

Міністерство освіти України  
Інститут змісту і методів навчання  
Житомирський інженерно-технологічний  
інститут

І.Г. Грабар

**ОСНОВИ  
НАДІЙНОСТІ  
МАШИН**

*Рекомендовано Міністерством освіти України  
як навчальний посібник для студентів вищих закладів  
освіти з напрямку "Інженерна механіка"*



1999

ББК 34.41  
Г75  
УДК 621.192

**Грабар І.Г.** Основи надійності машин:  
Навчальний посібник. – Житомир: ЖГПТ, 1998. – 298 с.  
ISBN 966-7570-15-0.

Розглянуто питання теоретичних та практичних досліджень у сфері забезпечення надійності машин. Матеріал викладено з позицій термоактиваційних уявлень. Це дозволяє ввести узагальнений простір, в якому необхідно вести розрахунки на міцність і надійність – “навантаження – температура – час до руйнування”, а також поєднати моделі фізики та механіки руйнування, збагативши наці уявлення про кінетичні процеси. Наведена велика кількість задач з розв'язками по визначенню показників надійності конкретних деталей, вузлів та агрегатів машин.

Для студентів та аспірантів інженерних спеціальностей вузів. Може бути корисною фахівцям, що створюють нові машини та забезпечують їх надійність.

Рецензенти:

М.І. Бобир – доктор технічних наук, професор;

М.Т. Бакка – доктор технічних наук, професор.

ББК 34.41

ISBN 966-7570-15-0

© Грабар І.Г., 1999

Ідеаліст – людина, що вірить не тільки в ідеали, але й в те, що й інші в них вірять.

**В.САВЧЕНКО. «Посада у Всесвіті»**

## **Передмова.**

На протязі всього ХХ століття зберігається тенденція прискорення науково-технічного прогресу, який стимулює зростання швидкості, потужності, технологічних можливостей машин та обладнання. Це вимагає підвищення показників надійності машин - для зменшення витрат на ремонт від простоїв, безпеки життєдіяльності, зменшення тяжких наслідків від аварій та відмов складних технічних систем. Одночасно якість та надійність машини визначає рентабельність її експлуатації.

Теорія надійності знаходиться на перехресті багатьох наук: теорії ймовірностей, математичної статистики, теоретичної механіки, опору матеріалів, механіки та фізики руйнування, матеріалознавства та інших.

Головна задача теорії надійності – вивчення закономірностей виникнення відмов та на базі результатів випробовувань розробка заходів по забезпеченню безвідмовної роботи технічної системи.

Висока надійність машини повинна закладатись на стадії проектування, реалізовуватись при виготовленні та підтримуватись під час експлуатації.

Але на стадії проектування неможливо забезпечити абсолютно міцну конструкцію. Абсолютна ймовірність

неруйнування конструкції в умовах експлуатації не піддається експериментальному визначенню. Так, для забезпечення ймовірності неруйнування на рівні 90% вірогідності необхідна кількість зразків, що визначається за формулою  $N=5/P$ , де  $P$  – ймовірність руйнування. Тоді для забезпечення  $P=0,001$  необхідно випробувати 5000 зразків !

В даному посібнику вперше в вітчизняній технічній літературі стільки уваги приділено розробці термоактиваційних підходів в теорії надійності. На глибоке переконання автора, в період до 2010...2020 року якраз термоактиваційні уявлення та моделі разом з синергетикою та потужним розвитком комп'ютерного моделювання дозволять звести науки про міцність та надійність машин від розрізаних напівемпіричних ізольованих островків до єдиної стрункої теорії.

Автор намагався викласти матеріал в формі, зручній для практичного користування - модулями, що мало залежать один від одного. Матеріал наведено в такій послідовності: основні положення та визначення теорії надійності, випадкові величини, елементи схемної надійності, методи термоактиваційного аналізу в теорії надійності, забезпечення надійності в умовах корозії, зношування, втоми та за наявності тріщин. Останній, дев'ятий розділ, присвячено експлуатаційній надійності вузлів та машин. Практично до всіх розділів наведено задачі з розв'язками.

Докт.техн.наук, професор Бобир М.І. та докт. техн. наук, професор Бакка М.Т. взяли на себе турботи рецензентів, за що автор висловлює їм щирю вдячність.

Висловлюю подяку також моїм аспірантам В.Запольському та О.Лисогору за допомогу в наборі та правці рукопису.



# 1. Вступ до надійності . Основні поняття, визначення та характеристики.

## 1.1. Вступ до надійності.

Всі елементи неживої природи мають одну спільну особливість - це збільшення ентропії за деякий, свій для кожного елемента, характерний час. Розглянемо три елементи: склянка кип'ятку, тільки що збудований відрізок дороги з твердим покриттям та рукотворну гору - наприклад, терикон правильної конічної форми з правильною гострою вершиною біля залишеної шахти. Ріст ентропії в цих системах буде характеризуватись збільшенням безпорядку.

Таблиця 1.1.

Стан	Напрямок кінетика	Характерний час
Склянка кип'ятку	Зниження температури до темпер. навколишнього середовища	~0,5 годин
Нова дорога з твердим покриттям	З'являються вибоїни та макро нерівності	кілька років
Стрімка рукотворна гора з гострою вершиною	Стає нижчою з округлою вершиною	кілька десятиліть

Під дією часу, сил, температур, вологи, повітря, полів, променів тощо всі елементи неживої природи мають рухатись в одному напрямку - від порядку до хаосу.

Правда, за останні 15-20 років розвилась міждисциплінарна наука - синергетика - яка показує можливість і зворотного руху: від хаосу до порядку. Але обов'язкові умови такого руху - система повинна бути далекою від стану рівноваги, стохастична, нелінійна та

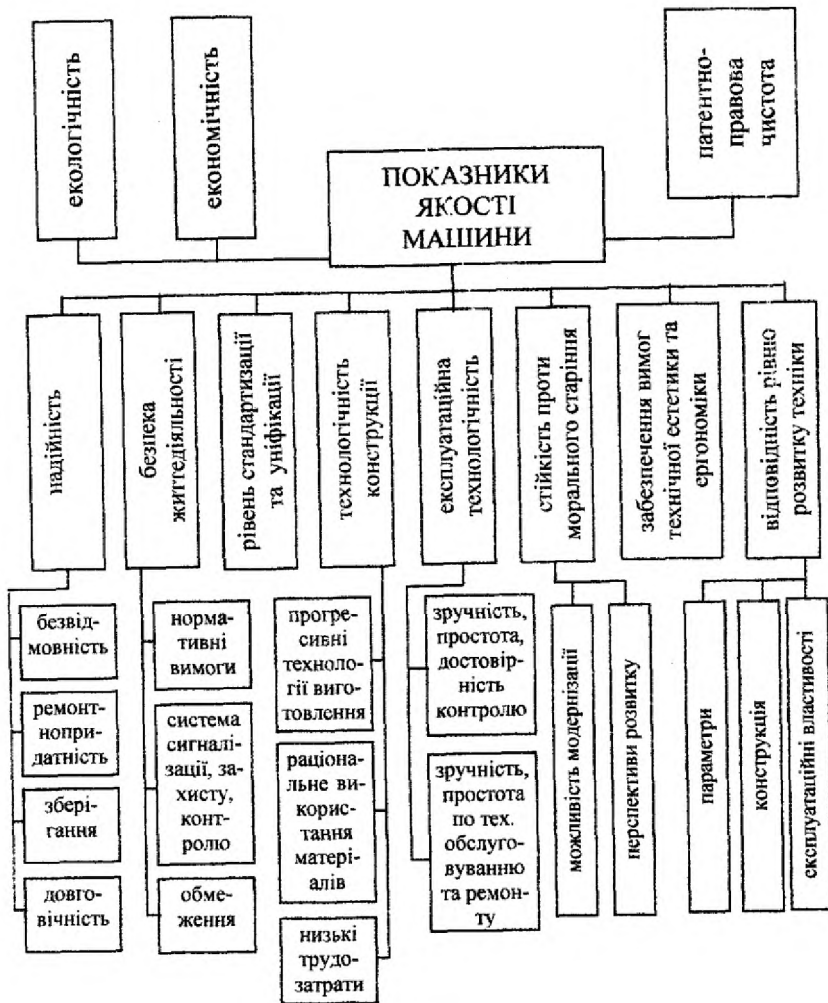
мати обмін з зовнішнім середовищем ентропією, енергією чи масою. Такі системи самоорганізуються, тобто зменшують ентропію.

Легко бачити, що найкраще умовам самоорганізації відповідають системи живої природи - живі організми - від одноклітинних до ссавців та людини. До речі, порушення будь-якої з умов синергетичності в живій системі призводить до її загибелі, тобто переходу в стан неживих з подальшим ростом ентропії.

Під дією часу, температури та зовнішніх факторів деталь, механізм, машина, як елементи неживої природи, також рухаються в напрямку збільшення ентропії (зношування, втома, корозія) і через деякий час перестають виконувати необхідні функції в заданих умовах.

Як показує досвід, розвиток технологічних, транспортних, будівельних, інформаційних машин та систем йде по шляху постійного ускладнення (збільшення кількості елементів, ускладнення їх ієрархії та характеру міжелементної взаємодії). Крім цього, постійне підвищення вимог до швидкості та продуктивності привело до зростання енергонасиченості сучасних машин, їх роботи в екстремальних умовах, в широких діапазонах температурно-силових та динамічних параметрів. Все це привело до підвищення вимог до забезпечення надійності сучасних машин.

Задача даного курсу - вивчення методів оцінки надійності технічних систем за заданими показниками надійності та довговічності. Під забезпеченням надійності машини будемо розуміти сукупність організаційних, технічних та наукових заходів, вимог та правил, яких потрібно дотримуватись на всіх стадіях існування об'єкта, включаючи його проектування, виготовлення та експлуатацію.



**Рис.1.1.**

Надійність машини - це, як видно із рис. 1.1., лише одна із характеристик якості. Але з рештою показників якості показники надійності дуже тісно переплітаються.

## 1.2. Визначення показників надійності.

Сукупність властивостей, які характеризують корисні функції системи, будемо називати її якістю. Основне призначення технічного прогресу - це розробка і створення систем із зростаючими показниками якості.

Свою якість технічна система має зберігати протягом всього часу, починаючи з виготовлення і до закінчення експлуатації. Умови експлуатації реальної системи можуть істотно відрізнятись від проектних, що може приводити до зміни параметрів функціонування машини, що в свою чергу не дозволить забезпечити необхідний рівень якості. Втрата якості може бути частковою чи повною - від ледь помітних відхилень параметрів до катастрофічних руйнувань, пов'язаних як з матеріальними збитками, так і людськими жертвами.

Як слідує із *рис. 1.1.* - одна із головних властивостей якості машини - її надійність. Дамо таке визначення надійності.

Надійність - це властивість об'єкта зберігати у визначених межах значення всіх параметрів, які характеризують здатність виконувати потрібні функції в заданих режимах та умовах застосування і технічного обслуговування.

Надійність є складною властивістю, яка включає:

- безвідмовність;
- довговічність;
- ремонтпридатність;
- збереженість.

Причому, в різних випадках складові надійності мають різне значення. Наприклад, для об'єктів, що не ремонтуються (електричні лампочки, конденсатори, інтегральні схеми) визначальна роль належить безвідмовності, а для об'єктів, що підлягають ремонту, визначальною може бути ремонтпридатність.

До параметрів, які характеризують здатність виконувати потрібні (експлуатаційні) функції технічної системи, належать:

- кінематичні параметри;
- динамічні параметри;
- параметри точності;
- продуктивність;
- швидкість;
- витрати енергії тощо.

З плином часу значення цих параметрів можуть змінюватись. Тоді об'єкт переходить в непрацездатний граничний стан. Дамо ще одне визначення надійності.

Надійність - це властивість об'єкта зберігати в часі в заданих діапазонах значення всіх параметрів, що характеризують здатність виконувати необхідні функції в заданих режимах та умовах використання, технічного обслуговування, ремонту, зберігання та транспортування.

В теорії надійності будемо розглядати такі **об'єкти** :

01 - **вироб**- одиниця промислової продукції, кількість якої можна визначити в штуках (екземплярах). До виробів можна відносити завершені та незавершені предмети виробництва, в тому числі заготовки (підшипник, станок, автомобіль, праска тощо);

02 - **елемент** - складова частина виробу;

03 - **система** - сукупність спільно діючих елементів, призначених для самостійного виконання заданих функцій.

Поняття "елемент" та "система" можуть трансформуватись, в залежності від ієрархії задачі.

Розглянемо такі системи та їх елементи:

**Підшипник** є {зовнішнє кільце; внутрішнє кільце; сепаратор; тіла кочення}

**Стартер** є {підшипники; статор; ротор; колектор зі щітками}

**Двигун автомобіля** є {стартер; генератор; кривошипно-шатунний механізм; система запалювання; циліндро-поршнєва група; система живлення; система охолодження}

**Автомобіль** є {двигун; кузов; коробка передач; гальма; рульове керування; мости}

Формалізуємо цей приклад :

**Таблиця 1.2.**

Рівень	Множина	Система	Елементи системи
I	$S \in \{I_1; I_2; \dots; I_n\}$	S	$I_n$
II	$N \in \{S_1(I_1); S_2(I_1); \dots; S_m(I_k)\}$	N	$S_m$
III	$M \in \{N_1[S_a(I_1)]; N_2[S_a(I_1)]; \dots; N_R[S_v(I_k)]\}$	M	$N_R$
...	...	...	...

При вивченні надійності на I рівні підшипник виступає як система, на II рівні - як елемент системи стартера, на III - як піделемент елемента "стартер" системи "двигун" і т.д.

Вироби діляться на відновлювані (станок, автомобіль, телевізор) та невідновлювані (інтегральна схема, підшипник, електрична лампочка).

В залежності від типу об'єкту, його надійність може характеризуватись тільки частиною властивостей надійності. Наприклад, якщо виріб невідновлюваний, то у

властивості надійності не включають довговічність та ремонтпридатність. Для нього важливо тільки збереження та безвідмовність. Для виробів, що довго зберігаються, найважливішою є властивість збереження.

Безвідмовність - властивість об'єкта безперервно зберігати працездатний стан на протязі заданого часу чи напрацювання.

Довговічність - властивість об'єкта зберігати працездатний стан до настання граничного стану (при заданій системі технічного обслуговування та ремонту).

На відміну від безвідмовності довговічність характеризує працездатність за сумарним напрацюванням, з перервами для відновлення працездатності при технічних обслуговуваннях та ремонтах (як планових, так і непланових).

Ремонтпридатність - властивість об'єкта в його пристосуванні до підтримки та відновлення працездатного стану проведеннями технічних обслуговувань та ремонтами (визначається компоновкою об'єкта).

Збереженість - властивість об'єкта зберігати значення параметрів в заданих діапазонах, які дозволяють об'єктові виконувати задані функції на протязі терміну збереження та ( чи ) транспортування.

З точки зору теорії надійності об'єкт може знаходитись в одному з п'яти станів :

- налагоджений стан ;
- неналагоджений (зіпсований) стан ;
- працездатний стан ;
- непрацездатний стан ;
- граничний стан.

Налагоджений стан - стан об'єкта, коли він відповідає всім вимогам нормативно-технічної та (чи) конструкторської ( проектної ) документації.

Неналагоджений (зіпсований ) стан - стан об'єкта, при якому він не задовольняє хоча б одній вимозі нормативно-технічної та (чи) конструкторської (проектної) документації.

Працездатний стан - стан об'єкта, при якому значення всіх параметрів, що характеризують здатність його виконувати задані функції, відповідають вимогам нормативно-технічної та (чи) конструкторської (проектної) документації.

Непрацездатний стан - стан об'єкта, при якому значення хоча б одного параметра, що характеризує здатність об'єкта виконувати задані функції, не відповідає вимогам нормативно-технічної та (чи) конструкторської (проектної) документації.

Граничний стан - стан об'єкта, при якому його подальше застосування за призначенням неприпустимо чи нераціонально, або відновлення його працездатності неможливо чи нераціонально. Граничний стан настає після вичерпання ресурсу або в результаті аварії.

Відмова - це подія, в результаті якої порушується працездатний стан об'єкта.

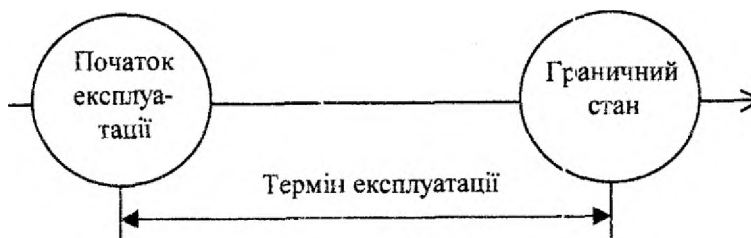


**Рис.1.2**

Для кількісної оцінки кожної із властивостей надійності використовують такі показники:

- Напрацювання (тривалість роботи об'єкта);
- Ресурс (сумарне напрацювання об'єкта від початку експлуатації (чи після ремонту) до граничного стану);





**Рис.1.3**

- Термін експлуатації (календарний час від початку експлуатації (чи після ремонту) до граничного стану)
- Термін збереження (календарний час збереження та (і) транспортування об'єкта в заданих умовах, на прозві яких та після яких зберігається налагоджений стан а показники безвідмовності, довговічності а ремонтпридатності в діапазонах заданих норматив-технічною документацією на даний об'єкт).

Кількісні значення цих величин отримують даними випробовувань чи експлуатації.

### 1.3. Оцінки показників надійності.

Для кількісної оцінки надійності використовують показники надійності. Згідно *рис.1.4.*, їх можна розділит на три групи:

- за способом отримання;
- за областю використання;
- за областю поширення.

Розглянемо, якими кількісними характеристиками можна оцінити такі властивості надійності, як безвідмовність, довговічність, збереженість та ремонтпридатність.

### 1.3.1. Показники безвідмовності.

Ймовірність безвідмовної роботи - це ймовірність того, що в період заданого напрацювання не виникне відмови:

$$P(t) = \frac{N_n}{N} = 1 - \frac{n(t)}{N}, \quad (1.1)$$

де  $N$  - число виробів, поставлених на випробування чи експлуатацію;  $N_n$  - число працездатних виробів на кінець часу  $t$  випробувань чи експлуатації;  $n(t)$  - число виробів, в яких настали відмови за час  $t$  випробувань чи експлуатації. Тоді ймовірність відмови

$$Q(t) = 1 - P(t) = 1 - \frac{n(t)}{N} \quad (1.2)$$

Розподіл відмов в часі будемо характеризувати густиною розподілу  $f(t)$  напрацювань до відмови:

$$f(t) = \frac{\Delta n(t)}{N \cdot \Delta t} \quad (1.3)$$

Або, після граничного переходу:

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt}. \quad (1.4)$$

Звідки ймовірність відмови:

$$Q(t) = \int_0^t f(t) dt \quad (1.5)$$

а ймовірність безвідмовної роботи

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - \int_0^t f(t) dt = \int_0^{\infty} f(t) dt - \int_0^t f(t) dt = \int_t^{\infty} f(t) dt \quad (1.6)$$



Рис 1.4

Інтенсивність відмов визначимо, як відношення приросту відмов за приріст проміжку часу до числа напрацьованих виробів:

$$\lambda(t) = \frac{\Delta n(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{N_f} = \frac{\Delta n(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{NP(t)} = \frac{f(t)}{P(t)}. \quad (1.7)$$

Звідки

$$P(t) = \frac{F(t)}{\lambda(t)} = \frac{dQ(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\lambda(t)}. \quad (1.8)$$

Так як  $Q(t) = 1 - P(t)$ , то  $d[1 - P(t)] = -dP(t)$ . Тоді:

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = -\lambda(t) dt. \quad (1.9)$$

Інтегрування дозволяє отримати одне із центральних рівнянь теорії надійності:

$$\lg P(t) = -\int_0^t \lambda(t) dt, \quad (1.10)$$

або

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}. \quad (1.11)$$

В подальшому для великої кількості задач можна буде користуватись наближенням постійної інтенсивності відмов  $\lambda(t) \approx \lambda = \text{const}$ .

Тоді:

$$P(t) \approx e^{-\lambda t}. \quad (1.12)$$

Середнє напрацювання на відмову визначимо як сумарне напрацювання за заданий період випробовувань чи експлуатації об'єктів до сумарного числа відмов за цей же період:

$$T_{HB} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (1.13)$$

### 1.3.2. Показники довговічності та збереження.

Під середнім ресурсом будемо розуміти математичне сподівання ресурсу:

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^N T_{p_i}}{N}, \quad (1.14)$$

де  $T_{p_i}$  - ресурс  $i$ -го об'єкта,  $N$  - загальне число об'єктів, поставлених на випробовування чи експлуатацію.

