ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 355, № 3, с. 303–305

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ С.М. НИКОЛЬСКОГО НА СЛУЧАЙ НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 1997 г. В. Ф. Журавлев

Представлено академиком С.М. Никольским 15.11.96 г.

Поступило 07.06.95 г.

Фундаментальная работа Ф. Рисса [1], посвященная обращению линейных операторов $L = E - A$ (E – тождественный, а A – вполне непрерывный операторы, действующие в пространстве $C[a, b]$), получила различные дополнения и обобщения. С одной стороны, пространство $C[a, b]$ заменялось более общими функциональными пространствами, а с другой – на оператор $A(L)$ налагались менее ограничительные условия.

Так, Ю. Шаудер [2] перенес теорию Рисса на банаховы пространства и ввел в нее сопряженный оператор. С.М. Никольский [3] показал, что теория Рисса–Шаудера остается в силе, если вместо вполне непрерывности оператора A предполагать, что оператор A^n вполне непрерывен, а в [4] дал необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять оператор L, чтобы эта теория имела место. Этот класс операторов, называемых фредгольмовыми ($\dim N(L) = \dim N(L^*) < \infty$), и описывает теорема, известная как теорема Никольского. Ф.В. Аткинсон [5] обобщил теорему Никольского на случай нётеровых ($\dim N(L) \neq \dim N(L^*)$, $\chi_L < \infty$), а Ф.С. Алиев [6] – на случай замкнутых операторов.

Естественно, что нормально разрешимые операторы ($R(L)$ замкнуто) с конечномерными нуль-пространствами $N(L)$ и $N(L^*)$ составляют довольно узкий класс во множестве нормально разрешимых операторов. Более широким является класс нормально разрешимых операторов, у которых бесконечномерные нуль-пространства (ядра): $\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$. В случае если $L: X \to X$ и $X = R(L) \oplus N(L)$, такие операторы называются приводимо-обратимыми [7]. Если же $L: X \to Y$ и ядро $N(L)$ и образ $R(L)$ дополняемы соответственно в пространствах X и Y, то такие операторы называются топологически нётеровыми, а когда $N(L)$ линейно изоморфно $N(L^*)$ – топологически фредгольмовыми [8].

В гильбертовых пространствах вследствие дополняемости в них замкнутых подпространств классы нормально разрешимых и топологически нётеровых операторов совпадают. Если L – нормально разрешимый оператор с бесконечномерным нуль-пространством $N(L)$, которое линейно изоморфно нуль-пространству $N(L^*)$, то L – топологически фредгольмов оператор.

Пусть $L: H_1 \to H_2$ – линейный ограниченный оператор, действующий из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2.

Теорема 1. *Для линейного ограниченного оператора $L: H_1 \to H_2$ следующие утверждения эквивалентны*:

a1) *оператор L нормально разрешим и $N(L)$ линейно изоморфно $N(L^*)$*;

a2) *оператор L представим в виде*

$$L = B + S, \tag{1}$$

где оператор B имеет ограниченный обратный $B^{-1}: H_2 \to H_1$, а $-B^{-1}S: H_1 \to N(L)$ – ограниченный проектор;

a3) *оператор L представим в виде*

$$L = B + S$$

где оператор B имеет ограниченный обратный $B^{-1}: H_2 \to H_1$, а $-SB^{-1}: H_2 \to N(L^*)$ – ограниченный проектор;

a4) *оператор L представим в виде*

$$L = BQ_1, \tag{2}$$

где оператор B имеет ограниченный обратный $B^{-1}: H_2 \to H_1$, а $Q_1: H_1 \to R(L^*)$ – ограниченный проектор;

a5) *оператор L представим в виде*

$$L = Q_2B, \tag{3}$$

где оператор B имеет ограниченный обратный $B^{-1}: H_2 \to H_1$, а $Q_2: H_2 \to R(L)$ – ограниченный проектор.

