точку, яка буде розв'язком рівняння (2).

Використавши метод простих ітерацій для знаходження розв'язків операторного рівняння (2) у класі вектор-функцій, неперервних по ε, що дорівнюють нулю при $\varepsilon = 0$, побудуємо ітераційний процес.

Перше наближення $\bar{x}_1(t,\varepsilon)$ до $\bar{x}(t,\varepsilon)$ знайдемо як частинний розв'язок операторного рівняння

$$x_1(t) - M(t)\int_a^b N(s)x_1(s)ds = \varepsilon \int_a^b K(t,s)Z(z_0(s,c_0),s,0)ds,$$

який існує завдяки вибору $c_0 \in \mathbf{B}_1$ з рівняння для породжуючих елементів (13). Цей розв'язок можна записати у вигляді

$$\bar{x}_1(t,\varepsilon) = \varepsilon\int_a^b \left[K(t,s) + M(t)D^- \int_a^b N(s)K(s,\tau)ds\right] Z(z_0(s,c_0),s,0)d\tau.$$

Перше наближення $x_1(t,\varepsilon)$ до розв'язку $x(t,\varepsilon)$ операторного рівняння (2) покладемо рівним $\bar{x}_1(t,\varepsilon)$:

$$x_1(t,\varepsilon) = \bar{x}_1(t,\varepsilon).$$

Друге наближення $x_2(t,\varepsilon)$ до шуканого розв'язку $x(t,\varepsilon)$ знаходимо як розв'язок операторного рівняння

$$x_2(t) - M(t)\int_a^b N(s)x_2(s)ds = \varepsilon\int_a^b K(t,s)\Big\{Z(z_0(s,c_0),s,0)+$$

$$+T(s)\Big[M(s)\mathcal{P}_{N(D)}c_1 + \bar{x}_1(s,\varepsilon)\Big] + R(x_1(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big\}ds. \tag{28}$$

Із необхідної та достатньої умови розв'язності рівняння (28)

$$B_0c_1 = -\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b\int_a^b N(s)K(s,\tau)\Big[T(\tau)\bar{x}_1(\tau,\varepsilon) + R(x_1(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau ds \tag{29}$$

знайдемо перше наближення c_1 до c:

$$c_1 = -B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b\int_a^b N(s)K(s,\tau)\Big[T(\tau)\bar{x}_1(\tau,\varepsilon) + R(x_1(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau ds + c^{\natural},$$

де $c^{\natural} = \mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{c}$ — довільний фіксований елемент із нуль-простору $N(B_0)$ оператора B_0.

Необхідна та достатня умова розв'язності відносно c_1 рівняння (29) має вигляд

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b\int_a^b N(s)K(s,\tau)\Big[T(\tau)\bar{x}_1(\tau,\varepsilon)+R(x_1(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau ds=0. \tag{30}$$

Друге наближення $x_2(t,\varepsilon)$ до $x(t,\varepsilon)$ запишеться так:

$$x_2(t,\varepsilon)=M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c_1+\bar{x}_2(t,\varepsilon),$$

де

$$\bar{x}_2(t,\varepsilon)=\varepsilon\int_a^b\left[K(t,\tau)+M(t)D^-\int_a^b N(s)K(s,\tau)ds\right]\Big\{Z(z_0(\tau,c_0),\tau,0)+$$

$$+T(\tau)\Big[M(\tau)\mathcal{P}_{N(D)}c_1+\bar{x}_1(\tau,\varepsilon)\Big]+R(x_1(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau.$$

Третє наближення $\bar{x}_3(t,\varepsilon)$ до частинного розв'язку $\bar{x}(t,\varepsilon)$ визначимо за формулою

$$\bar{x}_3(t,\varepsilon)=\varepsilon\int_a^b\left[K(t,\tau)+M(t)D^-\int_a^b N(s)K(s,\tau)ds\right]\Big\{Z(z_0(\tau,c_0),\tau,0)+$$

$$+T(\tau)\Big[M(\tau)\mathcal{P}_{N(D)}c_2+\bar{x}_2(\tau,\varepsilon)\Big]+R(x_2(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau,$$

як розв'язок операторного рівняння

$$x_3(t)-M(t)\int_a^b N(s)x_3(s)ds=\varepsilon\int_a^b K(t,s)\Big\{Z(z_0(s,c_0),s,0)+$$

$$T(s)\Big[M(s)\mathcal{P}_{N(D)}c_2+\bar{x}_2(s,\varepsilon)\Big]+R(x_2(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big\}ds.$$

Із необхідної та достатньої умови існування розв'язку цього операторного рівняння приходимо до співвідношення

$$B_0c_2=-\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b\int_a^b N(s)K(s,\tau)\Big[T(\tau)\bar{x}_2(\tau,\varepsilon)+R(x_2(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau ds \tag{31}$$

для знаходження другого наближення c_2 до c.