Гама-процентний ресурс - це напрацювання, на протязі якого об'єкт не досягає граничного стану з заданою ймовірністю  $\gamma$ , вираженою в процентах:

$$P(T_{D\gamma}) = \int_{T_{D\gamma}}^{\infty} P(T_{D\gamma}) dT_{D\gamma} = \frac{\gamma}{100}. \quad (1.15)$$

В практичних задачах використовують 80%, 90%, 95% та інші ресурси. Якщо відмова елемента впливає на життєдіяльність людей, то гама-ресурсзначається близьким до 100%. Перевага гама-ресурсу - це можливість його визначення до завершення випробувань партії зразків чи виробів.

Призначений ресурс - це сумарне напрацювання, при досягненні якого використання об'єкта за призначенням повинно бути припинено незалежно від його технічного стану.

Встановлений ресурс - це технічно обгрунтований чи заданий ресурс, забезпечений конструкцією, технологією та експлуатацією, по відпрацюванні якого не досягається граничний стан об'єкта.

В повній відповідності з (1.14) визначається середній термін експлуатації  $T_e$  та середній термін збереження  $T_z$ .

Аналогічно (1.15), визначається гама-процентний термін експлуатації  $P(T_{e\gamma})$  та гама-процентний термін збереження  $P(T_{z\gamma})$ .

Призначений термін експлуатації - це календарний термін, при досягненні якого використання об'єкта за призначенням повинно бути припинено незалежно від його технічного стану.

Призначений термін збереження - це календарний термін збереження в заданих умовах, при досягненні якого використання об'єкта за призначенням не допускається незалежно від його технічного стану.

### 1.3.3. Показники ремонтпридатності.

Середній час відновлення - це математичне сподівання часу відновлення об'єкта:

$$T_B = \frac{\sum_{k=1}^m T_{Bk}}{m}, \quad (1.16)$$

де  $T_{Bk}$  - час відновлення  $k$ -ої відмови об'єкта,  $m$  - число відмов об'єкта за заданий термін випробувань чи експлуатації.

Ймовірність відновлення працездатного стану - це ймовірність того, що об'єкт буде відновлено в заданий час  $t_B$ . Для більшості виробів машинобудування

$$P_B(t) \cong e^{-\lambda t_B}, \quad (1.17)$$

де  $\lambda$  - інтенсивність відмов ( $\lambda \cong const$ ).

Коефіцієнтом готовності назвемо відношення

$$K_G = \frac{T_{HB}}{T_{HB} + T_B}, \quad (1.18)$$

де  $T_{HB}$  - середнє напрацювання на відмову (1.13),  $T_B$  - середній час відновлення (1.16).

Коефіцієнт технічного використання:

$$K_{TB} = \frac{T_{HB}}{T_{HB} + \tau_{TO} + \tau_D + \tau_B}, \quad (1.19)$$

де  $\tau_{TO}$  - термін технічного обслуговування;

$\tau_p$  - термін планових ремонтів;

$\tau_b$  - термін непланових відновлень за заданий термін експлуатації.

Коефіцієнт оперативної готовності - це ймовірність того, що об'єкт буде працездатним в довільний проміжок часу, крім непередбачених для експлуатації періодів, і буде працювати безвідмовно на протязі заданого часу:

$$K_{ог} = K_r \cdot P(t_0, t_1)$$

де  $P(t_0, t_1)$  - ймовірність безвідмовної роботи об'єкта в інтервалі  $(t_0, t_1)$ .

#### 1.4. Класифікація відмов.

Кількісні показники надійності тісно пов'язані з явищем відмов.

Відмови - це, як правило, руйнування чи втрата несучої здатності окремих елементів технічної системи при її експлуатації або зміна параметрів вище граничних значень.

Випадкові відмови можуть бути викликані непередбаченими, прихованими дефектами, помилками оператора, наїздами на перешкоди, помилками в монтажі, відхиленнями розмірів і т.д.

Систематичні відмови виникають в результаті поступового накопичення пошкоджень в результаті втоми, корозії, зношування, дії часу, навантаження, температури, радіації, електромагнітних полів, агресивних середовищ тощо.

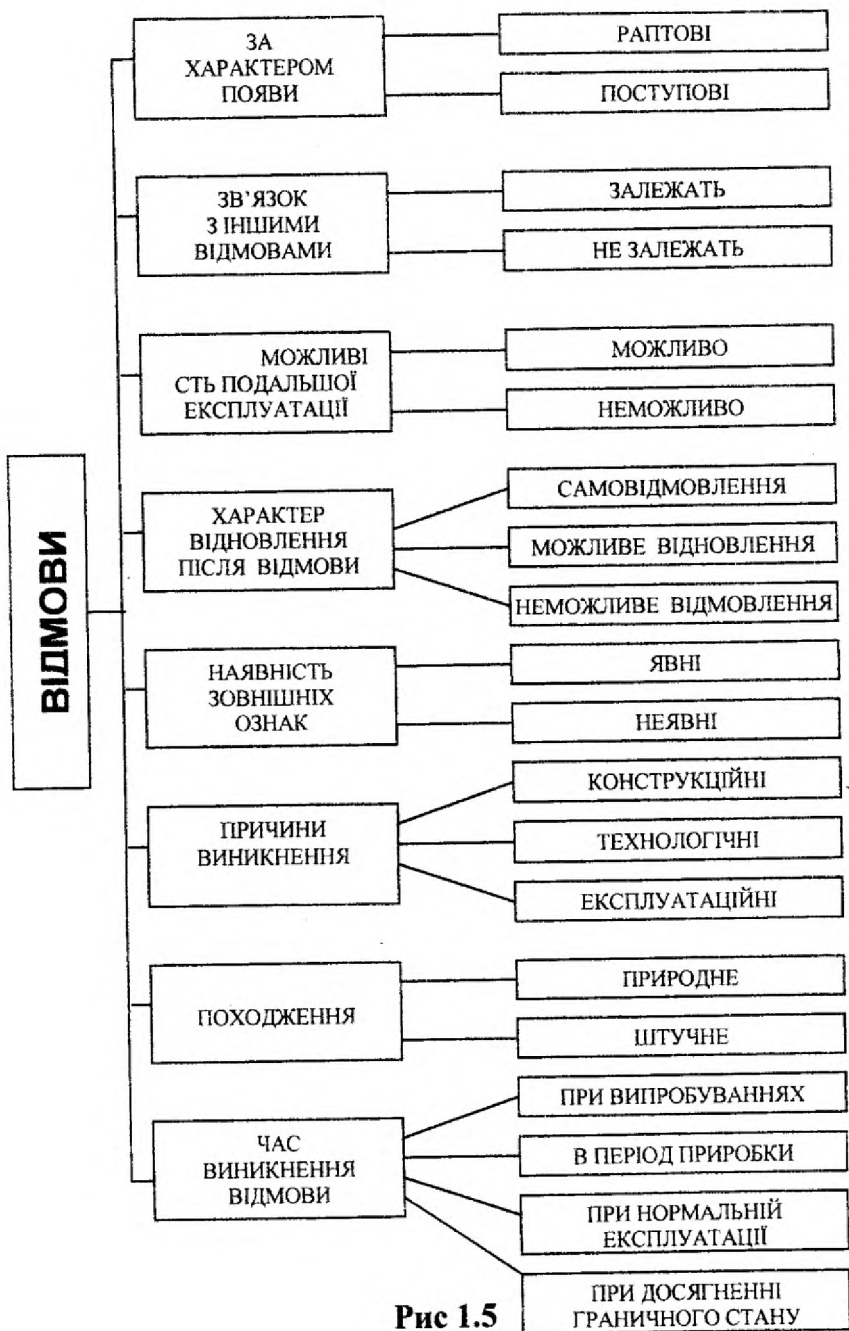


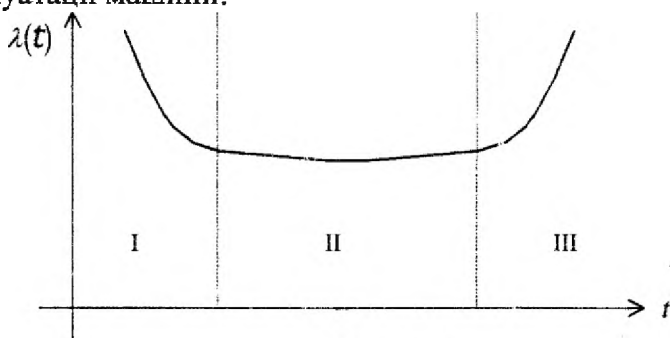
Рис 1.5



Відмови можуть мати різноманітну фізичну природу, як то: руйнування деталі чи її поверхні (поломки, зношування, корозія, старіння); не пов'язані з руйнуванням (витікання мастил, забруднення отворів та каналів подачі мастил, послаблення з'єднань, забруднення, окислення чи ерозія контактів). Такі відмови можуть бути усунені заміною деталей, їх регулюванням чи зачищенням поверхні.

На *рис.1.5.* наведена розгорнута схема класифікації відмов.

Слід визначити, що, як правило, інтенсивність відмов має три характерні стадії (*рис.1.6*) в процесі експлуатації машини:



**Рис. 1.6.**

I - стадія припрацювання;

II - стадія нормальної експлуатації;

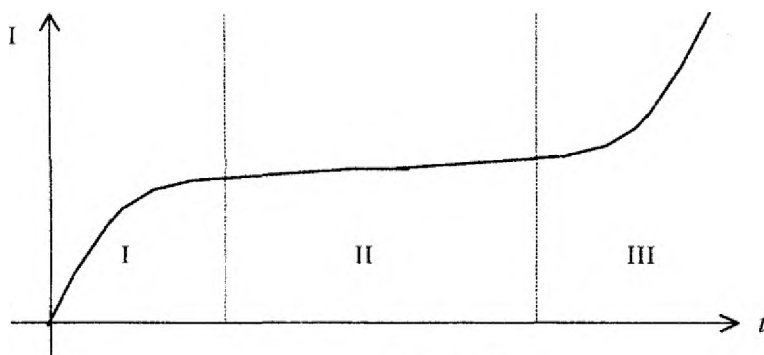
III - передгранична стадія.

На протязі першої стадії інтенсивність відмов зменшується, на другій - стабілізується біля деякого постійного значення ( $\lambda_{II} \cong const$ ), а на третій - починає зростати.

Якщо перейти до інтегральної змінної

$$I = \int_0^t \lambda(t) dt$$

то сумарна кількість відмов  $I(t)$  теж має ті ж три характерні періоди (рис. 1.7).



**Рис. 1.7.**

## 2. Випадкові величини та процеси в теорії надійності та закони їх розподілу.

### 2.1. Випадкові події та процеси.

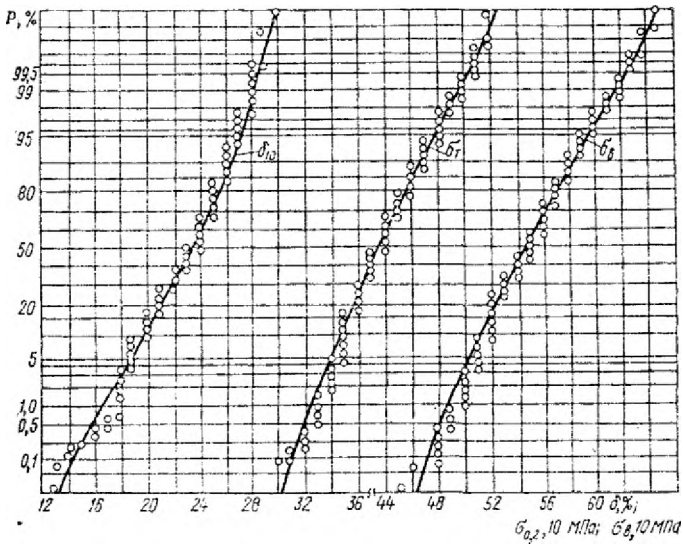
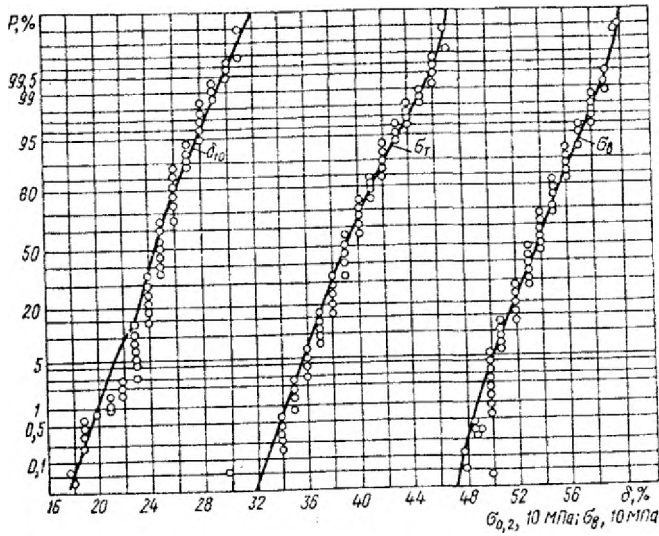
Для вивчення фізичних явищ проводять спостереження та експерименти. Їх результати реєструють в вигляді деяких кількісних замірів. При повторі експериментів ми бачимо розсіювання результатів замірів. Наприклад, вимірювання однієї і тієї ж величини одним і тим же приладом при збереженні умов вимірювання (температура, вологість, освітлювання і т.д.), ми отримуємо результати, що хоч не багато, але відрізняються один від одного. Дуже важливу роль при цьому відіграє чутливість приладу – чим вона вища, тим більша ймовірність виявити в кожному вимірі дещо відмінний результат від попереднього. Наприклад, проведено вимірювання розміру деталі  $L = 24$  мм за допомогою трьох приладів:

- лінійки ( $\Delta L = 1$  мм);
- штангенциркуля ( $\Delta L = 0,1$  мм);
- мікрометра ( $\Delta L = 0,01$  мм).

В першому випадку багаторазовий повтор замірів не призведе до суттєвої зміни результатів заміру  $L_0 \cong 24$  мм

У другому випадку можливе розсіювання результатів вимірювань як мінімум у діапазоні  $24 \pm 0,1$  мм.

У третьому випадку ситуація буде ще більш різноманітною, і кожен вимір буде хоча б на 0,01 відрізнятися від попереднього, оскільки суттєво виросла чутливість вимірювання, а значить і чутливість до шумів. Тоді навіть багаторазові вимірювання не дають можливості точно передбачити результат наступного виміру.



**Рис.2.1.** Криві розподілу відносного видовження  $\delta_{10}$  границі плинності  $\sigma_T$  та міцності  $\sigma_B$  для сталі 15XCHD (а) та 10Г2СД (б)

У цьому випадку говорять, що результат заміру є величина випадкова. А для кількісної оцінки випадкових величин необхідно використовувати поняття та методи теорії ймовірностей.

Подія - це якісний чи кількісний результат дослід, проведеного за певних умов.

Наприклад, при випробуванні сталі на розтяг (рис.2.1), подією може бути той факт, що кожна з механічних характеристик  $\sigma_B$ ,  $\sigma_T$  та  $\delta$  буде:

- не менше заданої величини;
- не перевищувати заданої величини;
- лежати в певних межах та інше.

Подію будемо називати вірогідною, якщо вона повинна відбутися за даного комплексу умов (подія має не нульову ймовірність).

Подію будемо називати маловірогідною, якщо вона має майже нульову ймовірність відбутися за даного комплексу умов.

Подію будемо називати неможливою, коли вона за даних умов відбутися не може.

Із прикладу *рис.2.1*, а видно, що ймовірність того, що границя міцності сталі 15ХСНД в даних конкретних умовах випробовування буде не менше 540 МПа, складає 50%, і така подія – вірогідна. Ймовірність події  $\sigma_B \geq 590$  МПа значно менша ( $P \leq 0,5\%$ ), і може умовно бути віднесеною до маловірогідних подій в порівнянні з подією  $\sigma_B \geq 540$  МПа. А подія  $\sigma_B \geq 850$  МПа, як видно з *рис.2.1*, має нульову ймовірність. Звичайно, ці твердження відносяться до даних конкретних умов випробовування даної конкретної сталі. Змінивши умови випробовувань – наприклад, збільшивши швидкість навантаження на кілька порядків, чи знизивши температуру випробовувань від

кімнатної (293 К) до наднизьких (азотних чи гелієвих), можна досягти ненульової ймовірності для події  $\sigma_B \geq 850$  МПа.

Розвиток ринкових відносин дає можливість збагатитись при різних видах діяльності, в тому числі – і за рахунок розумової праці, створення продукції чи технології “Ноу-хау”. В різних країнах ймовірність такої події різна. Сьогоднішні умови в Україні дають підстави оцінювати ймовірність такої події, як  $P \Rightarrow 0$ , тобто віднести до розряду дуже маловірогідних. До речі, як і в сфері виробництва, інженерії, будівництва. Це й пояснює занепад даних галузей в сучасній Україні.

Ймовірністю деякої події А будемо називати міру об’єктивної можливості її появи М разів при N випробовуваннях

$$P(A) = \frac{M}{N}. \quad (2.1)$$

Якщо N мале, то значення P(A) можуть суттєво відрізнятись від досліду до досліду, тобто P(A) матиме випадковий характер. При  $n \rightarrow \infty$  ймовірність P(A) набуває стійких значень і втрачає випадковий характер (закон великих чисел).

Наприклад, при киданні правильного ігрового кубика велике число разів маємо:

$$P(x=1) \approx P(x=2) \approx \dots \approx P(x=6) = \frac{1}{6}, \quad (2.2)$$

де x – число очок, що випадає на верхній грані.

## 2.2. Основні властивості ймовірностей.

Нормування ймовірності. Ймовірність події не може бути від’ємною, так як можливість її появи М може приймати значення

$$0 \leq M \leq N . \quad (2.3)$$

Тоді

$$0 \leq P(A) \leq 1 . \quad (2.4)$$

Додавання ймовірностей. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій :

$$P(A + B) = P(A) + P(B) . \quad (2.5)$$

Несумісними будемо називати такі події, які не можуть з'явитися одночасно. (2.5) може бути розповсюджено на  $n$  несумісних подій

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) . \quad (2.6)$$

Тобто ймовірність суми  $n$  несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій. Випадкові події утворюють повну групу, якщо вони попарно несумісні та якщо при кожному випробуванні настає одна із подій групи.

Якщо випадкові події  $A_1; A_2; \dots; A_n$  утворюють повну групу, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1 . \quad (2.7)$$

Наприклад, із (2.2) слідує, що ймовірність випадання одного з чисел  $N \in [1 \dots 6]$  при киданні правильного ігрового кубика:

$$P(x = 1) + P(x = 2) + \dots + P(x = 6) = 1 \quad (2.8)$$

тобто ці події утворюють повну групу.

Множення ймовірностей. Для двох несумісних подій

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) . \quad (2.9)$$

Для двох взаємозалежних подій:

$$P(A \cdot B) = P(A / B) \cdot P(B) , \quad (2.10)$$

де  $P(A/B)$  - ймовірність появи події  $A$  за умови, що станеться подія  $B$  (умовна ймовірність).

Для випадку  $n$  несумісних подій  $B_1; B_2; \dots; B_n$  з ймовірностями  $P(B_1); P(B_2); \dots; P(B_n)$  і умовними ймовірностями появи події  $A$   $P(A/B_1); P(A/B_2); \dots; P(A/B_n)$  маємо формулу для повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i) \quad (2.11)$$

Якщо для умовної ймовірності:

$$P(B_i/A) = \frac{P(A \cdot B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{P(A)} \quad (2.12)$$

замінити  $P(A)$  по формулі повної ймовірності (2.11), то будемо мати формулу Байєса

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i)}, \quad (2.13)$$

яка дозволяє визначати ймовірність появи події  $B_i$  за умови, що станеться подія  $A$ .

### Задача 2.1.

*При подачі кріпильних деталей на зборочний конвєр двигунів змішали рівні кількості гайок М8, М10, та М12. Для даної зборочної операції потрібні гайки М8 та М10. Визначити ймовірність того, що взята навмання гайка буде потрібна в даній операції.*

Розв'язок:

$$P(M8) = P(M10) = P(M12) = \frac{1}{3}, \text{ т. я. кількості гайок}$$

рівні. Отже,  $P(M8) + P(M10) = \frac{2}{3}$ .



### Задача 2.2.

Розв'язати попередню задачу, якщо кількості  $M8 : M10 : M12 = 3 : 2 : 1$ .

Розв'язок:

$$P(M8) = \frac{3}{1+2+3} = \frac{1}{2}; \quad P(M10) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ тоді}$$

$$P(M8) + P(M10) = \frac{5}{6}.$$

### Задача 2.3.

В результаті контрольної операції зубчатих коліс виявлено, що 97% деталей задовольняють допускам. Деталі, що задовольняють допускам, розділились по якості виготовлення: I сорт - 65%; II сорт - 25% ; III сорт - 10%. Визначити ймовірність того, що взята навмання деталь буде I сорту.