Доказательство. a1) $\Rightarrow$ a2). Пусть L – нормально разрешимый оператор и $N(L)$ линейно изоморфно $N(L^*)$. Это значит, что:

(i) подпространства $R(L)$ и $R(L^*)$ замкнуты и пространства H_1 и H_2 представимы в виде прямых сумм

$$H_1 = N(L) \oplus R(L^*), \quad H_2 = N(L^*) \oplus R(L), \tag{4}$$

Институт математики Национальной академии наук Украины, Киев

где $N(L) = P_{N(L)}H_1$, $N(L^*) = P_{N(L^*)}H_2$, а $R(L) = (I_{H_2} - P_{N(L^*)})H_2$, $R(L^*) = (I_{H_1} - P_{N(L)})H_1$, $P_{N(L)}$, $P_{N(L^*)}$ – линейные ограниченные проекторы;

(ii) существует линейный ограниченный обратимый оператор $\bar{P}_{N(L^*)}: H_1 \to H_2$ такой, что

$$\bar{P}_{N(L^*)}N(L) = N(L^*).$$

Докажем, что оператор $L + \bar{P}_{N(L^*)}$ имеет ограниченный обратный. Известно, что оператор $L + \bar{P}_{N(L^*)}$ имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда $N(L + \bar{P}_{N(L^*)}) = \{0\}$ и $R(L + \bar{P}_{N(L^*)}) = H_2$.

Покажем, что $N(L + \bar{P}_{N(L^*)}) = \{0\}$. Пусть существует $x_0 \neq 0$ такое, что

$$(L + \bar{P}_{N(L^*)})x_0 = Lx_0 + \bar{P}_{N(L^*)}x_0 = 0. \tag{5}$$

Из (5) имеем, что

$$Lx_0 \in R(L), \quad \bar{P}_{N(L^*)}x_0 \in N(L^*). \tag{6}$$

Подпространства $R(L)$ и $N(L^*)$ взаимно ортогональны: $R(L) \perp N(L^*)$, откуда следует, что они имеют только один общий элемент – нулевой, т.е. $Lx_0 = 0$, $\bar{P}_{N(L^*)}x_0 = 0$. Таким образом, из $x_0 \in N(L)$ и $x_0 \in N(\bar{P}_{N(L^*)})$ следует, что $x_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $N(L + \bar{P}_{N(L^*)}) = \{0\}$.

Так как для произвольного $x \in H_1$ имеют место равенство (5) и включения (6), то из разложений (4) следует, что $R(L + \bar{P}_{N(L^*)}) = H_2$. Очевидно, что оператор $B^{-1}\bar{P}_{N(L^*)}$ ограничен как суперпозиция ограниченных операторов. Кроме того, из обратимости оператора B и определения оператора $\bar{P}_{N(L^*)}$ следует, что $B^{-1}\bar{P}_{N(L^*)}$ – проектор пространства H_1 на $N(L)$.

Положив $B = L + \bar{P}_{N(L^*)}$, а $S = -P_{N(L^*)}$, получим представление (1) для топологически фредгольмова оператора.

а2) $\Leftrightarrow$ а3). Эквивалентность этих утверждений следует из ограниченной обратимости оператора B, ограниченности оператора $P_{N(L^*)}$ и равенств

$$L = B(I_{H_1} + B^{-1}S) = (I_{H_2} + SB^{-1})B = L. \tag{7}$$

а2) $\Leftrightarrow$ а4) и а3) $\Leftrightarrow$ а5). Из ограниченности проекторов $-B^{-1}S: H_1 \to N(L)$ и $-SB^{-1}: H_2 \to N(L^*)$ следует ограниченность проекторов

$$Q_1 = I_{H_1} + B^{-1}S: H_1 \to H_1 \ominus N(L) = R(L^*),$$

$$Q_2 = I_{H_2} + SB^{-1}: H_2 \to H_2 \ominus N(L) = R(L),$$

а из (7) – представления (2) и (3).

а2) $\Rightarrow$ а1). Пусть $L = B + S$ и существует ограниченный обратный оператор B^{-1} и ограниченный проектор $-B^{-1}S: H_1 \to N(L)$.

Уравнения $Lx = y$ и $B^{-1}Lx = x - B^{-1}Sx = B^{-1}y$ эквивалентны. Рассмотрены однородное уравнение $x - B^{-1}Sx = 0$. Обозначим $P_{N(L)} = -B^{-1}S$. Оператор $P_{N(L)}: H_1 \to H_1$ – ограниченный проектор, так как $P^2_{N(L)} = P_{N(L)}$. Следовательно, $P_{N(L)}$ разбивает пространство в прямую сумму замкнутых подпространств

$$H_1 = N(P_{N(L)}) \oplus R(P_{N(L)}).$$

Но $R(P_{N(L)}) = N(L)$, а $N(P_{N(L)}) = R(I_{H_1} - P_{N(L)})$, т.е.

$$H_1 = N(L) \oplus R(I_{H_1} - P_{N(L)}).$$

Так как оператор B обратим и $L = B(I_{H_1} - P_{N(L)})$, то $R(L) = BR(I_{H_1} - P_{N(L)})$ замкнуто, откуда следует, что оператор L нормально разрешим. Кроме того, $N(L^*) = BN(L)$, т.е. $N(L^*)$ изоморфно $N(L)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. При $\dim R(P_{N(L)}) < \infty$ из теоремы 1 следует теорема С.М. Никольского [4].