При виконанні критерію розв'язності рівняння (31)

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\Big[T(\tau)\bar{x}_2(\tau,\varepsilon)+R(x_2(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau ds=0 \tag{32}$$

його розв'язок має вигляд

$$c_2=-B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b\int_a^b N(s)K(s,\tau)\Big[T(\tau)\bar{x}_2(\tau,\varepsilon)+R(x_2(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau ds+c^\sharp.$$

Таким чином, якщо $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_D} = 0$, то критерії розв'язності типу (30) та (32) відповідних рівнянь на кожному кроці ітераційного процесу будуть виконані. Продовжуючи ітераційний процес далі, з операторної системи (25) отримуємо схему для знаходження розв'язку $x(t,\varepsilon)$, неперервного по ε і такого, що дорівнює нулю при $\varepsilon = 0$:

$$c_k = -B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b\int\limits_a^b N(s)K(s,\tau)\Big[T(\tau)\bar{x}_k(\tau,\varepsilon) + R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau ds + c^\sharp,$$

$$\bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\int\limits_a^b\left[K(t,\tau) + M(t)D^-\int\limits_a^b N(s)K(s,\tau)ds\right]\Big\{Z(z_0(\tau,c_0),\tau,0)+$$

$$+T(\tau)\Big[M(\tau)\mathcal{P}_{N(D)}c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(\tau,\varepsilon)\Big] + R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau,$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c_k + \bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_0(t,\varepsilon) = \bar{x}_0(t,\varepsilon) \equiv 0, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Не порушуючи загальності можна покласти $\hat{c} = 0$, $c^\sharp = \mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{c} = 0$ і з множини розв'язків другого рівняння операторної системи (22) вибрати один із розв'язків.

Таким чином, для операторного рівняння (2) справедливою є така теорема.

Теорема 5. *Нехай операторне рівняння* (2) *задовольняє умови* (a_1)–(a_5), *оператор* D *є узагальнено-оборотним, а відповідне породжуюче рівняння* (3) *при виконанні умови* (12) *має сім'ю породжуючих розв'язків* (10). *Тоді якщо оператор* $B_0 : \mathbf{B}_1 \to Y_D$ *є узагальнено-оборотним і виконуються умови*

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0, \qquad \mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_D} = 0, \tag{33}$$

то для кожного елемента $c_0 \in \mathbf{B}_1$, *який задовольняє рівняння для породжуючих елементів* (13), *операторне рівняння* (2) *має принаймні один розв'язок* $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0) + x(t,\varepsilon)$, *неперервний по* ε, *який перетворюється в породжуючий розв'язок* $z_0(t,c_0)$ *при* $\varepsilon = 0$. *Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на* $[0,\varepsilon_*] \subset [0,\varepsilon_0]$ *ітераційного процесу*

$$c_k = -B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b\int\limits_a^b N(s)K(s,\tau)\Big[T(\tau)\bar{x}_k(\tau,\varepsilon) + R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau ds,$$

$$\bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\int\limits_a^b\left[K(t,\tau) + M(t)D^-\int\limits_a^b N(s)K(s,\tau)ds\right]\Big\{Z(z_0(\tau,c_0),\tau,0)+$$

$$+T(\tau)\Big[M(\tau)\mathcal{P}_{N(D)}c_k + \bar{x}_k(\tau,\varepsilon)\Big] + R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau, \tag{34}$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c_k + \bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0) + x_k(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$x_0(t,\varepsilon) \equiv \bar{x}_0(t,\varepsilon) \equiv 0.$$

***Зауваження* 2.** Якщо $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$, а $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0$, то друге рівняння системи (22) буде скрізь розв'язним, а оператор B_0 — d-нормальним [7, с. 31] з нульовим коядром або нетеровим $(\operatorname{ind} B_0 = \dim N(B_0))$. Тоді узагальнено-обернений оператор B_0^- буде правим оберненим оператором $(B_0)_r^{-1}$ [8, с. 67], друга умова з (33) буде автоматично виконуватись, а операторне рівняння (2) буде мати принаймні один розв'язок, який знаходиться за допомогою збіжного ітераційного процесу (34), де $B_0^- = (B_0)_r^{-1}$.

***Зауваження* 3.** Якщо $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$, а $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$, то друге рівняння системи (22) буде однозначно розв'язним, а оператор B_0 — n-нормальним [7, с. 27] з нульовим ядром або нетеровим $(\operatorname{ind} B_0 = -\dim Y_{B_0})$. Тоді узагальнено-обернений оператор B_0^- буде лівим оберненим оператором $(B_0)_l^{-1}$ [8, с. 67], і при $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_D} = 0$ операторне рівняння (2) буде мати єдиний розв'язок $(c^{\sharp} = \mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{c} \equiv 0)$, який знаходиться за допомогою збіжного ітераційного процесу (34), в якому $B_0^- = (B_0)_l^{-1}$.

***Зауваження* 4.** Аналогічні методи було застосовано у [5] для побудови розв'язків слабконелінійних крайових задач для скрізь розв'язних звичайних диференціальних рівнянь у банахових просторах у критичних випадках, а у [14] для побудови розв'язків слабконелінійних крайових задач для не скрізь розв'язних систем інтегро-диференціальних рівнянь у просторі $\mathbf{R}^n$.

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
3. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
5. *Бойчук О. А., Панасенко Є. В.* Слабконелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь у критичному випадку в банаховому просторі // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 4. – С. 483–496.
6. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. – 496 с.
7. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
8. *Журавлев В. Ф.* Построение обобщенно обратного оператора к матричному в банаховом пространстве // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2010. – Вип. 21. – С. 61–71.
9. *Журавлев В. Ф.* Критерий разрешимости и представление решений линейных n- (d)-нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 2. – С. 167–182.
10. *Журавльов В. П.* Узагальнене обернення операторів Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах // Нелінійні коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 351–364.
11. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
12. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
13. *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні'07. – 2007. – Вип. 13. – С. 78–116.
14. *Бойчук О. А., Головацька І. А.* Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 314–321.

Одержано 18.11.14