Розв'язок:

Маємо дві події: деталь задовольняє допускам (подія А) та деталь - I сорту (подія В)  $P(A)=0,97$ ;  $P(B/A)=0,65$ , тоді

$$P(B \cdot A) = 0,97 \cdot 0,65 = 0,63.$$

### Задача 2.4.

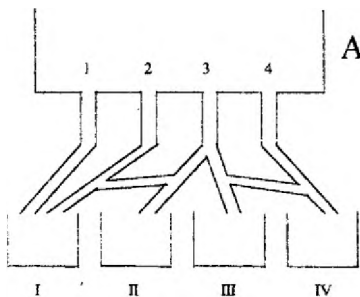


Рис. 2.2

Із центрального накопичувача  $A$  деталь потрапляє з рівною ймовірністю в кожен із відвідних лотків. Визначити ймовірність того, що деталь потрапить в  $I$ ,  $II$ ,  $III$  чи  $IV$  ящик, якщо події утворюють повну групу.

Розв'язок.

В  $I$  ящик деталь може потрапити трьома шляхами. Тоді, вважаючи події несумісними:

$$P_I = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4+4+1}{16} = \frac{9}{16};$$

$$P_{II} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16};$$

$$P_{III} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}; \quad P_{IV} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}.$$

**Задача 2.5.**

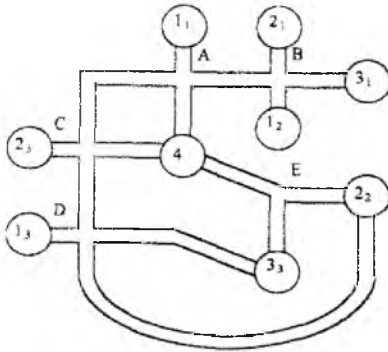
Як зміняться ймовірності  $P_I, \dots, P_{IV}$ , в задачі 2.4., якщо лоток  $I$  перекрити?

Розв'язок:

$$P_I = P_{IV} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4+1}{12} = \frac{5}{12}; \quad P_{II} = P_{III} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

**Задача 2.6.**

В незнайомому місті визначити ймовірність того, що Ви автомобілем приїдете в готель (1), бар (2), гастроном (3), якщо вирушаєте від вокзалу (4).



**Рис.2.3**

**Розв'язок:**

До готелю  $1_1$  можна дістатись двома маршрутами:  
 $4A1_1$  та  $4CA1_1$ .

Це дає:

$$\left. \begin{aligned}
 P(1_1) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{27} \\
 P(1_2) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{4}{81} \\
 P(1_3) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{4}{81}
 \end{aligned} \right\} P(i) = \frac{20}{81} (\cong 25\%)$$

Для решти маршрутів виконаємо аналогічні розрахунки. Тоді :

$$\left. \begin{aligned}
 P(2_1) &= \binom{1}{3}^3 + \binom{1}{3}^4 = \frac{4}{81} \\
 P(2_2) &= \frac{1}{6} + \binom{1}{3}^3 + \binom{1}{3}^4 = \frac{35}{162} \\
 P(2_3) &= \binom{1}{3}^2 + \binom{1}{3}^3 = \frac{4}{27}
 \end{aligned} \right\} P(2) = \frac{67}{162} (\cong 41\%)$$

$$\left. \begin{aligned}
 P(3_1) &= \binom{1}{3}^3 + \binom{1}{3}^4 = \frac{4}{81} \\
 P(3_2) &= \frac{1}{6} + \binom{1}{3}^3 + \binom{1}{3}^4 = \frac{35}{162}
 \end{aligned} \right\} P(3) = \frac{43}{162} (\cong 27\%)$$

$$P(4) = 2 \binom{1}{3}^3 = \frac{2}{27} = \frac{12}{162} (\cong 7\%)$$

$$\sum P(i) = \frac{40}{162} + \frac{67}{162} + \frac{43}{162} + \frac{12}{162} = \frac{162}{162} = 1.$$

### 2.3. Елементи комбінаторики.

Значна кількість задач теорії надійності пов'язана зі статистичним моделюванням, яке, в свою чергу, тісно пов'язане з поняттями комбінаторики.

Введемо деякі формули комбінаторики, що будуть корисні при знаходженні ймовірності подій в задачах статистичного моделювання.

Дамо визначення перестановки, розміщення та сполучення.

Перестановками із  $\{n\}$  елементів називається така їх комбінація, що відрізняється тільки порядком елементів.

Наприклад, для множини із трьох елементів  $\{a, b, c\}$  можна утворити 6 перестановок:

{abc, acb, bac, bca, cab, cba}.

Для множини із чотирьох елементів {a, b, c, d} кількість перестановок різко зростає:

{abcd, abdc, acbd, acdb, ..., dcba}

і сягне двадцяти чотирьох.

Збільшуючи поступово потужність множини до {n}, знаходимо загальну формулу для кількості перестановок:

$$A_n^n = n! \quad (2.14)$$

Розміщенням із  $n$  елементів по  $m$  називається така їх комбінація, що відрізняється самими елементами або їх порядком.

Наприклад, для групи із трьох елементів {a, b, c} утворимо всі можливі групи по два елементи:

{a, b, c}  $\Rightarrow$  {ab, ac, bc, ba, ca, cb}

Тоді:

$$A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (2.15)$$

Сполученнями із  $n$  елементів по  $m$  називаються такі їх комбінації, що розрізняються тільки своїми елементами.

Наприклад, із групи {a, b, c} утворимо сполучення по два елементи: {a, b, c}  $\Rightarrow$  {ab, ac, bc},

тоді

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (2.16)$$

Коефіцієнти  $C_n^m$  дорівнюють коефіцієнтам бінома Ньютона  $(1+x)^n$  при розписуванні його по степеням. Для зручності покладають  $C_n^0 = C_n^n = 1$ . Дуже зручно для визначення  $C_n^m$  користуватись трикутником Паскаля:

$n = 0$					1
$n = 1$				1	1
$n = 2$			1	2	1
$n = 3$		1	3	3	1
$n = 4$	1	4	6	4	1
...					...

Кожен нижній елемент у трикутнику Паскаля дорівнює сумі двох елементів, що стоять над ним, ліворуч і праворуч. Якщо зверху ліворуч чи праворуч нема елемента (для крайніх членів), то приймаємо 0.

### Задача 2.7.

*В контейнері знаходиться 40 підшипників серії 205, що були в експлуатації. Із них тільки 20% мають зношування менше допустимого (зберегли працездатний стан). Визначити ймовірність того, що серед трьох взятих навмання підшипників (без повернення в контейнер) буде рівно один працездатний підшипник.*

Розв'язок:

Число всіх можливих “трійок”

$$N = A_{40}^3 = \frac{40!}{(40-3)!} = 40 \cdot 39 \cdot 38$$

Із всіх “трійок”, що цікавлять нас в цій задачі, працездатний підшипник можна вибрати 1 із 8 способів (20% працездатних), а інші два  $N_1$  способами:

$$N_1 = A_{40-8}^2 = \frac{32!}{(32-2)!} = 32 \cdot 31.$$

Якщо врахувати, що працездатний підшипник може бути взятим першим, другим чи третім, то число “успіхів”  $M$  буде:  $M = 3 \cdot 8 \cdot 32 \cdot 31$ .

$$\text{Тоді } P(x=1) = \frac{3 \cdot 8 \cdot 32 \cdot 31}{40 \cdot 39 \cdot 38} = 0,402.$$

Задачу можна розв'язати, використавши біноміальні коефіцієнти:

$$P(x=1) = \frac{C_8^1 \cdot C_{32}^2}{C_{40}^3} = \frac{8! \cdot 32!}{1!7! \cdot 2!30!} = \frac{8 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 3 \cdot 2}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 2} = 0,402.$$

### Задача 2.8.

*Розв'язати задачу 2.7. за умови, що серед взятих підшипників буде хоча б один працездатний.*

Розв'язок.

$$P(x \geq 1) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3).$$

Із попереднього розв'язку  $P(x=1) = 0,402$ .

Використаємо біноміальні коефіцієнти:

$$P(x=1) = \frac{C_8^1 \cdot C_{32}^2}{C_{40}^3} = \frac{8! \cdot 32!}{1!7! \cdot 2!30!} = \frac{8 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 3 \cdot 2}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 2} = 0,402$$

$$P(x=2) = \frac{C_8^2 \cdot C_{32}^1}{C_{40}^3} = \frac{8! \cdot 32!}{2!6! \cdot 1!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 32 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38} = 0,091$$

$$P(x=3) = \frac{C_8^3 \cdot C_{32}^0}{C_{40}^3} = \frac{35!}{40!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38} = 0,005.$$

Тоді  $P(x \geq 1) = 0,498$ .

Таким чином, ймовірність того, що хоча б одним працездатним підшипником із трьох взятих навмання, буде досить висока, і сягає майже 50%.

### Задача 2.9.

*В контейнері знаходиться по N працездатних та непрацездатних деталей. Визначити ймовірність того, що:*

а) із 4-х взятих навмання деталей 3 виявляться працездатними ;

б) із 8-и взятих навмання деталей 5 виявляться працездатними.

**Яка з цих ймовірностей більша ?**

Розв'язок.

Використаємо формули комбінаторики. Тоді ймовірність події а):  $P\left(\begin{matrix} 3 & 3 & 4 \end{matrix}\right) = \frac{C_N^3 \cdot C_N^1}{C_{2N}^4}$ ,

де  $C_N^3$  - кількість способів взяти 3 працездатні деталі із N працездатних;

$C_N^1$  - кількість способів взяти одну непрацездатну деталь, щоб взятих деталей було 4;

$C_{2N}^4$  - загальна кількість способів взяти по 4 деталі із 2N.



$$\text{Аналогічно } P\left(5 \text{ з } 8\right) = \frac{C_N^5 \cdot C_N^3}{C_{2N}^8}.$$

Порівняємо ці ймовірності :

$$\frac{P\left(3 \text{ з } 4\right)}{P\left(5 \text{ з } 8\right)} = \frac{C_N^1 \cdot C_{2N}^8}{C_N^5 \cdot C_{2N}^4}, \text{ де } C_N^1 = \frac{N!}{1!(N-1)!} = N;$$

$$C_{2N}^8 = \frac{(2N)!}{8!(2N-8)!} = \frac{(2N)(2N-1)(2N-2)\dots(2N-7)}{8!};$$

$$C_N^5 = \frac{N!}{5!(N-5)!} = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{5!};$$

$$C_{2N}^4 = \frac{(2N)!}{4!(2N-4)!} = \frac{(2N)(2N-1)(2N-2)(2N-3)}{4!}.$$

$$\frac{P\left(3 \text{ з } 4\right)}{P\left(5 \text{ з } 8\right)} = \frac{5!4!}{8!} = \frac{N(2N)(2N-1)(2N-2)(2N-3)(2N-4)\dots(2N-7)}{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(2N)(2N-1)(2N-2)(2N-3)}$$

$$= \frac{1}{14} \cdot \frac{(2N-4)(2N-5)(2N-6)(2N-7)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)} = \frac{2}{7} \cdot \frac{(2N-5)(2N-7)}{(N-1)(N-4)}$$

$$\text{Для } N=10 \text{ маємо } \frac{P\left(3 \text{ з } 4\right)}{P\left(5 \text{ з } 8\right)} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 13}{7 \cdot 9 \cdot 6} = 1,031.$$

$$\text{Для } N \Rightarrow \infty \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N-5)(2N-7)}{(N-1)(N-4)} = 2 \cdot 2.$$

$$\text{Тоді } \frac{P\left(3 \text{ з } 4\right)}{P\left(5 \text{ з } 8\right)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{7} = 1,143.$$

Таким чином, для достатньо великої партії деталей, тільки половина з яких працездатні, ймовірність взяти 3 працездатних деталі з 4-х на 14,3% більше, ніж ймовірність взяти 5 працездатних з 8 деталей.

## 2.4. Дискретні випадкові величини.

Випадкові величини можна певним чином зв'язати з деякими випробуваннями. Прикладом таких випробувань можуть бути: кидання однієї чи кількох монет, ігрових кубиків, витягування карт з колоди, різнокольорових шариків з урни і таке інш. (див. Задачі 2.1- 2.9). В простих задачах вдається побудувати повну групу подій. Результатом випробувань буде досягнення випадковою величиною деяких із можливих значень. Дамо наступне визначення.

Величина  $X$  називається дискретною випадковою, якщо множина її значень є деяка послідовність чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n$  - кінцеве чи нескінченне), і якщо кожна подія  $X = x_i$  є випадковою, тобто має повну ймовірність  $P_i$ .

Подію  $X = x_i$  будемо називати елементарною подією.

Законом розподілу випадкової величини  $X$  будемо називати правило, що дозволяє знаходити ймовірність  $P(X=x_i)=P_i$  для всіх  $i \in (1 \dots N)$ , тобто закон розподілу задає ймовірність  $P_i$  як функцію, що визначена на множині випадкових подій  $X = x_i$ .

**Таблиця 2.1.**

Можливі значення		$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
Їх ймовірності $P_i$		$P_1$	$P_2$	$P_3$	...	$P_n$

В таблиці 2.1. проти кожного із можливих значень  $x_i$  наведена відповідна йому ймовірність  $P_i$ . Причому, якщо події  $X = x_1; X = x_2; \dots$  утворюють повну групу, то

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad (2.17)$$

Наприклад, в статистичному розіграші одночасно підкидається  $N \in (1 \dots N)$  монет. Нехай  $X$  - число випадань герба при одночасному підкиданні  $N$  монет. При великій кількості випробувань будемо мати слідуючу картину:

$N=1$

X	0	1
$P_i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$N=2$

X	0	1	2
$P_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$N=3$

X	0	1	2	3
$P_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$N=4$

X	0	1	2	3	4
$P_i$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Як бачимо, в чисельниках ймовірності стоять біноміальні коефіцієнти, а в знаменниках - число  $2^N$ . Це дає можливість записати.

$$P_i^N = \frac{C_N^i}{2^N} \quad (2.18)$$

Замість операції кидання монети для задач статистичного розіграшу введемо двоїчний генератор

випадкових чисел  $B_i \{0;1\}$ . Причому, ймовірність розрядів “0” та “1” однакова. Тоді операцію кидання  $N$  монет та визначення суми випадань гербів замінимо випробуванням  $N$ -розрядного генератора  $B_i \{0;1\}$ . В цьому випадку для випадання суми  $i$  також можна використати (2.18.).

### Задача 2.10.

*Визначити ймовірність випадання суми “4” в шестирозрядному двоїчному генераторі випадкових чисел.*

Розв’язок:

$$P_4^6 = \frac{C_6^4}{2^6} = \frac{4!2!}{6^4} = \frac{15}{64}.$$

Таким чином, ймовірність того, що в шестирозрядному двоїчному генераторі випадкових чисел в чотирьох розрядах будуть одиниці сягає

$$P_4^6 = \frac{15}{64} = 23,4\%.$$

### Задача 2.11.

*Для умов задачі 2.10 визначити ймовірність випадання суми не більше 4.*

Розв’язок:

$$\begin{aligned} P(x \leq 4) &= P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4}{2^6} = \\ &= \frac{1 + 6 + 15 + 20 + 15}{64} = \frac{57}{64} = 89,1\% \end{aligned}$$

## 2.5 Елементи загальної теорії статистичних випробувань.

Статистичні випробування на прикладі кидання  $N$  монет, чи  $N$ -розрядного двоїчного генератора випадкових чисел  $B_2\{0;1\}$  нашоухують на думку розширити клас засобів випробування.

Розглянемо  $N$ -розрядний трійковий генератор випадкових чисел  $B_3\{0;1;2\}$  з однаковими  $\frac{1}{3}$  ймовірностями кожної позиції. Визначимо ймовірності випадання суми  $m$ .

$N=1$

X	0	1	2
$P_i$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$N=2$

x	0	1	2	3	4
$P_i$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$N=3$

x	0	1	2	3	4	5	6
$P_i$	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$

Як показує даний приклад, розподіл ймовірностей для  $N$ -розрядного трійкового генератора випадкових чисел можна знайти в повній відповідальності до біноміального розподілу, якщо замість бінома Ньютона  $(1+x)^N$  розглядати тричлен  $(1+x+x^2)^N$ , а в знаменнику ймовірностей записати  $3^N$ . Цікаво, що коефіцієнти

розкладання  $(1 + X + X^2)^N$  по цілих додатніх степенях можна знайти, аналогічно до біноміальних коефіцієнтів, за допомогою розширеного трикутника Паскаля:

**Таблиця 2.2**

N	$x^0$	$x^1$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$	$x^8$	$x^9$	$x^{10}$
0	1										
1	1	1	1								
2	1	2	3	2	1						
3	1	3	6	7	6	3	1				
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1		
5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1

Як слідує з таблиці 2.2, кожен член нижнього рядка- коефіцієнтів полінома

$(1 + x + x^2)^N$  - може бути знайденим, як сума трьох коефіцієнтів у верхньому рядку :

$$G_{x^n}^N = G_{x^{n-2}}^{N-1} + G_{x^{n-1}}^{N-1} + G_{x^n}^{N-1} \quad (2.19)$$

Наприклад, коефіцієнт при  $x^3$  полінома  $(1 + x + x^2)^3$  може бути знайдений, як сума коефіцієнтів при степенях  $x$ ,  $x^2$  та  $x^3$  полінома  $(1 + x + x^2)^2$  ( див. пунктирну рамку табл. 2.2 ).

Користуючись таблицею 2.2, можемо розписати :

$$(1 + x + x^2)^4 = 1 + 4x + 10x^2 + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8. \quad (2.20)$$

Це дає можливість розрахувати ймовірність появи суми чисел, рівної показникові степеня при  $x$ , якщо кидати одночасно 4 кубики, у кожного з яких по дві грані містять

"0", "1", "2". Ймовірності для відповідних сум зведено в таблицю:

$N=4$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_i$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{19}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{81}$

**Таблиця 2.3**

	Одночасне N випробування	
	Фізична модель	Кібернетична модель
$B_{i2}(0;1)$	Одночасне кидання N монет	N-розрядний двоїчний генератор випадкових чисел
$B_{i3}(0;1;2)$	Одночасне кидання N тригранних "кубиків" або N шестигранних кубиків з попарними гранями "0; 1; 2"	N-розрядний троїчний ГВЧ
$B_{i4}(0;1;2;3)$	Одночасне кидання N чотиригранників або N восьмигранників з попарними гранями "0; 1; 2; 3"	N-розрядний четвероїчний ГВЧ
$B_{i5}(0;1;2;3;4)$	Одночасне кидання N п'ятигранників або N десятигранників з попарними гранями "0; 1; 2; 3; 4"	N-розрядний п'ятероїчний ГВЧ
$B_{i6}(0;1;2;3;4;5)$	Одночасне кидання N кубиків з гранями "0; 1; 2; 3; 4; 5"	N-розрядний шестероїчний ГВЧ

В таблиці 2.3 наведено фізичні моделі та їх кібернетичний еквівалент різнорозрядних “кубиків” для статистичних розіграшів.

Дуже цікаво було б виразити коефіцієнти  $D_x^N$  в (2.19) - (2.20) через біноміальні коефіцієнти  $C_n^m$ .