Рассмотрим теперь представление произвольного нормально разрешимого оператора $L: H_1 \to H_2$. Если $N(L)$ не изоморфно $N(L^*)$, возможны два случая:

либо $N(L)$ изоморфно $N_1(L^*) \subset N(L^*)$;

либо $N(L) \supset N_1(L)$ изоморфно $N(L^*)$.

Т е о р е м а 2. *Для линейного ограниченного оператора* $L: H_1 \to H_2$ *следующие утверждения эквивалентны:*

а1) *оператор* L *нормально разрешим;*

а2) *оператор* L *представим в виде*

$$L = B + S, \tag{8}$$

где оператор B *имеет ограниченный левый* B_l^{-1}: $H_2 \to H_1$ [*или правый* B_r^{-1}: $H_2 \to H_1$] *обратный, а* $-B_l^{-1}S: H_1 \to N(L)$ [$-B_r^{-1}S: H_1 \to N_1(L) \subseteq N(L)$] – *ограниченный проектор;*

а3) *оператор* L *представим в виде*

$$L = B + S,$$

где оператор B *имеет ограниченный левый* B_l^{-1}: $H_2 \to H_1$ [*или правый* B_r^{-1}: $H_2 \to H_1$] *обратный, а* $-SB_l^{-1}: H_2 \to N_1(L^*) \subseteq N(L^*)$ [$-SB_r^{-1}: H_2 \to N(L^*)$] – *ограниченный проектор;*

а4) *оператор* L *представим в виде*

$$L = BQ_1, \tag{9}$$

где оператор B *имеет ограниченный левый* B_l^{-1}: $H_2 \to H_1$ [*или правый* B_r^{-1}: $H_2 \to H_1$] *обратный, а* $Q_1: H_1 \to H_1 \ominus N(L)$ [$Q_1: H_1 \to H_1 \ominus N_1(L)$] – *ограниченный проектор;*

а5) *оператор* L *представим в виде*

$$L = Q_2B, \tag{10}$$

где оператор B *имеет ограниченный левый* B_l^{-1}: $H_2 \to H_1$ [*или правый* B_r^{-1}: $H_2 \to H_1$] *обратный, а*

Q_2: $H_2 \to R(L) \oplus N_0(L^*)$ [Q_2: $H_2 \to R(L)$] – *ограниченный проектор, где* $N_0(L^*) = N(L^*) \ominus N_1(L^*)$.

Доказательство. a1) $\Rightarrow$ a2). Пусть L – нормально разрешимый оператор. Пусть для определенности $N(L)$ изоморфно $N_1(L^*) \subset N(L^*)$. В этом случае существует линейный ограниченный обратимый оператор $\bar{P}_{N_1(L^*)}$: $H_1 \to H_2$ такой, что

$$\begin{gathered}\bar{P}_{N_1(L^*)}N(L) = N_1(L^*),\\ N(L^*) = N_1(L^*) \oplus N_0(L^*).\end{gathered} \tag{11}$$

Покажем, что оператор $L + \bar{P}_{N_1(L^*)}$ имеет ограниченный левый обратный. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$N(L + \bar{P}_{N_1(L^*)}) = \{0\},$$

$$R(L + \bar{P}_{N_1(L^*)}) \text{ дополняемо в } H_2.$$

Доказательство $N(L + \bar{P}_{N_1(L^*)}) = \{0\}$ аналогично доказательству подобного факта в теореме 1.

Дополняемость образа $R(L + \bar{P}_{N_1(L^*)})$ в H_2 следует из того, что $(L + \bar{P}_{N_1(L^*)})x \in R(L) \oplus N_1(L^*)$ для любого $x \in H_1$ и равенства

$$\begin{aligned}H_2 &= N_0(L^*) \oplus N_1(L^*) \oplus R(L) = \\ &= N_0(L^*) \oplus R(L + \bar{P}_{N_1(L^*)}),\end{aligned}$$

являющегося следствием (4) и (11).