Для  $N=2$  маємо:

$$\begin{aligned} (1+x+x^2)^2 &= [(1+x)^2 - x]^2 = (1+x)^4 - \\ &- 2x(1+x)^2 + x^2 = C_4^0 + C_4^1x + C_4^2x^2 + C_4^3x^3 + C_4^4x^4 - \\ &- 2x(C_2^0 + C_2^1x + C_2^2x^2) + x^2 = [C_4^0] + [C_4^1 - 2C_2^0]x + \\ &+ [C_4^2 - 2C_2^1 + 1]x^2 + [C_4^3 - 2C_2^2]x^3 + C_4^4x^4 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Можемо записати

$$(1+x+x^2)^2 = G_4^0 + G_4^1x + G_4^2x^2 + G_4^3x^3 + G_4^4x^4 \quad (2.22)$$

де :

$$\begin{bmatrix} G_4^0 \\ G_4^1 \\ G_4^2 \\ G_4^3 \\ G_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4^0 \\ C_4^1 - 2C_2^0 \\ C_4^2 - 2C_2^1 + C_2^0 \\ C_4^3 - 2C_2^2 \\ C_4^4 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Після аналогічних перетворень для  $N=3$  маємо :

$$(1+x+x^2)^3 = \sum_{i=0}^6 G_6^i \cdot x^i, \quad (2.24)$$

де :



$$\begin{aligned}
G_6^0 &= C_6^0 \\
G_6^1 &= C_6^1 - 3C_4^0 \\
G_6^2 &= C_6^2 - 3C_4^1 + 3C_2^0 \\
G_6^3 &= C_6^3 - 3C_4^2 + 3C_2^1 - C_0^0 \\
G_6^4 &= C_6^4 - 3C_4^3 + 3C_2^2 \\
G_6^5 &= C_6^5 - 3C_4^4 \\
G_6^6 &= C_6^6
\end{aligned} \tag{2.25}$$

В загальному вигляді :

$$(1 + x + x^2)^N = \sum_{i=0}^{2N} G_{2N}^i \cdot x^i, \tag{2.26}$$

де :

$$\begin{bmatrix} G_{2N}^0 \\ G_{2N}^1 \\ G_{2N}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ G_{2N}^{2N-2} \\ G_{2N}^{2N-1} \\ G_{2N}^{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{2N}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_{2N}^1 & C_{2N-2}^0 & 0 & \dots & 0 \\ C_{2N}^2 & C_{2N-2}^1 & C_{2N-4}^0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ \dots & & & & C_{2N-2N}^0 \\ \dots & & & & \\ C_{2N}^{2N-2} & C_{2N-2}^{2N-3} & C_{2N-4}^{2N-4} & \dots & 0 \\ C_{2N}^{2N-1} & C_{2N-2}^{2N-2} & 0 & \dots & 0 \\ C_{2N}^{2N} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_N^0 (-1)^0 \\ C_N^1 (-1)^1 \\ C_N^2 (-1)^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_N^{N-2} (-1)^{N-2} \\ C_N^{N-1} (-1)^{N-1} \\ C_N^N (-1)^N \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Тоді будь-який коефіцієнт полінома (2.26) можна виразити через біноміальні коефіцієнти:

$$G_{2N}^m = \sum_{i=0}^m (1 -)^i C_N^i \cdot C_{(2N-2i)}^{m-i} \tag{2.28}$$

В свою чергу виразимо біноміальні коефіцієнти через формули сполучення (2.16) :

$$C_N^i = \frac{N!}{i!(N-i)!}; C_{2N-2i}^{m-i} = \frac{(2N-2i)!}{(m-i)!(2N-m-i)!}$$

Це дає :

$$G_{2N}^m = \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{N!(2N-2i)!}{i!(N-i)!(m-i)!(2N-m-i)!} \quad (2.29)$$

(2.29) є досить сильним результатом, так як дозволяє запропонувати шляхи побудови загальної теорії статистичного моделювання законів розподілу дискретних випадкових величин. Крім того, (2.29) легко алгоритмізується, що також досить перспективно з точки зору комп'ютерного моделювання.

### Задача 2.12.

*Знайти ймовірність випадання суми "4" при одночасному киданні п'яти кубиків, на кожному з яких дві грані мають "0", дві - "1", дві - "2".*

Розв'язок.

$$P(S = m) = \frac{G_{2N}^m}{3^N}. \text{ В нашій задачі } N = 5, m = 4.$$

Із (2.29):

$$\begin{aligned} G_{10}^4 &= \frac{5!10!}{0!5!4!6!} + (-1)^1 \frac{5!8!}{1!4!3!5!} + (-1)^2 \frac{5!6!}{2!3!2!4!} + \\ &+ (-1)^3 \frac{5!4!}{3!2!1!3!} + (-1)^4 \frac{5!2!}{4!1!0!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \\ &+ \frac{6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1} + \frac{5}{1} = \\ &= 10 \cdot 3 \cdot 7 - 8 \cdot 7 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 2 + 5 = 45 \end{aligned}$$

Такий же результат для  $N=5$  маємо проти  $x^j$  в таблиці 2.2. Тоді розшукувана ймовірність

$$P(S = 4) = \frac{45}{3^5} = \frac{45}{243} = 0,185.$$

Звичайно, запропонований розв'язок досить громіздкий і навряд чи матиме значне практичне застосування. Однак, нам важливо було впевнитись, по-перше, що ( 2.29 ) побудовано вірно, по-друге, статистичними випробуваннями ( при  $k \rightarrow \infty$  ) навряд чи вдалося б швидше отримати даний результат.

### Задача 2.13.

*Для умов задачі 2.12 визначити ймовірність того, що вказана сума не перевищує "4".*

Розв'язок.

$$P(S \leq 4) = P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2) + P(S = 3) + \\ + P(S = 4) = \frac{G_{10}^0 + G_{10}^1 + G_{10}^2 + G_{10}^3 + G_{10}^4}{3^5}$$

Для знаходження  $G_{10}^j$  можна використати (2.29) чи таблицю 2.2. З таблиці 2.2 ( $N = 5$ ) маємо:  $G_{10}^0 = 1$ ;  $G_{10}^1 = 5$ ;  $G_{10}^2 = 15$ ;  $G_{10}^3 = 30$ ;  $G_{10}^4 = 45$ .

Тоді:

$$P(S \leq 4) = \frac{1 + 5 + 15 + 30 + 45}{243} = \frac{96}{243} = 0,395.$$

### Задача 2.14.

*Розв'яжіть задачу 2.13, використовуючи формулу (2.29). Побудуйте комп'ютерний алгоритм та реалізуйте його.*

### Задача 2.15.

Кидається одночасно три правильні “кубики”, у яких з рівною ймовірністю на гранях зображено:  $Q_1[0;1]$ ;  $Q_2[0;1;2]$ ;  $Q_3[0;1;2;3]$ .

Побудувати таблицю розподілу ймовірностей випадання кожної із сум.

Розв'язок.

Побудуємо поліном  $Q_1 \times Q_2 \times Q_3$  :

$$Q_1 \times Q_2 \times Q_3 = (1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3) =$$

$$= 1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6.$$

Загальне число комбінацій  $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ .

Будуємо таблицю розподілу ймовірностей

$$P(S_i) = \frac{G'_i}{N_1 \cdot N_2 \cdot N_3}.$$

Сума $S_i$	0	1	2	3	4	5	6
Ймовірність появи $P(S_i)$	$1/24 = 4,2\%$	$3/24 = 12,5\%$	$5/24 = 20,8\%$	$6/24 = 25\%$	$5/24 = 20,8\%$	$3/24 = 12,5\%$	$1/24 = 4,2\%$

### Задача 2.16.

Запропонувати алгоритм та провести комп'ютерне моделювання для експериментальної перевірки розв'язку задачі 2.15.

### Задача 2.17.

*Побудувати таблицю розподілу ймовірностей суми при одночасному киданні двох "кубиків", на гранях яких з рівною ймовірністю зображено:  $Q_1[0;1;2]$ ;  $Q_2[0;3]$ .*

Розв'язок.

Побудуємо поліном

$$Q_1 \times Q_2 = (1 + x + x^2)(1 + x^3) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

Загальне число комбінацій  $N_1 \cdot N_2 = 2 \cdot 3 = 6$ .

Тоді

$S_i$	0	1	2	3	4	5
$P(S_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Досить несподіваний результат: розподіл ймовірностей випадання суми на двох "кубиках"  $Q_1[0;1;2]$  та  $Q_2[0;3]$  повністю співпадає з таким розподілом для одного кубика  $Q_3[0;1;2;3;4;5]$ , тобто  $Q_1 \times Q_2 = Q_3$ .

### Задача 2.18.

*Побудувати розподіл ймовірностей суми чисел, що випадають при одночасному киданні двох кубиків  $Q_1[1;1;1;1;2;3]$  та  $Q_2[1;1;1;1;2]$ .*

Розв'язок.

Побудуємо поліном

$$Q_1 \times Q_2 = (4x + x^2 + x^3)(5x + x^2) = 20x^2 + 9x^3 + 6x^4 + x^5$$

Загальне число комбінацій  $N_1 \cdot N_2 = 6 \cdot 6 = 36$

Тоді

$S_i$	2	3	4	5
$P(S_i)$	20/36	9/36	6/36	1/36

### Задача 2.19.

*Які два “кубики” необхідно кидати, щоб ймовірність випадання суми була геометричною прогресією*

$$P(x=5):P(x=4):P(x=3):P(x=2)=1:2:4:8?$$

Розв'язок.

Маємо поліном:

$$\text{Розпишемо в загальному вигляді } Q_1 = ax + bx^2 + cx^3;$$

$Q_2 = dx + ex^2$ . Прирівняймо коефіцієнти після множення:

$$\begin{cases} ad = 8; \\ bd + ae = 4; \\ cd + be = 2; \\ ce = 1. \end{cases}$$

Один із розв'язків, що задовольняє даній системі, причому всі коефіцієнти цілі і додатні, такий :  $a = 4$ ;  $b = 0$ ;  $c = 1$ ;  $d = 2$ ;  $e = 1$ .

Тоді необхідні нам “кубики” є :  $Q_1[1;1;1;3]$ ;  $Q_2[1;1;2]$ .

### Задача 2.20.

*Правильний октаедр  $Q[1;2;3;4;5;6;7;8]$  замінити трьома “монетками”  $Q_1;Q_2;Q_3$ . Які числа повинні бути зображені на сторонах цих монеток, щоб при їх одночасному киданні сума чисел була від одного до восьми та мала однакову ймовірність?*

Розв'язок.

Перетворимо поліном  $Q$  як геометричну прогресію :

$$\begin{aligned}
 x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 &= \frac{1-x^8}{1-x} = \\
 &= x \frac{(1-x^4)(1+x^4)}{1-x} = x(1+x)(1+x^2)(1+x^4)
 \end{aligned}$$

Вносячи  $x$  в один із двочленів в дужках, маємо три розв'язки :

$$Q_1 \times Q_2 \times Q_3 = \begin{cases} [1;2] [0;2] [0;4] \\ [0;1] [1;3] [0;4] \\ [0;1] [0;2] [1;5] \end{cases}$$

Всі три розв'язки дають рівну ймовірність випадання суми від одного до восьми, тобто еквівалентні статистичному випробуванню правильного октаедра.

### Задача 2.21.

*В випробуванні одночасно кидається три кубики, у яких по дві грані мають "0", "1" та "2". Знайти ймовірність випадання суми "3", суми "4" та знайти найбільш ймовірну суму.*

Розв'язок.

Маємо "класичний" випадок задачі  $B_1\{3\}$ . Число кубиків  $N=3$ . Розпишемо тричлен:

$$Q = (1+x+x^2)^3 = 1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6.$$

Кількість варіантів суми - 7:  $\{0;1;2;3;4;5;6\}$ . Кількість комбінацій -  $3^3 = 27$ . Доля однієї реалізації випадкового процесу  $1/27$ . Тоді ймовірність суми  $S_i$  дорівнює  $P_{S_i} = \frac{C_i}{3^3}$ ,

де  $C_i$  - коефіцієнт при  $X^i$ . Тоді  $P_{S_3} = \frac{7}{27}$ ;  $P_{S_4} = \frac{6}{27}$ ;

$$P_{\max} = P_{S_3} = \frac{7}{27} = 26\%.$$

### Задача 2.23.

*У випробуваннях одночасно кидається два кубики, на гранях яких позначено "1", "2", "3", "4", "5" та "6". Побудувати розподіл ймовірностей випадання суми "2", "3", "4", "5"..."12".*

Розв'язок.

Маємо випадок  $B_i \{6\}$ ,  $N=2$ . Кількість комбінацій  $6^2 = 36$ . Доля однієї реалізації –  $1/36$ . Розпишемо поліном :

$$Q = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}.$$

Визначити ймовірність, що задана сума: 1) не менше 10; 2) не більше 8.

$$P(S \geq 10) = P_{S_{10}} + P_{S_{11}} + P_{S_{12}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 16,6\%$$

$$P(S \geq 8) = P_{S_2} + P_{S_3} + P_{S_4} + P_{S_5} + P_{S_6} + P_{S_7} + P_{S_8} = \frac{26}{36} = 72,2\%$$

### Задача 2.24.

*У випробуванні одночасно кидається 2 октаедри, у яких на 5-ти гранях - "2", на двох гранях - "4", на одній грані - "8". Побудувати розподіл ймовірностей  $P(S_i)$*

Розв'язок.



Маємо  $N=2$ . В декартовому добутку полінома даного октаедра

$$Q = (5x^2 + 2x^4 + x^8)^2 = 25x^4 + 20x^6 + 4x^8 + 10x^{10} + 4x^{12} + x^{16}.$$

Загальна кількість комбінацій  $8^2 = 64$ . Розподіл ймовірностей має вигляд:

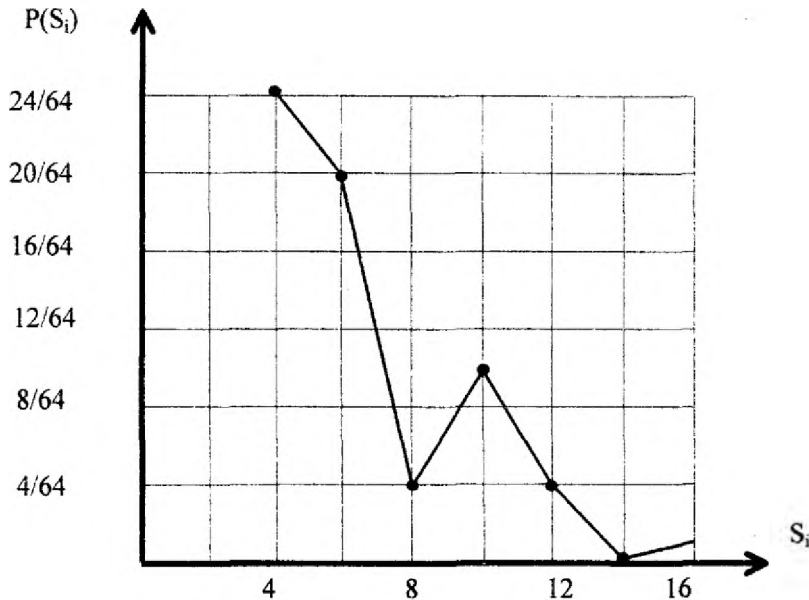


Рис.2.4

### Задача 2.25.

*У випробуванні одночасно кидається 3 октаедри, у яких на 5 гранях – "1", на двох гранях – "2", на одній грані – "4". Побудувати розподіл ймовірностей  $P(S_i)$ .*

Розв'язок.

$N=3$ . Модельний поліном даного октаедра  $Q = (5x + 2x^2 + x^4)$ . Побудуємо декартовий добуток  $Q_1 \times Q_2 \times Q_3$ :

$$\begin{aligned}
 Q \times Q \times Q &= (5x + 2x^2 + x^4)^3 = [5x + (2x^2 + x^4)]^3 = 125x^3 + \\
 &+ 75x^2(2x^2 + x^4) + 15x(2x^2 + x^4)^2 + (2x^2 + x^4)^3 = \\
 &125x^3 + 150x^4 + 75x^6 + 15x(4x^4 + 4x^6 + x^8) + \\
 &+ (8x^6 + 12x^8 + 6x^{10} + x^{12}) = 125x^3 + 150x^4 + 60x^5 + 83x^6 + \\
 &+ 60x^7 + 12x^8 + 15x^9 + 6x^{10} + x^{12}
 \end{aligned}$$

Загальна кількість комбінацій  $m_{\Sigma} = 8^3 = 512$ ,  
 $\sum G_i = 512$ . (Добуток поліномів виконано вірно).

Розподіл ймовірностей матиме вигляд:

$S_i$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_i)$	125/512	150/512	60/512	83/512	60/512	12/512	15/512	16/512	0	1/512
%	24,4	29,3	11,7	16,2	11,7	2,34	2,92	1,17	0	0,19

Тоді:

$$P(S_i < 4) = 24,4\%; P(S_i < 5) = 53,7\%;$$

$$P(S_i < 6) = 65,4\% \quad P(S_i < 7) = 81,6\%;$$

$$P(S_i < 8) = P(S_i \leq 7) = \frac{478}{512} = 93,3\%$$

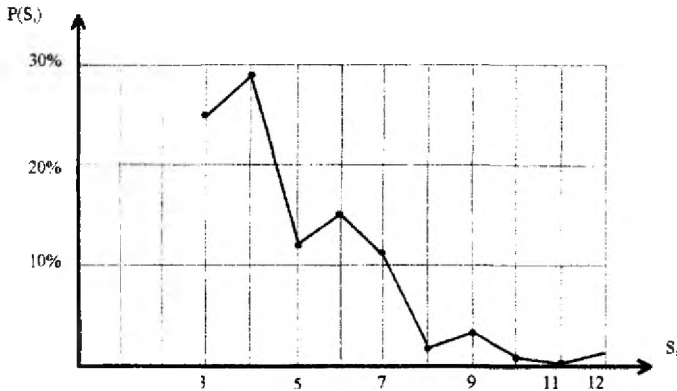


Рис. 2.5.

**Задача 2.26.**

*В випробуванні одночасно кидається 2 кубики, у яких :*

*I кубик : "0"– на 2 гранях , "1"– на 3 гранях, "3"– на 1 грані .*

*II кубик : "0"– на 2 гранях, "1"– на 2 гранях, "2"– на 2 гранях.*

*Побудувати розподіл ймовірностей  $P(S_i)$ .*

Розв'язок .

$$N=2. \text{ Модельні поліноми: } Q_I = (2 + 3x + x^3);$$

$$Q_{II} = (2 + 2x + 2x^2).$$

$$Q_I \times Q_{II} = 2(2 + 3x + x^3)(1 + x + x^2) =$$

$$= 2(2 + 2x + 2x^2 + 3x + 3x^2 + 3x^3 + x^3 + x^4 + x^5) =$$

$$= 4 + 10x + 10x^2 + 8x^3 + 2x^4 + 2x^5$$

$$\text{Загальна кількість комбінацій } m_{\Sigma} 6^2 = 36; \sum G_i = 36.$$

Розподіл ймовірностей:

$S_i$	0	1	2	3	4	5	$\Sigma P(S_i)$
$P(S_i)$	4/36	10/36	10/36	8/36	2/36	2/36	1

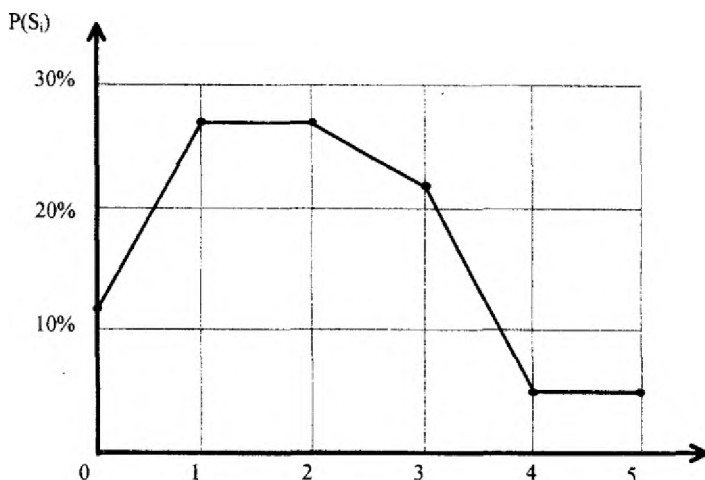


Рис. 2.6

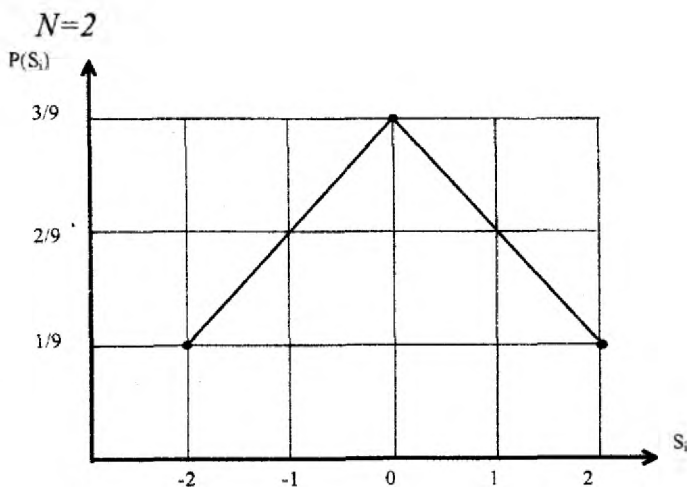
### Задача 2.27.

*Кидається  $N$  кубиків, на кожному з яких по дві протилежні площини містять: "-1" – програш, "0" – нічия, "+1" – виграш. Побудувати розподіл сумарних результатів  $P(S_i)$  для  $N=2$ ;  $N=3$  кубиків.*

Розв'язок.

Базовий поліном задано у вигляді:  $Q_0 = q^{-1} + 1 + q$ .  
Тоді для  $N=2$  число можливих комбінацій дасть декартовий добуток  $Q_0 \times Q_0$ .

Це дозволяє побудувати графік ймовірностей (рис. 2.7) (одна доля  $-1/9$ ).



**Рис.2.7**

\*) Зробити комп'ютерний експеримент. Інтервал випадкових чисел  $\{0...1\}$  розбити на 3 інтервали :

$$\{0...0,3333\} \rightarrow (-1)$$

$$\{0,3333...0,6666\} \rightarrow (0)$$

$$\{0,66667...1\} \rightarrow (1)$$

Для  $N=3$  розподіл можливих комбінацій знайдемо з декартового добутку

$$Q_0 \times Q_0 \times Q_0 = (q^{-1} + 1 + q)^3 = q^{-3} + 3q^{-2} + 6q^{-1} + 7 + 6q + 3q^2 + q^3.$$

Тоді графік розподілу  $P(S_i)$  матиме вигляд

(рис. 2.8) (одна доля  $-\frac{1}{27} = \frac{1}{3^N}$ )

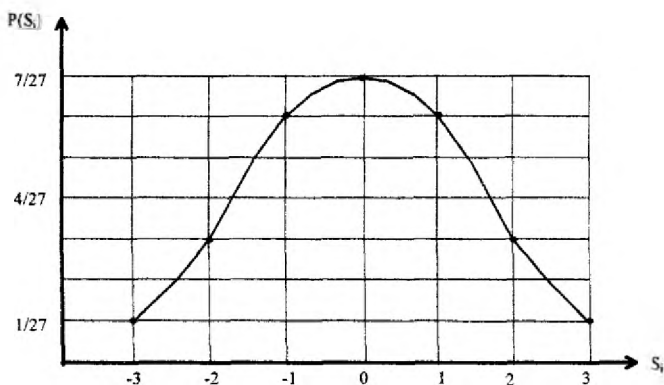


Рис.2.8

\*) Зробити програму, та комп'ютерне моделювання для  $N=3$ .

## 2.6. Закони розподілу випадкових величин в теорії надійності .

### 2.6.1. Нормальний розподіл .

Нормальний (Гаусів) розподіл найчастіше зустрічається і є одним із основних законів математичної теорії випадкових величин .

Нормальний розподіл є результатом дії на випадкову величину великої кількості рівноправних факторів. В теорії надійності нормальним законом описується напрацювання на відмову при зношуванні та старінні.

Щільність розподілу можна знайти із виразу :

$$f(x) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}}, \quad (2.30)$$

де  $\bar{x}$ ,  $S$  – відповідно математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення (стандарт) випадкової величини  $x$ , які можна визначити:

$$\bar{x} = M(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.31)$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.32)$$

В свою чергу при безперервній обробці масиву в (2.23) доцільно звільнитися від  $\bar{x}$ , яке можна визначити тільки тоді (2.31), якщо відомо весь масив.

Виконаємо перетворення :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n 1 = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \cdot n = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Як слідує із (2.33), тепер можна обробляти масив почленно, не утримуючи в пам'яті комп'ютера всіх його членів. Тоді:

$$S = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}} \approx \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left( \frac{\sum x_i}{n} \right)^2} \quad (2.34)$$

Інтегральна функція розподілу має вигляд :

$$F(x) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}\right] dx \quad (2.35)$$

Функцію надійності знайдемо, як:

$$P(x) = 1 - F(x) \quad (2.36)$$

Так як інтеграл (2.35) не береться в квадратурах, для практичної роботи, в тому числі і для задач теорії надійності – доцільно ввести заміну :

$$U(P) = \frac{x - \bar{x}}{S} \quad (2.37)$$

і використовувати :

$$\begin{aligned} F(U_p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{U_p} \exp\left(-\frac{U_p^2}{2}\right) dU_p = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{U_p} \exp\left(-\frac{U_p^2}{2}\right) dU_p = \\ &= \frac{1}{2} + \Phi(U_p) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$U_p$  будемо називати квантилем нормального розподілу (див. додаток 1), і надзвичайно широко застосовувати в практичних задачах.

Наприклад, необхідно визначити ймовірність того, що випадкова величина  $x$  потрапляє в заданий інтервал  $[x_1; x_2]$ . Тоді:

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq x \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1) = \\ &= \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}\right] dx - \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}\right] dx = \\ &= \Phi(U_{p_2}) - \Phi(U_{p_1}) \end{aligned} \quad (2.39)$$



### Задача 2.28.

*Визначити ймовірність безвідмовної роботи шарикопідшипника на протязі  $t=1000$  годин, якщо ресурс по зношуванню підлягає нормальному закону та має параметри:  $\bar{t} = 3000$  год;  $S_t = 1000$  год.*

Розв'язок.

$$U_p = \frac{t - \bar{t}}{S_t} = \frac{1000 - 3000}{1000} = -2,0$$

По таблиці квантилів для  $U_p = -2$  знаходимо  $P(t)=0,977$ .

Відповідь :  $P(t) = 0,977$ .

### 2.6.2. Експоненційний розподіл.

Цей закон дозволяє прогнозувати надійність роботи технічної системи в період її нормальної експлуатації , коли відмови мають постійну інтенсивність  $\lambda$  . Експоненційний розподіл часто називають основним законом надійності . Головна перевага цього закону в тому, що він має всього один параметр.

Експоненційним розподілом описується час безвідмовної роботи складних технічних систем після припрацювання і до появи поступових відмов , тобто на другій (середній ) стадії експлуатації. Такими системами можуть бути: машини, механізми, вузли, елементи радіоелектронного обладнання. Крім того, цей закон будемо використовувати для визначення стратегії технічного обслуговування складних технічних систем ( в тому числі автомобілів та їх систем), а також при визначенні стратегії відновлення цих технічних систем.

Цим законом часто користуються і для прогнозування часу безвідмовної роботи технічних систем з великим числом послідовно з'єднаних елементів, якщо кожен із елементів не впливає на відмови системи.

Експоненційний закон розподілу є частковим випадком розподілу Вейбулла та гама-розподілу.

Ймовірність безвідмовної роботи визначається:

$$P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda dt\right], \quad (2.40)$$

що для  $\lambda = \text{const}$  дає:  $P(t) = e^{-\lambda t}$ . (2.41)

Якщо (як це буває в багатьох випадках теорії надійності) інтенсивність відмов  $\lambda \leq 0,1$  то, після розкладання в ряд:

$$P(t) = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \approx 1 - \lambda t. \quad (2.42)$$

З (2.41) знаходимо щільність розподілу:

$$f(t) = -\frac{dP(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \quad (2.43)$$

і функція розподілу:

$$F(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (2.44)$$

Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення відповідно знаходимо:

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{1}{\lambda}; \\ S(t) &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

### Задача 2.29.

*Напрацювання на відмову дизельного двигуна в період нормальної експлуатації підлягає*

експоненційному закону розподілу з параметром  $\lambda = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ год}^{-1}$ . Визначити ймовірність безвідмовної роботи двигуна за час  $t = 150 \text{ год}$  та середнє значення напрацювання на відмову.

Розв'язок.

$$P(t = 150 \text{ год}) = e^{-\lambda t} = e^{-4,3 \cdot 10^{-4} \cdot 150} = 0,937$$

$$M(t) = T_0 = \frac{1}{\lambda} = 2326 \text{ год}.$$

Відповідь:  $P(t) = 0,937$ ;  $M(t) = 2326 \text{ год}$ .

### Задача 2.30.

Середнє напрацювання на відмову дизельного двигуна Д-50 в період нормальної експлуатації становить 1950 год. Вважаючи розподіл напрацювань на відмову експоненційним, визначити ймовірність безвідмовної роботи двигуна за час  $t_1 = 100 \text{ год}$   $t_2 = 200 \text{ год}$ .

Розв'язок.

$$P(t_1 = 100 \text{ год}) = e^{-\lambda t_1} = e^{-\frac{100}{1950}} = 0,950;$$

$$P(t_2 = 200 \text{ год}) = e^{-\frac{200}{1950}} = 0,903.$$

Відповідь:  $P(t_1) = 0,950$ ;  $P(t_2) = 0,903$

### 2.6.3. Нормально-логарифмічний розподіл.

Якщо в співвідношеннях (2.30) – (2.39) ввести формальну заміну

$$\ln t = x, \tag{2.46}$$

то будемо мати необхідні формули для розрахунків теорії надійності, коли випадкова величина (наприклад, напрацювання на відмову) підлягає нормально-логіарифмічному розподілу:

щільність розподілу

$$f(t) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln t_i - \overline{\ln t})^2}{2S^2}\right]; \quad (2.47)$$

математичне сподівання

$$a = \overline{\ln t} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln t_i}{n}; \quad (2.48)$$

середнє квадратичне відхилення

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \overline{\ln t})^2}. \quad (2.49)$$

Ймовірність безвідмовної роботи знаходимо в залежності від значення квантиля  $U_p$ :

$$U_p = \frac{\ln t_i - \overline{\ln t}}{S}. \quad (2.50)$$

В теорії надійності нормально-логіарифмічний закон використовують для оцінки напрацювань на відмову в умовах втоми, зношування, довготривалої міцності, термовтоми тощо, тобто за умов, коли провідними є термоактиваційні процеси (див. розділ 4).

### Задача 2.31.

*Визначити ймовірність безвідмовної роботи колінчастого вала двигуна на протязі  $t = 1000$  год, якщо його напрацювання на відмову розподілені по нормально-*

логарифмічному закону з параметрами:  $\overline{\ln t} = 9,5$ ;  
 $S_{\ln t} = 1,6$ .

Розв'язок.

Квантиль розподілу:

$$U_p = \frac{\ln t - \overline{\ln t}}{S_{\ln t}} = \frac{6,908 - 9,500}{1,600} = -1,620.$$

За таблицями квантилів:  $P(t) = \Phi(U_p) = 0,947$ .

#### 2.6.4. Розподіл Вейбулла.

В задачах теорії надійності використовується для оцінки надійності складних технічних систем. Даний розподіл є двохпараметричним і досить універсальним, так як при граничній зміні параметрів переходить в нормальний, нормально-логарифмічний, експоненційний та інші.

Щільність розподілу:

$$f(t) = \alpha \cdot \lambda t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t^\alpha), \quad (2.51)$$

де  $\alpha$  - параметр форми розподілу,  $\lambda$  - масштабний параметр. При  $\alpha=1$  розподіл Вейбулла переходить в експоненційний.

Функція розподілу:

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t^\alpha). \quad (2.52)$$

Тоді функція надійності (ймовірність безвідмовної роботи) може бути знайдена, як:

$$P(t) = 1 - F(t) = \exp(-\lambda t^\alpha). \quad (2.53)$$

Математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення відповідно знаходяться:

$$M(t) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\sqrt{\lambda}};$$

$$S(t) = \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}, \quad (2.54)$$

де  $\Gamma(\alpha)$  - гамма-функція:  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ . Для

знаходження  $\Gamma(n + \alpha)$  для цілих додатних  $n$  корисно знати наступні властивості гамма-функції:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1; \quad \Gamma(n) = (n-1)!; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

$$\Gamma(1+x) \approx x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} *$$

$$* \left[ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + \dots \right];$$

(2.55)

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n); \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

### Задача 2.32.

*Визначити ймовірність безвідмовної роботи генератора на протязі  $t = 300$  год, якщо напрацювання на відмову підлягають закону Вейбула з параметрами:  $\alpha = 1,3$ ;*

$$\lambda = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{4000 \text{ год}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ год}^{-1}.$$

Розв'язок.

$$P(t) = \exp(-\lambda \cdot t^\alpha) = \exp(-2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 300^{1,3}) = 0,660.$$

Відповідь:  $P(t) = 0,660$ .

## 2.6.5. Розподіл Пуассона.

Цьому розподілу підлягають ймовірності появи раптових відмов в складних технічних системах (наприклад, число відмов однотипного обладнання за заданий проміжок часу, кількість радіоактивних розпадів за заданий проміжок часу, кількість розмов на телефонній станції за заданий проміжок часу, час відновлення складних технічних систем в ремонті і т.д.)

Для цілих значень  $m = 0; 1; 2$ . Щільність ймовірності дискретного розподілу Пуассона має вид:

$$P_m(t) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad (2.56)$$

а функція розподілу:

$$F(t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \quad (2.57)$$

Математичне сподівання і дисперсія:  $M(t) = \lambda$ ;  
 $D(t) = \lambda$ .

## 2.6.6. Біноміальний розподіл.

Як було показано раніше (див. розділи 2.4-2.5), біноміальний розподіл ймовірностей можна використовувати, коли маємо послідовність  $n$  незалежних випробувань, в кожному з яких подія може настати з однією і тією ж ймовірністю  $P$ .

Біноміальний розподіл широко застосовується в теорії надійності для оцінки безвідмовної роботи технічних систем, що працюють в циклічному режимі.

Щільність розподілу має вигляд:

$$P_m = C_n^m P^m (1-P)^{n-m}, m = 0; 1; 2; \dots \quad (2.58)$$

а дискретна функція розподілу:

$$F(t) = \sum_{m < t} P_m = \sum_{m < t} C_n^m P^m (1-P)^{n-m} \quad (2.59)$$

Математичне сподівання і дисперсію можна знайти:

$$M(t) = n \cdot P; \quad D(t) = n \cdot P(1-P). \quad (2.60)$$

Додаток 1.

**Таблиця квантилів нормального розподілу**

Квантиль, $U_p$	Ймовірність безвідмовної роботи, $P(t)$	Квантиль, $U_p$	Ймовірність безвідмовної роботи, $P(t)$	Квантиль, $U_p$	Ймовірність безвідмовної роботи, $P(t)$
0,000	0,5000	- 1,100	0,8643	- 2,326	0,9900
- 0,100	0,5398	- 1,200	0,8849	- 2,400	0,9918
- 0,126	0,5500	- 1,282	0,9000	- 2,409	0,9920
- 0,200	0,5793	- 1,300	0,9032	- 2,500	0,9938
- 0,253	0,6000	- 1,400	0,9192	- 2,576	0,9950
- 0,300	0,6179	- 1,500	0,9332	- 2,600	0,9953
- 0,385	0,6500	- 1,600	0,9452	- 2,652	0,9960
- 0,400	0,6554	- 1,645	0,9500	- 2,700	0,9965
- 0,500	0,6915	- 1,700	0,9554	- 2,748	0,9970
- 0,524	0,7000	- 1,751	0,9600	- 2,800	0,9974
- 0,600	0,7257	- 1,800	0,9641	- 2,878	0,9980
- 0,674	0,7500	- 1,881	0,9700	- 2,900	0,9981
- 0,700	0,7580	- 2,000	0,9772	- 3,000	0,9986
- 0,800	0,7881	- 2,054	0,9800	- 3,090	0,9990
- 0,842	0,8000	- 2,100	0,9821	- 3,291	0,9995
- 0,900	0,8159	- 2,170	0,9850	- 3,500	0,9998
- 1,000	0,8413	- 2,200	0,9861	- 3,719	0,9999
- 1,036	0,8500	- 2,300	0,9893		



### **3. Забезпечення надійності технічних систем.**

#### **3.1. Поняття надійності технічної системи.**

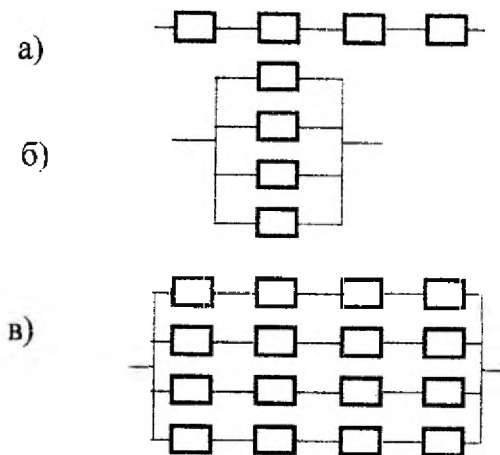
Як було показано вище, деталі, вузли та механізми, що утворюють машину, в залежності від ієрархічного рівня, можуть розглядатись як елементи тої чи іншої підсистеми. Як правило, на підсистеми ділять складні системи.

Елементи чи підсистеми в системі зв'язані між собою. Ці зв'язки можуть бути:

- послідовними;
- паралельними;
- змішаними (комбінованими).

Причому, на відміну від електротехніки чи електроніки, в теорії надійності визначення зв'язків має більш широке значення. Наприклад, до послідовно з'єднаних систем відносять всі системи, в яких відмова одного елемента призводить до відмови всієї системи. Наприклад, в механічній передачі підшипники, хоча і працюють паралельно, але відмова кожного із підшипників призводить до відмови всієї передачі, як системи, тому таке з'єднання з точки зору теорії надійності будемо називати послідовним. Така ж ситуація з колесами в чотириколісному автомобілі - відмова кожного з коліс призводить до відмови автомобіля в цілому, тому повинна розглядатись як послідовна. Хоча в одній із серій "Ну, постривай!" Вовк продемонстрував інший зразок надійності технічної системи (з резервуванням): втрата трьох коліс, частини кузова та двигуна не призвели до відмови (зупинки) гоночного автомобіля. Очевидно, в світі мультиплікації це можливо.

Приклади паралельних систем - це машини з резервованими системами: багатомоторні літаки, космічні апарати, гальмівні системи з резервуванням тощо. В таких системах відмова одного елемента чи підсистеми не приводить до відмови всієї системи. З практичної точки зору важливо визначити ймовірність безвідмовної роботи системи при відмові одного, двох і т.д. елементів.



**Рис. 3.1.** Послідовне, паралельне та паралельно-послідовне з'єднання елементів.

На *рис.3.1* наведені можливі варіанти з'єднань елементів. Для послідовного з'єднання елементів (*рис.3.1,а*) ймовірність відмови системи можна визначити, як ймовірність добутку, тобто одночасного прояву незалежних подій:

$$P_c(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \dots \cdot P_n(t) \quad (3.1)$$

Якщо  $P_1(t) = P_2(t) = \dots = P_n(t)$ ,

$$\text{то } P_c(t) = P_1^n \quad (3.2)$$

і тому надійність складних систем при послідовному з'єднанні елементів буде низькою. Наприклад, якщо в системі 20 послідовно з'єднаних

елементів, надійність кожного з яких  $P_1 \geq 0,95$ , то надійність системи

$$P_c(t) = 0,95^{20} \approx 0,36.$$

Інколи, при високих значеннях  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$  ймовірність безвідмовної роботи буває зручно визначити через ймовірності відмов:

$$\begin{aligned} P_c(t) &= [1 - Q_1(t)] \cdot [1 - Q_2(t)] \cdot \dots \cdot [1 - Q_n(t)] \approx \\ &\approx 1 - [Q_1(t) + Q_2(t) + \dots + Q_n(t)] = 1 - \sum_{i=1}^n Q_i(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

В наближенні (3.3) добутками  $Q_i(t) \cdot Q_j(t), Q_i(t) \cdot Q_j(t) \cdot Q_k(t)$  знехтували, як нескінченно малими більш високого порядку малості.

Наприклад, для системи, що складається з десяти послідовно з'єднаних елементів з ймовірністю безвідмовної роботи кожного елемента  $P_1(t) = 0,99$ ,

$$P_c(t) \approx 1 - nQ_1(t) = 1 - 10 \cdot 0,01 = 0,90.$$

За точною формулою

$$P_c(t) = 0,99^{10} = 0,904,$$

що дало похибку  $\approx 0,4\%$ , причому похибка йде в запас надійності.

Для паралельної схеми з'єднання (системи з резервуванням, рис. 3.1, б):

$$P_c(t) = 1 - Q_1(t) \cdot Q_2(t) \cdot \dots \cdot Q_n(t). \quad (3.4)$$

$$\text{Для } Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n \text{ це дає: } P_c(t) = 1 - Q_1^n(t) \quad (3.5)$$

Із (3.4) та (3.5) видно, що при зростанні  $n$  ймовірність безвідмовної роботи системи зростає. Для наведеного вище прикладу  $n=20$ ;  $P_1 = 0,95$  маємо:

$$P_c(t) = 1 - 0,05^{20} = 1 - 9,5 \cdot 10^{-27} \approx 1.$$

Навіть для елементів з низькою надійністю паралельне з'єднання дозволяє створити високу надійність системи. Наприклад, для  $n = 10$ ,  $P_1(t) = 0,6$  маємо

$$P_c(t) = 1 - 0,4^{10} = 0,9999.$$

### Задача 3.1.

*Нехай в системі відповідальний за надійність вузол А, ймовірність безвідмовної роботи якого за заданий проміжок часу  $\tau$  дорівнює  $P$ . Для підвищення надійності системи вузол А вирішили продублювати. Скільки разів необхідно дублювати вузол А, щоб ймовірність безвідмовної роботи системи перевищила заданий рівень  $\rho$  ( $\rho > P$ )?*

Розв'язок.

Ймовірність відмови вузла А:  $Q = 1 - P$ . Якщо число вузлів А, з'єднаних паралельно, буде  $n$ , то ймовірність безвідмовної роботи системи

$$1 - (1 - P)^n.$$

Необхідно знайти таке  $n$ , щоб виконувалась нерівність:

$$1 - (1 - P)^n \geq \rho.$$

Розв'язуємо цю нерівність відносно  $n$ :

$$n \geq \frac{\ln(1 - \rho)}{\ln(1 - P)}.$$

Нехай надійність вузла А  $P = 0,9$ , і необхідно забезпечити надійність системи  $\rho = 0,998$ . Тоді кратність дублювання вузла А:

$$n \geq \frac{\ln(1 - 0,998)}{\ln(1 - 0,9)} = 2,699.$$

Вибираємо  $n = 3$ . При цьому  $\rho = 1 - (1 - 0,9)^3 = 0,999$ .