Очевидно, что оператор $B_l^{-1}P_{N_1(L^*)}$ ограничен как суперпозиция ограниченных операторов. Из того, что оператор B_l^{-1} действует на все пространство B_1, и определения оператора $P_{N_1(L^*)}$ следует, что $B_l^{-1}P_{N_1(L^*)}$ – проектор пространства H_1 на $N(L)$.

Положив $B = L + \bar{P}_{N_1(L^*)}$, $S = -P_{N_1(L^*)}$, получим представление (8) для нормально разрешимого оператора.

a2) $\Leftrightarrow$ a3). Эквивалентность этих утверждений следует из существования ограниченного обратного оператора B_l^{-1}, ограниченности оператора $P_{N_0(L^*)}$ и равенств

$$\begin{gathered}Lx = B(I_{H_1} + B_l^{-1}S)x + P_{N_0(L^*)}Sx = \\ = B(I_{H_1} + B_l^{-1}S)x = (I_{H_2} + SB_l^{-1})Bx = y, \\ y \in H_2 \ominus N_0(L^*),\end{gathered} \tag{12}$$

так как $BB_l^{-1} = I_{H_2} - P_{N_0(L^*)}$ и $P_{N_0(L^*)}S = 0$.

a2) $\Leftrightarrow$ a4) и a3) $\Leftrightarrow$ a5). Из ограниченности проекторов $-B_l^{-1}S$: $H_1 \to N(L)$, $-SB_l^{-1}$: $H_2 \to N_1(L^*)$ и $P_{N_0(L^*)}$ следует ограниченность проекторов $Q_1 = I_{H_1} + B_l^{-1}S$: $H_1 \to H_1 \ominus N(L)$ и $Q_2 = I_{H_2} + SB_l^{-1}$: $H_2 \to R(L) \oplus N_0(L^*)$. А из (12) – представления (9) и (10).

a2) $\Rightarrow$ a1). Пусть $L = B + S$ и существует ограниченный левый обратный оператор B_l^{-1} и ограниченный проектор $-B_l^{-1}S$: $H_1 \to N(L)$.

Уравнения $Lx = y$ и $B_l^{-1}Lx = x - B_l^{-1}Sx = B_l^{-1}y$, $y \in H_2 \ominus N(B^*)$ эквивалентны. Рассмотрим однородные уравнения $Lx = 0$ и $x + B_l^{-1}Sx = 0$. Оператор $P_{N(L)} = -B_l^{-1}S$: $H_1 \to H_1$ – ограниченный проектор ($P^2_{N(L)} = P_{N(L)}$). Следовательно, он разбивает пространство H_1 в прямую сумму замкнутых подпространств

$$H_1 = N(P_{N(L)}) \oplus R(P_{N(L)}).$$

Известно, что $R(P_{N(L)}) = N(L)$, а $N(P_{N(L)}) = P(I_{H_1} - P_{N(L)})$, т.е.

$$H_1 = N(L) \oplus R(I_{H_1} - P_{N(L)}).$$

Оператор B: $H_1 \to H_2$ обратим слева. Это значит, что он осуществляет взаимно однозначное соответствие между пространствами H_1 и $H_2 \ominus N(B^*)$. Таким образом, $L = B(I_{H_1} - P_{N(L)})$ и $R(L) = BR(I_{H_1} - P_{N(L)})$ замкнуто. Следовательно, оператор L нормально разрешим.

Теорема доказана.

Замечание 2. Если $\dim R(-SB_l^{-1}) < \infty$ и $\dim R(-B_l^{-1}S) < \infty$ и эти размерности не совпадают, то теорема 2 переходит в теорему Ф.В. Аткинсона [6], которая описывает класс нормально разрешимых операторов, являющихся нётеровыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рисс Ф.* // УМН. 1936. В. 1. С. 175–199.
2. *Schauder J.* // Stud. Math. 1930. № 2. P. 183–196.
3. *Никольский С.М.* // ДАН. Нов. сер. 1936. Т. 2. № 8. С. 309–312.
4. *Никольский С.М.* // Изв. АН СССР. 1943. Т. 7. № 3. С. 147–163.
5. *Аткинсон Ф.В.* // Мат. сб. Нов. сер. 1951. Т. 28. № 1. С. 3–14.
6. *Алиев Ф.С.* // Докл. АН АзССР. 1960. Т. 16. № 1. С. 7–11.
7. *Gustafson K.* // Indiana Univ. Math. J. 1976. V. 25. № 8. P. 769–782.
8. *Абдуллаев А.Р.* В сб.: Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь, 1992. С. 80–87.