Для решітчастого паралельно-послідовного з'єднання для  $n \times n$  елементів можна застосувати наближення кластерної моделі:

$$P_c \cong \frac{1}{1 + \exp[n(P_c - P_1)]}, \quad (3.6)$$

де  $P_*$  - критичне значення ймовірності. Для плоскої ортогональної моделі  $P_* \cong 0,58$ .

Як видно із (3.6), для  $P_1 > P_*$  можна досягти надзвичайно високої ймовірності  $P_c(t)$  навіть для  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.2. Методи прогнозування надійності технічних систем.

Кількісна оцінка надійності може:

- констатувати фактичний рівень надійності;
- прогнозувати зміни рівня надійності при експлуатації машини в майбутньому.

Прогнозування показників надійності має надзвичайно важливе значення для оцінки технічного стану об'єкта (машини, вузла, деталі).

Будемо виділяти три стани прогнозування:

- ретроспекцію;
- діагностику;
- прогноз.

Ретроспекція - це дослідження динаміки стану машини в минулому, визначення тенденції зміни параметрів стану. Ця інформація дозволяє створити динамічну модель технічного стану машини.

Діагностика - це дослідження границь зміни параметрів стану елементів системи, вибір методів та засобів вимірювання, оцінки технічного стану, методів прогнозування, способів оцінки достовірності прогнозу.

Прогноз - це передбачення змін параметрів стану елементів, що дає можливість передбачити технічний стан (рівень надійності) всієї машини в майбутньому.

Іншими словами, ретроспекція - це минуле машини, діагностика - це теперішній технічний стан машини, прогноз - це майбутнє, причому майбутнє в вигляді прогнозу повертається до теперішнього та впливає на нього. До речі, ретроспекція в вигляді динамічної моделі також впливає на теперішній стан, т. я. дозволяє змінити (покращити) стратегію технічного обслуговування, їх періодичність та рівень. Керуючи діапазонами допустимих значень параметрів машини (розмірів деталей, зазорів в з'єднаннях, сил в важелях, тиску технологічних рідин та ін.) при проведенні регулювань та ремонтів, можна задавати певний рівень безвідмовності та довговічності.

Виділимо *основні задачі прогнозування надійності машин*:

1. Передбачення кінетики надійності даного класу виробів з розвитком рівня виробництва, впровадження нових матеріалів, технологій, підвищення характеристик міцності матеріалів та деталей (новими технологіями обробки, раціональними конструкторськими рішеннями).

2. Оцінка надійності виробу на стадії проектування. Показники надійності в даному випадку можна прогнозувати за допомогою аналітичних методів, комп'ютерного та фізичного моделювання.

3. Прогноз показників надійності конкретної машини на основі прямих замірів її параметрів.

Прогнозуючі параметри розділяють на основні та допоміжні. До основних будемо відносити такі, перевищення яких призводить до відмови вузла чи машини. Допоміжні параметри не впливають на працездатність виробу, а є лише наслідком зміни основних

параметрів. На основі залежностей зміни основних параметрів прогнозують надійність машини на заданий проміжок часу.

4. Прогнозування надійності деякої множини виробів на основі результатів випробовувань обмеженої кількості дослідних зразків (оцінка надійності генеральної сукупності виробів за результатами випробовувань вибірки).

5. Прогноз надійності машини в екстремальних умовах (високі чи низькі температури, агресивне середовище, високі рівні радіації).

Сучасні методи прогнозування можуть бути поділеними на три основні групи:

- 1) метод експертних оцінок;
- 2) метод моделювання (комп'ютерного, фізичного, імітаційного тощо);
- 3) статистичні методи (на основі інтерполяції чи екстраполяції даних, отриманих в результаті попередніх досліджень).

Глибину ретроспективи визначають за співвідношенням:  $\tau_{\text{ретр.}} = k \cdot \tau_{\text{прогн.}}$ , де  $k = 2 \dots 3$ .

Зупинимося більш детально на статистичних методах прогнозування.

#### Метод екстраполяції.

Якщо відомо значення функції  $f(x)$  в точках  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , що належать інтервалу  $(x_0; x_n)$ , то визначення значень функції  $f(x)$  в точках  $\{x\}$ , що лежать поза інтервалом  $(x_0; x_n)$ , будемо називати *екстраполяцією*. При екстраполяції показників надійності змінна  $x$  - це час.

Прогноз складається з кількох етапів:

1. Аналіз вихідних даних та побудова графіка зміни прогнозуючого параметра в часі.

2. Побудова математичної моделі та апроксимація експериментальних даних.

3. Екстраполяція математичної моделі на заданий проміжок часу.

### 3.3. Ймовірність безвідмовної роботи за заданим критерієм.

Для оцінки працездатності деталей машин існує ряд критеріїв:

- короткочасна міцність;
- довготривала міцність;
- міцність при втомі;
- стійкість при зношуванні;
- теплостійкість;
- жорсткість;
- вібростійкість та інші.

При розрахунках зрівнюються граничні значення параметрів  $X_{lim}$  з їх розрахованими значеннями ( $X$ ) в умовах даної задачі: характеристиками міцності, граничного навантаження, деформаціями, теплостійкістю матеріалів та мастил, граничними частотами та амплітудами коливань тощо. При цьому має виконуватись умова:

$$X \leq \frac{X_{lim}}{n} \quad (3.7)$$

де  $n$  - коефіцієнт запасу. При ймовірносних методах розрахунків  $X$  та  $X_{lim}$  розглядаються, як випадкові величини. Умова для забезпечення  $P = 50\% \in \bar{X} - \bar{X}_{lim} = 0$ , а для забезпечення ймовірності  $P$  маємо:

$$\bar{X} - \bar{X}_{lim} = U_p S, \quad (3.8)$$



де  $\bar{X}$ ,  $\bar{X}_{lim}$  - середні значення величин  $X$  та  $X_{lim}$ ;  
 $S = \sqrt{S_{x_{lim}}^2 + S_x^2}$  - середнє квадратичне відхилення різниці  
 двох випадкових величин  $X_{lim}$  та  $X$ ;  $U_p$  - квантиль  
 нормального розподілу. Звідси основне співвідношення  
 для оцінки ймовірності безвідмовної роботи  $P$  за заданим  
 критерієм:

$$U_p = - \frac{\bar{X}_{lim} - \bar{X}}{\sqrt{S_{x_{lim}}^2 + S_x^2}} \quad (3.9)$$

Маючи коефіцієнт запасу для середніх значень:

$$\bar{n} = \frac{\bar{X}_{lim}}{\bar{X}} \quad (3.10)$$

та коефіцієнти варіації

$$V_{x_{lim}} = \frac{S_{x_{lim}}}{\bar{X}_{lim}}; \quad V_x = \frac{S_x}{\bar{X}}, \quad (3.11)$$

можна представити (3.9) у вигляді:

$$U_p = - \frac{n-1}{\sqrt{n^2 V_{x_{lim}}^2 + V_x^2}} \quad (3.12)$$

Для оцінок середнього значення  $\bar{X}_i$  та середнього  
 квадратичного відхилення  $S_i$  можна застосувати формули:

$$\bar{X}_i \cong \frac{X_{i \max} + X_{i \min}}{2}, \quad (3.13)$$

$$S_i \cong \frac{X_{i \max} - X_{i \min}}{m}, \quad (3.14)$$

де  $m$  число, що залежить від числа випробовувань:

N	2	5	10	20	50	100
m	1,13	2,3	3,1	3,7	4,7	5

З достатньою для інженерних розрахунків точністю,  
 коли  $X_{i \max}$  та  $X_{i \min}$  - нормовані (наприклад, технологічні

допуски), вважають, що поле допусків покривається інтервалом  $6S_i$  (закон трьох сигм в кожную сторону від середнього значення). Це дає:

$$S_i = \frac{X_{i\max} - X_{i\min}}{6} \quad (3.15)$$

Це припущення відповідає ймовірності знаходження змінної  $X_i$  в полі допуску  $P = 0,997$ . В інших випадках ймовірність  $P$  знаходиться із співвідношення:

$$S_i = \frac{X_{i\max} - X_{i\min}}{2U_p} \quad (3.16)$$

причому  $2U_p$  вибирають в залежності від  $P$ :

$P$	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995	0,999
$2U_p$	3,29	3,92	4,66	5,16	5,62	6,38

В більшості випадків, що будуть нам зустрічатись, коли це особливо не обумовлено умовами задачі, а відомі лише  $X_{i\max}$  та  $X_{i\min}$ , для визначення  $U_p$  в (3.12) можна використати:

$$\bar{n} = \frac{X_{\lim}^+ + X_{\lim}^-}{X^+ + X^-}; \quad V_{X_{\lim}} = \frac{1}{3} \left( \frac{X_{\lim}^+ - X_{\lim}^-}{X_{\lim}^+ + X_{\lim}^-} \right)^2;$$

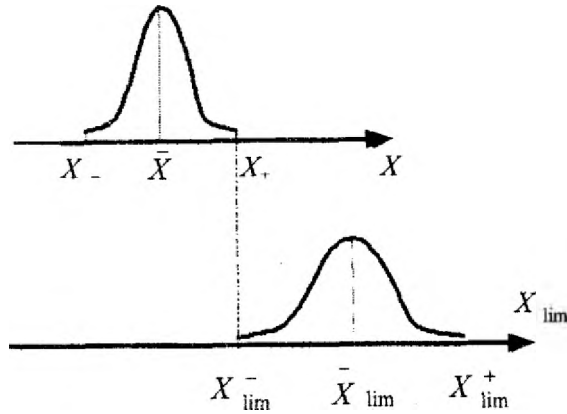
$$V_X = \frac{1}{3} \left( \frac{X^+ - X^-}{X^+ + X^-} \right)^2.$$

### Задача 3.2.

Нехай  $X_{\lim}^+ - X_{\lim}^- = X^+ - X^- = a$ , (див. рис.3.2).

Визначити  $U_p$  та ймовірність безвідмовної роботи по критерію  $X$ , якщо  $\{X\}$  та  $\{X_{\lim}\}$  розподілені нормально.

Розв'язок:



**Рис. 3.2**

$$\bar{n} = \frac{X_+ + a + X_- + 2a}{X_- + X_+ + a} = \frac{2X_- + 3a}{2X_- + a} = \frac{2 + 3Z}{2 + Z},$$

де  $Z = \frac{a}{X_-}$ .

Аналогічно:

$$V_{X_{\text{lim}}} = \frac{1 X_- + 2a - (X_- + a)}{3 X_- + 2a + X_- + a} = \frac{1}{3} \frac{a}{2X_- + 3a} = \frac{1}{3} \frac{Z}{2 + Z};$$

$$V_x = \frac{1 X_- + a - X_-}{3 X_- + a + X_-} = \frac{1}{3} \frac{a}{2X_- + a} = \frac{1}{3} \frac{Z}{2 + Z}.$$

Це дає:

$$U_p = - \frac{\bar{n} - 1}{\sqrt{n^2 V_{X_{\text{lim}}}^2 + V_x^2}} = - \frac{\frac{2 + 3Z}{2 + Z} - 1}{\sqrt{\left(\frac{2 + 3Z}{2 + Z}\right)^2 \frac{1}{9} \left(\frac{Z}{2 + 3Z}\right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{Z}{2 + Z}\right)^2}} =$$

$$= - \frac{2Z}{\frac{2 + Z}{32 + Z} \sqrt{2}} = -3\sqrt{2} \approx -4,24$$

Звідки ймовірність безвідмовної роботи  $P > 0,9999$ .

Це - досить сильний результат, який дозволяє констатувати, що для

$$X_{lim}^+ - X_{lim}^- = X^+ - X^-,$$

при  $X_{lim}^- = X^- - U_p = -3\sqrt{2} = const$ , тобто не залежить від потужності множин  $\{X\}$  та  $\{X_{lim}\}$ , а ймовірність безвідмовної роботи  $P > 0,9999$ .

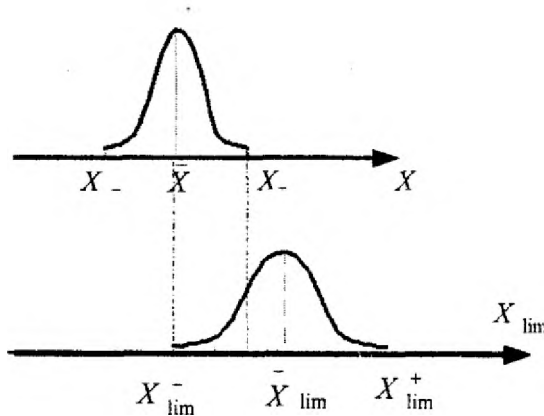
### Задача 3.3.

*Дано:*

$$\begin{cases} X_{lim}^+ - X_{lim}^- = X^+ - X^- = a; \\ X_{lim}^- = X^- - \beta a. \end{cases}, \quad (п.2)$$

*тобто множини  $\{X\}$  та  $\{X_{lim}\}$  перетинаються:  $\{X_{lim}\} \cap \{X\} \neq \emptyset$  (див. рис.3.3).*

*Визначити  $U_p$  та ймовірність безвідмовної роботи по критерію  $X$ , якщо  $\{X\}$  та  $\{X_{lim}\}$  розподілені нормально.*



**Рис. 3.3.**

Розв'язок.

У відповідності з задачею 3.2:

$$\bar{n} = \frac{X_- + a(1-\beta) + X_- + a(1-\beta) + a}{X_- + X_- + a} = \frac{2X_- + a(3-2\beta)}{2X_- + a} = \frac{2 + Z(3-2\beta)}{2 + Z}$$

$$V_{X_{lim}} = \frac{1}{3} \frac{X_- + a(2-\beta) - [X_- + a(1-\beta)]}{X_- + a(2-\beta) + X_- + a(1-\beta)} = \frac{1}{3} \frac{a}{2X_- + a(3-2\beta)} = \frac{1}{3} \frac{Z}{2 + Z(3-2\beta)}$$

$$V_X = \frac{1}{3} \frac{a}{2X_- + a} = \frac{1}{3} \frac{Z}{2 + Z}$$

Тоді:

$$U_p = - \frac{\frac{2 + Z(3-2\beta)}{2 + Z} - 1}{\sqrt{\left[\frac{2 + Z(3-2\beta)}{2 + Z}\right]^2 \frac{1}{9} \frac{Z^2}{[2 + Z(3-2\beta)]^2} + \frac{1}{9} \left(\frac{Z^2}{2 + Z}\right)^2}} =$$

$$= - \frac{\frac{2Z(1-\beta)}{2 + Z}}{\frac{1}{3} \frac{Z}{2 + Z} \sqrt{2}} = -3\sqrt{2}(1-\beta)$$

Досить несподіваний результат: квантиль лінійно залежить від коефіцієнту перетину множин  $\{X\}$  та  $\{X_{lim}\}$ !

При  $\beta = 0$  маємо результат задачі 3.2, а при  $\beta = 1$  (повний перетин)  $-U_p = 0$ , тобто  $P = 0,5$ .

**Таблиця 3.1.**

$\beta$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$U_p$	-4,242	-3,818	-3,394	-2,9698	-2,5456	-2,1213	-1,6971	-1,2727	-0,8485	-0,4243	0
$P$	0,9999	0,9999	0,9998	0,998	0,994	0,983	0,955	0,898	0,801	0,664	0,50

Результати таблиці 3.1 показують, як буде змінюватись ймовірність безвідмовної роботи машини чи вузла за розрахунковим параметром  $X$  (міцність, граничне навантаження, деформація, теплостійкість тощо) при порівнянні з їх граничними значеннями  $X_{lim}$ . Нагадаємо, що дана задача суттєво спрощена:

$$\begin{cases} X_{lim}^+ - X_{lim}^- = X^+ - X^- = a; \\ X_{lim}^- = X^+ - \beta a. \end{cases}$$

При цьому для  $\beta = 0,3$  (30% перетину множин  $\{X_{lim}\}$  та  $\{X\}$ ) маємо ймовірність безвідмовної роботи 0,998 !

### Задача 3.4.

*Визначити ймовірність безвідмовної роботи вузла в діапазоні напрацювань  $10^5 \dots 10^6$  годин, якщо випробовування великої партії даних вузлів при даних навантаженнях дали граничні значення напрацювань на відмову  $10^{5,5} \dots 10^{6,5}$ . Закон розподілу напрацювань на відмову близький до нормально-логарифмічного.*

Розв'язок.

$$\tau_- = 10^6 \text{ год}; \quad \tau_+ = 10^6 \text{ год};$$

$$\tau_{lim}^- = 10^{5,5} \text{ год}; \quad \tau_{lim}^+ = 10^{6,5} \text{ год}.$$

Переходимо до нормально-логарифмічних змінних:

$$X^- = \lg \tau_- = 5; \quad X^+ = 6;$$

$$X_{lim}^- = 5,5; \quad X_{lim}^+ = 6,5.$$

Так як  $X^+ - X^- = X_{lim}^+ - X_{lim}^-$ , то можна використати таблицю 1. Визначимо  $\beta$ :

$$\beta = \frac{X^- - X_{lim}^-}{X^+ - X^-} = \frac{6 - 5,5}{6 - 5} = 0,5.$$

З таблиці 1 для  $\beta = 0,5$  маємо  $U_p = -2,1213$ . Звідки ймовірність безвідмовної роботи за даних умов  $P \geq 0,983$ .

### 3.3.1. Ймовірність безвідмовної роботи за критерієм міцності.

Ймовірність безвідмовної роботи  $P$  за критерієм міцності (ймовірність неруйнування) визначається як ймовірність того, що розраховані значення механічних напруг  $\sigma_p$  не перевищують гранично допустимих значень  $\sigma_{lim}$ . Тоді

$$U_p = \frac{\bar{\sigma}_{lim} - \bar{\sigma}_p}{\sqrt{S_{lim}^2 + S_p^2}} = \frac{\bar{n} - 1}{\sqrt{n^2 V_{lim}^2 + V_p^2}}, \quad (3.17)$$

де  $\bar{n} = \frac{\bar{\sigma}_{lim}}{\bar{\sigma}_p}$  - коефіцієнт запасу міцності за середніми значеннями напруг. На жаль, у вигляді (3.17) співвідношення для  $U_p$  придатне для зразків без концентраторів, що є надто рідкісним явищем для реальних деталей машин.

Врахувати вплив концентратора напруг в першому наближенні можна через місцеві напруги

$$\sigma_{кон} = \sigma_p \cdot k_T, \quad (3.18)$$

де  $k_T$  - коефіцієнт концентрації напруг. Для більш точного наближення необхідно використати розсіяння геометричних розмірів концентратора, чутливості матеріалу до концентрації, що набуває особливого значення при циклічному навантаженні.

### 3.3.2. Ймовірність безвідмовної роботи при механічному зношуванні.

Якщо відомо граничне значення розміру  $L_{\text{lim}}$ , при якому деталь вилучають з експлуатації, середнє значення  $\bar{L}_n$  та середнє квадратичне відхилення початкового розміру  $S_L$ , а також інтенсивність зношування  $\bar{I}$  та її коефіцієнт варіації  $V_I$  (за табличними даними чи зі спеціальних експериментів), то ймовірність безвідмовної роботи деталі можна визначити за квантилем  $U_p$ :

$$U_p = - \frac{\bar{n} - 1}{\sqrt{\bar{n}^2 V_L^2 + V_I^2}}, \quad (3.19)$$

де  $V_L = \frac{S_L}{L_n - L_{\text{lim}}}$  - коефіцієнт варіації розміру деталі;

$\bar{n} = \frac{L_n - L_{\text{lim}}}{IVt}$  - умовний запас по критерію

зношування;

$V$  - швидкість відносного переміщення деталей в контактї;

$t$  - заданий час роботи деталі.

### 3.3.3. Випадок кількох параметрів.

Для багатьох розрахунків, наведених вище, необхідно враховувати допоміжні фактори, які умовно враховуються коефіцієнтами (додаткові динамічні навантаження, перекося, похибки геометричних форм тощо).

Якщо змінна  $Z$  може бути представлена в вигляді:



$$Z = Y + X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = Y + \sum_{i=1}^n X_i$$

де  $Y$  - "основний" параметр,  $X_i$  - малі збурення, то:

$$Z \approx Y \left( 1 + \frac{X_1}{Y} + \frac{X_2}{Y} + \dots + \frac{X_n}{Y} \right) = Y k_1 k_2 \dots k_n,$$

$$\text{де } k_1 = 1 + \frac{X_1}{Y}; \quad k_2 = 1 + \frac{X_2}{k_1 Y}; \quad \dots \quad k_n = 1 + \frac{X_n}{k_1 k_2 \dots k_{n-1} Y}.$$

Це дозволяє отримати дві залежності для визначення коефіцієнта варіації параметра  $Z$ :

$$V_Z = \sqrt{V_Y^2 + \sum_{i=1}^n V_{k_i}^2} \quad (3.20)$$

та

$$V_Z = \sqrt{\left( \frac{V_Y}{k_1 k_2 k_3 \dots k_n} \right)^2 + \left( \frac{V_{k_1}}{k_2 k_3 \dots k_n} \right)^2 + \left( \frac{V_{k_2}}{k_3 k_4 \dots k_n} \right)^2 + \dots + V_{k_n}^2}, \quad (3.21)$$

$$\text{де } V_{k_i} = \frac{k_i - 1}{k_i} V_{X_i}; \quad V_{X_i} = \frac{S_{X_i}}{S_i}.$$

Причому (3.20) є наближеною, а (3.21) - точною залежністю для коефіцієнта варіації змінної величини  $Z$ .

Визначивши  $V_Z$  з урахуванням збурень, далі використовуємо співвідношення (3.12).

В таблиці 3.2. наведені запаси статичної міцності для основних вузлів автомобілів ЗІЛ-130 та КраЗ-256Б.

В таблиці 3.3. приводяться основні співвідношення для розрахунків ймовірності неруйнування (безвідмовної роботи) як при нормальному, так і при інших законах розподілу навантаження та несучої здатності.

Практичне застосування даних методів показано на задачах з розв'язками 3.5 - 3.6.

**Таблиця 3.2.** Запаси статичної міцності деталей автомобіля.

Авто-мобіль	Агрегат	Деталь	$M_B$	$M_P$	$n = \frac{M_B}{M_P}$
			кН · м		
ЗІЛ-130	Коробка передач	Зубчасті колеса передач: I II III IV	1,3 - 1,6	0,41	3,2 - 4,1 5,7 - 7,5 7,3 - 10,2 7,8 - 11,0
			2,2 - 3,1		
			3,0 - 4,2		
			3,2 - 4,5		
ЗІЛ-130	Карданна передача	Хрестовина	7,4 - 7,8	3,05	2,4 - 2,5
ЗІЛ-130	Головна передача	Шестерні: конічні циліндричні	8,9	3,05	2,92 2,49-2,75
			7,6 - 8,4		
КраЗ-256Б		Шестерні: конічні	14 - 21	10,8	1,3 - 1,94
ЗІЛ-130	Ведучий міст	Напівосі	20	8,85	2,26
КраЗ-256Б			42	22,24	1,89
КраЗ-256Б	Передній ведучий міст	Шарнір рівних кутових швидкостей	14 - 17	14,82	0,94-1,15

*Примітка.*  $M_B$  – момент руйнування (отриманий на випробувальному стенді),  $M_P$  – розрахований крутний момент

Таблиця 3.3. Основні співвідношення для розрахунків ймовірності неруйнування.

Закон розподілу та його параметри		Ймовірність неруйнування
Для навантаження F	Для несучої здатності R	
Нормальний $F; S_F$	Нормальний $R; S_R$	$P = 1 - \Phi\left(-\frac{R - F}{\sqrt{S_R^2 + S_F^2}}\right)$
Експоненційний $\lambda_F = \frac{1}{F}$	Експоненційний $\lambda_R = \frac{1}{R}$	$P = \frac{R}{R + F} = \frac{\lambda_F}{\lambda_F + \lambda_R}$
Експоненційний $\lambda_F = \frac{1}{F}$	Нормальний $R; S_R$	$P = 1 - \Phi\left(\frac{R}{S_R}\right) - \left[1 - \Phi\left(-\frac{R - \lambda_F S_R}{S_R}\right)\right]^*$ $* \exp\left(\frac{\lambda_F^2 S_R^2 - R \lambda_F}{2}\right)$
Нормально-логарифмічний $\ln F$ $S_{\ln F}$	Нормально-логарифмічний $\ln R$ $S_{\ln R}$	$P = 1 - \Phi\left(-\frac{\ln R - \ln F}{\sqrt{S_{\ln R}^2 + S_{\ln F}^2}}\right)$
Вейбулла $a_F; b_F; F_0$	Вейбулла $a_R; b_R; R_0$	$= 1 - \int_0^{\infty} e^y \cdot \exp\left[-\frac{a_R}{a_F} \cdot y^{\frac{1}{b_F}} + \left(\frac{R_0 - F_0}{a_F}\right)^{b_F}\right] dy$ де: $y = \left(\frac{R - R_0}{a_R}\right)^{b_R}$
Гамма $\lambda_F; \alpha_F$	Гамма $\lambda_R; \alpha_R$	$P = \frac{\Gamma(\alpha_R + \alpha_F)}{\Gamma(\alpha_R) \cdot \Gamma(\alpha_F)} \cdot B \cdot \frac{r}{r+1}(\alpha_R, \alpha_F)$ де $B \frac{r}{r+1}(\alpha_R, \alpha_F)$ - неповна бета-функція; $r = \lambda_F / \lambda_R$

### Задача 3.5.

Шпилька блока циліндрів затягується з зусиллям  $F = (325 \pm 60)$  кГ. Випробування на вирив шпильки з блока циліндрів дали наступні значення зусиль  $R = (465 \pm 85)$  кГ.

Визначити ймовірність безвідмовної роботи з'єднання "шпилька - блок циліндрів" для заданих умов.

Розв'язок.

Ймовірність безвідмовної роботи з'єднання оцінимо із наближення нормального розподілу. Визначимо квантиль нормального розподілу:

$$p = - \frac{\bar{n} - 1}{\sqrt{(\bar{n} V_R)^2 + V_F^2}},$$

$$\text{де } \bar{n} = \frac{R}{F} = \frac{465}{325} = 1,43;$$

$$V_R \approx \frac{(465 + 85) - (465 - 85)}{6 \cdot 465} \approx 0,061;$$

$$V_F = \frac{(325 + 60) - (325 - 60)}{6 \cdot 325} = 0,052.$$

Тоді:

$$p = - \frac{1,43 - 1}{\sqrt{(1,43 \cdot 0,061)^2 + 0,052^2}} = -4,039,$$

звідки:

$$P(R \geq F) = 0,9999.$$

### Задача 3.6.

Деталь сприймає випадкові навантаження ( $V_F = 0,30$ ) і має умовний запас міцності по несучій здатності  $\bar{n} = 1,9$  та варіацію несучої здатності  $V_R = 0,15$ .

**Оцінити надійність деталі (ймовірність безвідмовної роботи).**

Розв'язок.

Знаходимо квантиль нормального розподілу:

$$p = -\frac{\bar{n} - 1}{\sqrt{(\bar{n}V_R)^2 + V_F^2}} = -\frac{1,9 - 1}{\sqrt{(1,9 \cdot 0,15)^2 + 0,30^2}} = -2,175$$

За таблицями квантилів:

$$P(U_p = -2,175) = P(R \geq F) = 0,985$$

**3.4. Визначення показників надійності послідовної системи при нормальному розподілі навантаження.**

Якщо несучі здатності елементів системи не залежать одна від одної, а варіація навантаження незначна, то відмови елементів можна вважати статистично незалежними величинами, і ймовірність безвідмовної роботи системи:

$$P(R \geq F_0) = \prod_{j=1}^n (R_j \geq F_0) = \prod_{j=1}^n [1 - F_{R_j}(F_0)], \quad (3.22)$$

де  $R_j$  - несуча здатність  $j$ -го елемента;

$F_0$  - навантаження на систему;

$n$  - число послідовно з'єднаних елементів в системі.

Однак, в більшості випадків має місце значне розсіювання навантаження. В цих випадках ймовірність безвідмовної роботи системи  $P(R \geq F)$  необхідно знаходити за формулою повної ймовірності. Для цього діапазон розсіювання навантаження  $[F_{min} \dots F_{max}]$  розбивають на інтервали

$$\{(F_{min} \dots F_{min} + \Delta F); (F_{min} + \Delta F \dots F_{min} + 2\Delta F); \dots; (F_{max} - \Delta F \dots F_{max})\} \quad (3.23)$$

Для кожного інтервалу навантаження знаходять добуток ймовірності безвідмовної роботи  $P(R_j \geq F_i)$  при фіксованому навантаженні. Склавши всі добутки по всіх інтервалах, маємо:

$$P(R \geq F) = \int_0^{\infty} f(F) \prod_{j=1}^n [1 - F_{R_j}(F)] dF, \quad (3.24)$$

де  $f(F)$  - густина розподілу навантаження;

$F_{R_j}(F)$  - функція розподілу несучої здатності  $j$ -го елемента при значенні несучої здатності  $R_j = F$ .

Розглянемо спрощений метод оцінки надійності послідовної системи для випадку нормального розподілу навантаження. Для цього апроксимуємо закон розподілу несучої здатності нормальним розподілом так, щоб він найкраще наближався до істинного розподілу в діапазоні низьких значень несучої здатності, т. я. якраз ці значення найбільше впливають на показники надійності системи.

Для цього:

1. Задаються двома фіксованими значеннями навантаження  $F_A$  і  $F_B$  та проводять розрахунок ймовірності безвідмовної роботи при цих навантаженнях. Навантаження підбираються з таким розрахунком, щоб

$$P(R \geq F_A) \cong 0,45..0,60; \quad (3.25)$$

$$P(R \geq F_B) \cong 0,95..0,99,$$

тобто, щоб охоплювався весь інтервал практичних значень надійності. Для цього орієнтовні значення  $F_A$  і  $F_B$  можна взяти:

$$F_A \cong (1 + 3V_F) m_F; \quad (3.26)$$

$$F_B \cong (1 + V_F) m_F,$$

де  $m_F$  - середнє значення навантаження;

$V_F$  - коефіцієнт варіації навантаження.

3. Знаходять квантілі нормального розподілу для кожного із послідовно з'єднаних елементів для  $F_A$  та  $F_B$ :

$$U_{PA} = \frac{F_A - m_{R_i}}{V_{R_i} m_{R_i}} ; \quad (3.27)$$
$$U_{PB} = \frac{F_B - m_{R_i}}{V_{R_i} m_{R_i}} ,$$

де  $m_{R_i}$ ,  $V_{R_i}$  - середнє значення та варіація несучої здатності  $i$ -го елемента системи.

4. За таблицями квантів знаходять відповідні ймовірності

$$P_{iA}(R_i \geq F_A) \text{ та } P_{iB}(R_i \geq F_B).$$

5. Знаходять добутки ймовірностей:

$$P(R \geq F_A) = \prod_{i=1}^n P_{iA} ; \quad (3.28)$$
$$P(R \geq F_B) = \prod_{i=1}^n P_{iB} .$$

6. Порівнюють (3.28) з рекомендованими для даного методу інтервалами (3.25). В випадку, коли (3.28) не потрапляють в інтервали (3.25), змінюють  $F_A$  та  $F_B$ . Процедуру повторюють до тих пір, поки значення (3.28) не потраплять в інтервали (3.25).

7. Апроксимують закон розподілу несучої здатності системи нормальним розподілом з математичним очікуваням  $m_R$  та коефіцієнтом варіації  $V_R$ . Тоді:

$$m_R - F_A + U_{PA} S_R = 0 ; \quad (3.29)$$
$$m_R - F_B + U_{PB} S_R = 0 ,$$

де  $S_R = V_R m_R$  - середньоквадратичне відхилення апроксимуючого розподілу. Звідки:

$$m_R = F_A - \frac{F_B - F_A}{U_{PB} - U_{PA}} U_{PA} ; \quad (3.30)$$

$$V_R = \frac{F_B - F_A}{\left[ \frac{F_A}{U_{PA}} + \frac{F_B}{U_{PB}} \right]}$$

8. Знаходять ймовірність безвідмовної роботи системи  $P(R \geq F)$ . Для цього визначають квантиль  $U_p$ :

$$U_p = - \frac{\bar{n} - 1}{\sqrt{(n \cdot V_R)^2 + V_F^2}} , \quad (3.31)$$

де  $\bar{n} = \frac{m_R}{m_F}$  - умовний запас міцності по середнім значенням несучої здатності і навантаження;  $V_F$  - варіація навантаження.

9. За таблицями квантилів знаходять ймовірність безвідмовної роботи системи.

Розглянемо застосування даного методу на конкретній задачі.

### Задача 3.7.

*Визначити ймовірність безвідмовної роботи клинопасової передачі, якщо відомо, що запаси міцності по середнім значенням несучої здатності складають: ременя  $n_1=1,4$ ; вхідного і вихідного валів  $n_2=n_3=2,2$ ; шпонок  $n_4=n_5=1,6$ ; підшипників  $n_6=n_7=n_8=n_9=1,5$ . Несучі здатності всіх елементів передачі розподілені нормально з однаковим коефіцієнтом варіації  $V_{R_1} = V_{R_2} = \dots = V_{R_9} = 0,08$ . Навантаження в таких*



передачах також розподілено нормально з коефіцієнтом варіації  $V_F = 0,12$ .

Розв'язок.

1. Задаємося навантаженнями  $F_A$  та  $F_B$ :

$$F_A = (1 + 3V_F) m_F = 1,36 m_F ;$$

$$F_B = (1 + V_F) m_F = 1,12 m_F .$$

2. Визначимо квантілі нормального розподілу всіх елементів, що відповідають ймовірності їх безвідмовної роботи при навантаженнях  $F_A$  та  $F_B$ :

$$U_{PA_i} = \frac{F_A - n_i m_F}{V_{R_i} n_i m_F} = \frac{1,36 - n_i}{V_{R_i} n_i} ;$$

$$U_{PB_i} = \frac{F_B - n_i m_F}{V_{R_i} n_i m_F} = \frac{1,12 - n_i}{V_{R_i} n_i} .$$

Звідки:

$$U_{PA1} = -0,3557 ; \quad U_{PA2} = U_{PA3} = -4,7227 ;$$

$$U_{PA4} = U_{PA5} = -1,8750 ; \quad U_{PA6} = \dots = U_{PA9} = -1,1666 ;$$

$$U_{PB1} = -2,4949 ; \quad U_{PB2} = U_{PB3} = -6,1364 ;$$

$$U_{PB4} = U_{PB5} = -3,7500 ; \quad U_{PB6} = \dots = U_{PB9} = -3,1666 .$$

Знаходимо відповідні ймовірності за таблицями квантилів:

$$P_{1A} = P(R \geq F_A) = 0,636 ; \quad P_{2A} = P_{3A} = 0,9999 ;$$

$$P_{4A} = P_{5A} = 0,9693 ; \quad P_{6A} = \dots = P_{9A} = 0,8769 ;$$

$$P_{1B} = P(R \geq F_B) = 0,9938 ; \quad P_{2B} = P_{3B} = 0,9999 ;$$

$$P_{4B} = P_{5B} = 0,9999 ; \quad P_{6B} = \dots = P_{9B} = 0,9992 .$$

Тоді:

$$P(R \geq F_A) = \prod_{i=1}^9 P_{iA} = 0,6368 \cdot 0,9999^2 \cdot 0,9693^2 \cdot 0,8769^4 = 0,4599$$

$$P(R \geq F_B) = \prod_{i=1}^9 P_{iB} = 0,9938 \cdot 0,9999^2 \cdot 0,9999^2 \cdot 0,9992^4 = 0,9916$$

Як бачимо, значення  $P(R \geq F_A)$  потрапляє в рекомендований інтервал ймовірностей 0,45...0,60, а  $P(R \geq F_B)$  дещо перебільшує рекомендовані значення.

Збільшимо навантаження  $F_B$  до величини

$$F_B' = (1 + 1,5V_F) m_F = 1,18 m_F.$$

Тоді для  $P_{B_i}' = \frac{1,18 - n_i}{V_R n_i}$  маємо:

$$P_{B1}' = -1,9643; \quad P_{B2}' = U_{P_{B3}'} = -5,7955;$$

$$P_{B4}' = U_{P_{B5}'} = -3,2813; \quad P_{B6}' = \dots = U_{P_{B9}'} = -2,6666.$$

$$P_{1B}' = 0,9750; \quad P_{2B}' = P_{3B}' = 0,9999;$$

$$P_{4B}' = P_{5B}' = 0,9995; \quad P_{6B}' = \dots = P_{9B}' = 0,996.$$

Звідки

$$P'(R \geq F_B') = \prod_{i=1}^n P_{iB}' = 0,9750 \cdot 0,9999^2 \cdot 0,9995^2 \cdot 0,9961^4 = 0,9661$$

Знаходимо відповідні квантілі за таблицями квантилів:  $P_A = +0,10$ ;  $P_B' = -1,82$ .

Для значень  $F_A$  та  $F_B'$  знаходимо:

$$m_R = F_A - \frac{F_B' - F_A}{U_{PB}' - U_{PA}'} U_{PA}' = 1,36 m_F - \frac{1,18 m_F - 1,36 m_F}{-1,82 - 0,10} \cdot 0,10 = 1,3506 m_F;$$

$$V_R = \frac{F_B' - F_A}{F_A U_{PB}' - F_B' U_{PA}'} = \frac{1,18 m_F - 1,36 m_F}{-1,36 m_F \cdot 1,82 - 1,18 m_F \cdot 0,10} = 0,069.$$

Знаходимо квантиль нормального розподілу, що відповідає ймовірності  $P(R \geq F)$  безвідмовної роботи передачі:

$$U_P = \frac{n-1}{(nV_R)^2 + V_F^2} = \frac{\left(\frac{1,3506 m_R}{m_R}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1,3506 m_R}{m_R}\right)^2 \cdot 0,069^2 + 0,12^2} = -2,3075$$

За таблицями квантів:  $P(R \geq F) = 0,986$ .

### 3.5. Забезпечення надійності на стадії проектування машини.

Надійність машини залежить від всіх стадій, які вона проходить, і перш за все - від проектування, виробництва та експлуатації. Причому надійність закладається на стадії проектування, забезпечується на стадії виготовлення та підтримується на стадії експлуатації (ЗЗП тріади надійності).

#### 3.5.1. Шляхи забезпечення надійності.

Піклування про надійність машини розпочинається з технічного завдання на проектування і продовжується до списання машини.

На стадії проектування разом з вивченням технічного завдання і конкретизації технічних умов ведеться робота по забезпеченню надійності. Причому дана робота повинна бути кількісною. На цій стадії проводиться аналіз можливих відмов і їх кількісна оцінка. Корисним може бути “дерево відмов”, яке допомагає отримати вплив відмов окремих елементів на показники надійності машини в цілому.

Вибір матеріалів, технології, геометрії деталей дозволяє визначити показники фізичної надійності. В багатьох випадках цього буває недостатньо, т. я. ще

необхідно врахувати схемну надійність та можливості резервування.

Це дає підстави створити дослідний зразок та провести його випробування.

Забезпечення схемної надійності машини досягається по можливості мінімальним числом елементів в системі, а прояви відмов типових рішень виключаються, або, в окремих випадках, зводяться до мінімуму.

Забезпечення високої надійності кожного елемента досягається або за рахунок покращання технології, або за рахунок відбору кращих елементів із серійної партії. В останньому випадку показники надійності можна покращити, проте вартість їх зростає, так як вартість забракованих на контролі елементів переноситься на відібрані.

Крім цього, на підвищення надійності машини впливає:

- забезпечення стабільності характеристик матеріалів та комплектації (зменшення варіації характеристик);
- використання уніфікованих та стандартизованих елементів;
- захист від шкідливого впливу зовнішнього середовища (вібрацій, температур, радіації, агресивного середовища тощо);
- раціональний вибір режимів та умов роботи машини (з елементами адаптивного управління, штучного інтелекту, зворотного зв'язку тощо);
- розширення допустимих границь параметрів, що допускають працездатність машини;
- дублювання і резервування;
- удосконалення методів розрахунків, в тому числі і ймовірносних оцінок (з урахуванням прихованих дефектів, а також комбінованих впливів механічних,

теплових, корозійних, радіаційних та інших факторів). Чим точніше будуть враховані випадкові явища в процесі проектування, тим швидше буде забезпечений необхідний рівень надійності машини;

- удосконалення методів випробувань, зменшення їх тривалості та об'єму. Докладну інформацію про поведінку машини дасть тільки тривала експлуатація. А на стадії проектування проводяться прискорені випробування. При цьому необхідно максимально точно змодельовати реальні умови експлуатації, хоча б по провідних факторах.

На кафедрі “Автомобілі і механіка технічних систем” Житомирського інженерно-технологічного інституту розроблено методологію прискорених сертифікаційних випробувань натурних конструкцій в умовах складного температурно-силового навантаження. Дана методологія забезпечує високий рівень достовірності (не гірше 0,96) отриманої інформації, і дозволяє стиснути час випробувань в 10...100 разів. При цьому необхідно, щоб виконувались умови

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\sigma_{ij}\}_1 \cong \{\sigma_{ij}\}_2; \\ \{T_2\} \ln \left\{ \frac{\tau_2}{\tau_0} \right\} = \{T_1\} \ln \left\{ \frac{\tau_1}{\tau_0} \right\} \end{array} \right. , \quad (3.32)$$

де  $\{\sigma_{ij}\}$ ;  $\{T_i\}$ ;  $\{\tau_k\}$  - тензори напруг, температури та часу для умов експлуатації (1) та прискорених випробувань (2).

Чим глибше і детальніше буде проведена робота по забезпеченню надійності машини на стадії проектування, тим більша ймовірність забезпечення надійності машини в експлуатації.

#### 4. Термоактиваційний аналіз руйнування в теорії надійності.

Більшість критеріїв міцності, що використовуються в даний час, оснований на нерівності:

$$\sigma_e \leq [\sigma] \quad (4.1)$$

де  $\sigma_e$  - еквівалентні напруги,  $[\sigma]$  – допустимі напруги.

Досвід показує, що нерівність (1) не враховує температури та часу, тобто розглядає руйнування тільки з позиції критичних уявлень.

Відомо, що руйнування – це кінетичний процес.

З точки зору кінетичних уявлень, всі явища, в тому числі і руйнування деталей та елементів конструкцій, протікають у багатовимірному просторі:

$$\{ \{ \sigma_{ij} \}; \tau; T; pH; \Pi_c; E_k \dots \}$$

де:  $\{ \sigma_{ij} \}$  – тензор напруг;

$\tau$  – час навантаження;

$T$  – температура;

$pH$  – агресивність середовища;

$\Pi_c$  – пасивація корозії;

$E_k$  – наявність абразиву тощо.

Для розрахунків деталей машин за найсприятливіших умов принаймні три перших координати необхідно враховувати завжди. Дослідження довговічності твердих тіл (металів, композитів, керамік, скла тощо) в широкому інтервалі температур та рівнів

напруг показує, що їх руйнування можна розглядати, як один із видів твердофазних реакцій з характерною ареніусівською залежністю швидкості від температури. Основи кінетичної теорії міцності твердих тіл були закладені школою С.М.Журкова в 50-80 роки 20-го століття. Було показано, що час до руйнування, температура  $T$  та рівень напруг за умов стаціонарної задачі можна описати рівнянням:

$$\tau_p = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \sigma}{RT} \quad (4.2)$$

де  $\tau_0 \approx 10^{-13} \text{ с}$  - період теплових коливань атомів;  $U_0$  - енергія активації,  $\gamma$  - активаційний об'єм;  $R = 8,31 \cdot 10^{-3} \frac{\text{КДж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  - універсальна газова постійна.

(4.2) дозволяє прогнозувати ресурс (час до руйнування) зразка чи конструкції при заданому (стаціонарному) рівні навантаження та при заданій (стаціонарній) температурі (в кельвінах).

Але для такого прогнозу необхідно мати параметри  $U_0$  та  $\gamma$ , яких немає в довідниках. Щоб використати (4.2), як прогноуючі рівняння, необхідно експериментально (в тестових умовах) визначити  $U_0$  та  $\gamma$ .

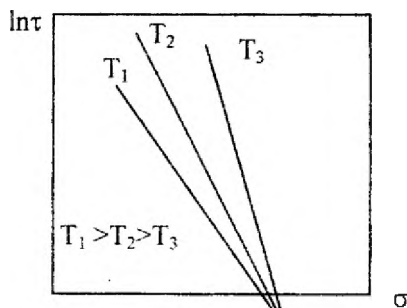


Рис.4.1.

В координатах “ $\tau - \ln \tau_p$ ” криві тривалої міцності (4.2) утворюють пучок (рис.4.1). Рівняння (4.2) підтвержені експериментально на великій кількості твердих тіл.

Нами показано, що принаймні для ОЦК та ГЦК металів та їх сплавів прогнозування ресурсу, як одного з основних показників надійності, можна суттєво спростити, вивівши дану задачу на якісно новий рівень.

#### 4.1. Теоретичне визначення енергії активації.

Розглянемо ідеальний об’єкт – одномірний ангармонічний ланцюжок атомів під дією сили  $F$  (рис.4.2). Згідно уявлень Я.І.Френкеля, ймовірність руйнування ланцюжка тотожна ймовірності перескоку хоча б одним із осциляторів через бар’єр  $U_0$  в заданий відрізок часу:

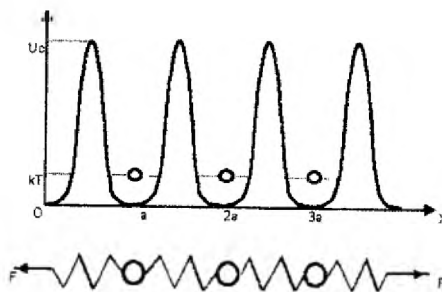


Рис.4.2. Ангармонічний ланцюжок атомів.

$$W = \frac{1}{\tau_{\text{фл}}} \approx \frac{1}{\tau_0} \exp\left(-\frac{U_0}{RT}\right) \quad (4.3)$$

При  $T \rightarrow T_s$ , де  $T_s$  – температура плавлення,  $W \rightarrow 1$ .

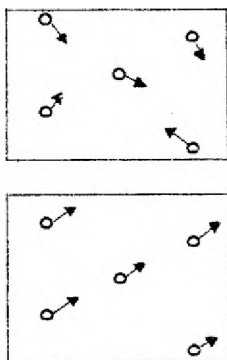


Це дозволяє отримати:

$$U_0 \approx RT_s \ln \frac{1}{\tau_0} \quad (4.4)$$

де "1" під знаком логарифма має розмірність часу.

На основі запропонованої та підтвердженої експериментально синергетичної концепції руйнування тверде тіло можна розглядати, як суперпозицію ангармонійних ланцюжків. В стані перед руйнування, таку систему можна віднести по класу синергетичних, в якій можливий прояв самоорганізації, тобто в умовах значного збудження нелінійна система осциляторів має властивості самосинхронізації (рис. 4.3).



**Рис.4.3.** Фазовий перехід "безпорядок-порядок" в нелінійній системі.

Це дозволило отримати інженерні залежності для теоретичного визначення енергії активації  $U_0$ .

В наближенні Ейнштейна

$$U_0 \approx RT_s \ln \left( \frac{1}{2\pi a_0} \sqrt{\frac{rE}{\rho}} \right) \quad (4.5)$$

В наближенні Дебая:

$$U_0 \approx RT_S \ln\left(\frac{k\theta_D}{n}\right) \quad (4.6)$$

де:  $a_0$  – постійна кристалічної ґратки;

$E$  – модуль пружності;

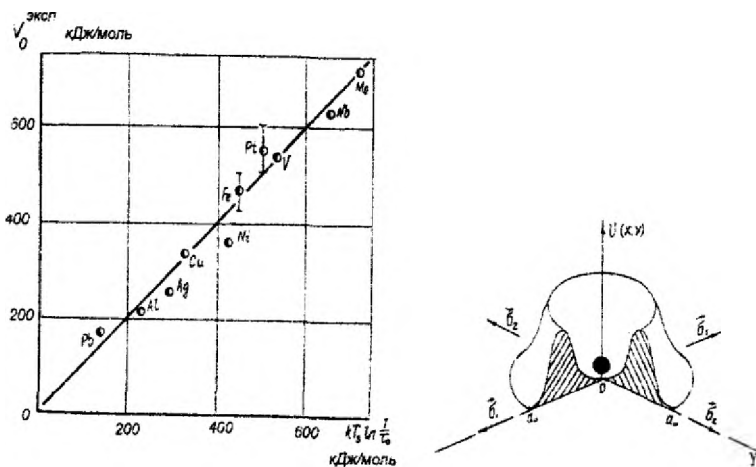
$\rho$  – густина;

$r = 2$  – для ОЦК і  $r = 4$  – для ГЦК-кристалів – кількість атомів в елементарному об'єму кристалічної ґратки;

$\theta_D$  – температура Дебая;

$k, h$  – постійні Больцмана та Планка.

На *рис. 4.4* наведено порівняння експериментальних та теоретичних (5)-(6) значень енергії активації для деяких ОЦК та ГЦК металів.



**Рис.4.4**

Причому експериментальні значення  $U_0$  отримані із обробки кривих довготривалої міцності макрозразків, а розрахункові формули (4.4) - (4.6) – із граничного температурного навантаження ( $T \rightarrow T_s$ ) системи ангармонійних ланцюжків. Добре співпадання “механічних” та “температурних” значень енергії активації засвідчує енергетичну подібність процесів плавлення та механічного руйнування, що передбачалось раніше в роботах В.С.Іванової та І.А.Одінга.

З практичної точки зору значення (4.4)-(4.6) надзвичайно важливе, бо дозволяє принаймні вдвічі скоротити кількість експериментальних констант в рівнянні Журкова (2). Крім того, дані рівняння не мають підгоночних параметрів, що дозволяє віднести їх до класу фундаментальних. Але й цим не закінчується приємні сюрпризи. Дані рівняння дозволяють на теоретичному рівні пояснити феномен автотемпературності в фізиці та механіці руйнування.

#### 4.2. Стійкість енергії активації та явище автотемпературності.

На прикладі багаточисленних металів і сплавів експериментально встановлено, що енергія активації  $U_0$  надзвичайно стійка до зміни вектора стану металу. Наприклад, зміна на кілька порядків вмісту домішок, густини дислокацій, орієнтації монокристалів, великі дози опромінення і т.д. в більшості випадків змінювали енергію активації не більше, ніж на 2...4%, що особливо вражало на фоні суттєвої (на порядок) зміни механічних властивостей.

**Таблиці 4.1.** Експериментальні данні стійкості енергії активації для алюмінію та його сплавів.

№ п/п	Змінний параметр	Границі зміни	Відхилення енергії активації $\frac{\Delta U_0}{U_0} \cdot 100\%$
1.	Домішки міді	0...4%	$\leq 4\%$
2.	Домішки магнію	0...4%	$\leq 4\%$
3.	Домішки цинку	0...10%	$\leq 2\%$
4.	Зміна орієнтації монокристалів	111...100	$\leq 2\%$
5.	Відпал	573 К...873 К	$\leq 5\%$
6.	Прокатка без відпалу	0...90%	$\leq 1\%$
7.	Нейтронне опромінювання	0...10 <sup>27</sup> ион/м <sup>2</sup>	$\leq 8\%$

Запропоновані теоретичні залежності (4.4) – (4.6) дозволяють пояснити цей феномен. Так, із наближення Ейнштейна при  $T_S = const$  маємо:

$$\Delta U_0 = RT_3 \ln \left[ \frac{a^+}{a^-} \left( \frac{\rho^+}{\rho^-} \cdot \frac{E^+}{E^-} \right)^{0,5} \right] \quad (4.7)$$

де “+” відповідає максимальному, а “-” – мініимальному значенню параметра. Числові оцінки показують, що реальними є такі границі зміни параметрів:

$$\frac{a^+}{a^-} \leq 1,2; \quad \frac{\rho^+}{\rho^-} \leq 1,2; \quad \frac{E^+}{E^-} \leq 5 \quad (4.8)$$

що дає граничне відхилення енергії активації:

$$\left| \frac{\Delta U_0}{U_0} \right| \leq \pm 1,6\% \quad (4.9)$$

Таким чином, зміна параметра ґратки на 20%, густини сплаву на 20%, модуля пружності на 400% призводить до зміни енергії активації в тих же межах.

що отримано в експериментах (табл.4.1). Це явище – феноменальної стійкості енергії активації сплавів на даній основі – має надзвичайно важливе теоретичне значення і пов'язане з фундаментальним поняттям автомодельності.

Якщо розглянути множину сплавів на даній основі, то з врахуванням стійкості  $\tau_0$  та  $U_0$ , бачимо, що стан кожного із цих сплавів буде описуватись однією автомодельною зміною  $\gamma$ . Тобто в багатовимірному стану сплава

$$R\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots\} \quad (4.10)$$

де  $x_i$  – фактори, що впливають на стан сплаву (домішки, термообробка, стан поверхні, пластичне деформування, опромінення, орієнтація зерен, структура тощо), можна виділити автомодельний підпростір, в якому (4.10) зводиться до однієї автомодельної змінної  $\gamma$ .

На рис.4.5. це підтверджується експериментально для основних співвідношень механіки руйнування.

Наприклад, для сплавів на даній основі криві втоми

$$\sigma = a - b \cdot \lg N \quad (4.11)$$

в зображеному просторі  $\{a; b\}$  займають не всю площину, а дуже щільну підобласть, координати точок якої тісно корелюють між собою, з коефіцієнтом кореляції не гірше 0,96.

Аналогічно ведуть себе параметри кривих довготривалої міцності та кривих росту тріщин втоми на стадії Періса.

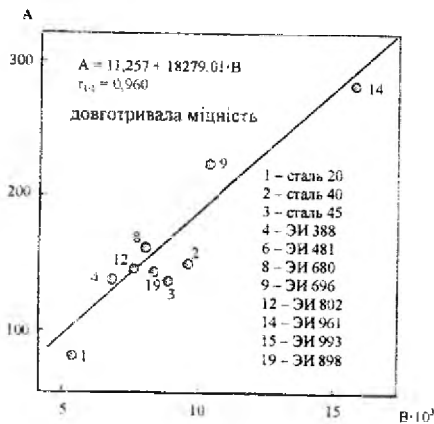
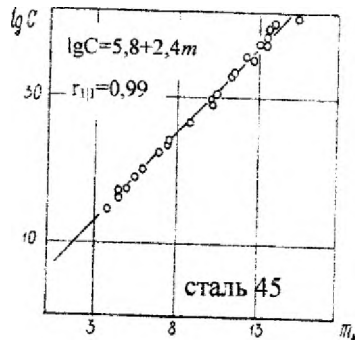
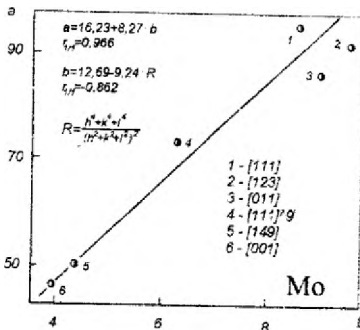
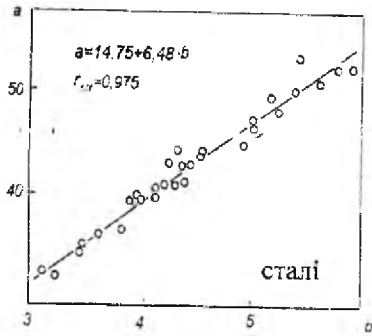
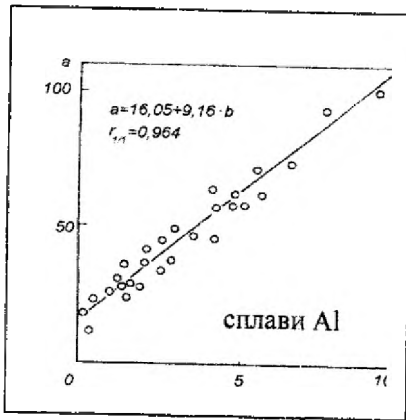


Рис.4.5. Кореляція між параметрами основних співвідношень механіки руйнування.

Таким чином, поєднуючи теоретичні результати та їх експериментальне підтвердження, можемо констатувати, що сімейство сплавів на даній основі з точки зору механічних властивостей в просторі (4.10) має потужний автомодельний підпростір, в межах якого багатовимірний (можливо нескінченно вимірний) вектор зводиться до однієї (!) автомодельної змінної.

З точки зору прогнозування характеристик надійності це відкриває надзвичайно великі перспективи.

### 4.3. Аналітичні оцінки активаційного об'єму.

Отримані теоретичні залежності енергії активації (4.4) – (4.6) дозволяють з нових позицій поставити цілий клас задач механіки руйнування і надійності машин, і перш за все:

- про єдину фізичну природу процесів руйнування при різних видах навантаження;
- про фізичні еквіваленти в умовах складного пружного стану;
- про приведення нестационарних процесів навантаження до еквівалентних стаціонарних і ряд інших.

На основі даних підходів нами розроблені методи визначення характеристик короткочасної та довготривалої міцності як для стаціонарного, так і нестационарного навантаження. На основі термоактиваційного аналізу нестационарних процесів та

синергетичної моделі руйнування є можливість множини експериментальних даних, що отримані за різних умов, привести до універсальної бази даних. Причому, виходячи зі стійкості енергії активації, ця база даних повинна мати мінімальне число універсальних констант.

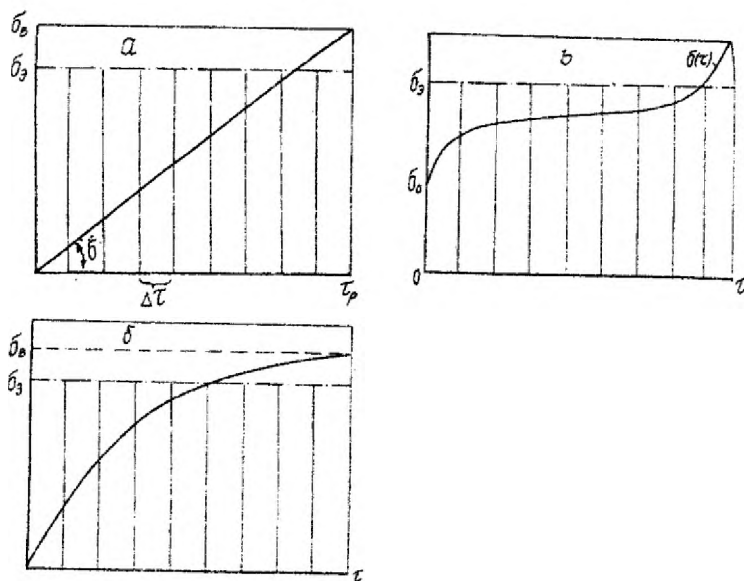


Рис.4.6.

Розглянемо, наприклад, короткочасне деформування (рис. 4.6), як нестационарний термоактиваційний процес, який можна привести до еквівалентного стаціонарного такої ж тривалості в часі з еквівалентними напругами  $\sigma_{\text{екв}}$ . Нами запропонована замкнена система інтегро-алгебраїчних рівнянь:



$$\left. \begin{aligned}
 \tau_p &= \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \sigma_{екв}}{RT} \\
 \tau_{екв} &= \tau_p \cdot r(1 + \delta) \\
 \delta &= \int_0^{\tau_p} \varepsilon(r) dr \\
 r &= \beta^{-1} \ln \int_0^1 \exp[\beta \cdot f(\bar{\tau}) d\bar{\tau}] \\
 U_0 &\approx RT_s \ln \frac{1}{\tau_0} \\
 \beta &= \frac{\gamma \sigma_B}{RT} \\
 \bar{\tau} &= \frac{\tau}{\tau_p}
 \end{aligned} \right\} (4.12)$$

де:

$\tau_p$  - час до руйнування;

$\delta$  - незворотна деформація зразка в момент руйнування;

$r$  - еквівалентний множник;

$\sigma_{екв}$  - еквівалентні стаціонарні напруги;

$f(\bar{\tau})$  - функція зміни напруг в процесі навантаження.

Використовуючи параболічне наближення (рис. 4.б)

$$\frac{\tau}{\tau_B} = \left( \frac{\varepsilon}{\delta} \right)^m \quad (4.13)$$

було показано, що для  $\beta \in [5 \dots 100]$  з похибкою не гірше 0,2%

$$r \approx 1 - \beta^{-1} \ln(m\beta) \quad (4.14)$$

(4.14) – як результат параболічного наближення – дозволяє суттєво спростити процедуру приведення нестационарного навантаження до еквівалентного стаціонарного.

Числовий аналіз (4.12) – (4.14) показує, що розмірність вектора  $G \{ \epsilon, T, \sigma_B, \delta \}$  дорівнює трьом. Це дозволяє, по-перше, при відомих параметрах навантаження  $\epsilon$  і  $T$  та одній із величин  $\sigma_B$  чи  $\delta$  знайти іншу. По-друге, це дозволяє запропонувати інженерну формулу для оцінки енергії активації за результатами експрес-випробувань на короткочасну міцність:

$$\gamma \approx \frac{U_0 - RT \ln \left( \delta / (\epsilon \tau_0) \right)}{\tau_B (1 + \delta) \left[ 1 - \beta^{-1} \ln(m\beta) \right]} \quad (4.15)$$

На жаль, (4.15) є рекурентним співвідношенням, оскільки невідома  $\gamma$  входить і в множину  $\beta$ . Однак, оскільки (4.15) є суттєво нелінійним, то рекурентне співвідношення:

$$\gamma_{i+1} = \varphi(\gamma_i) \quad (4.16)$$

швидко збігається (за 3...4 ітерації) до стійких значень.

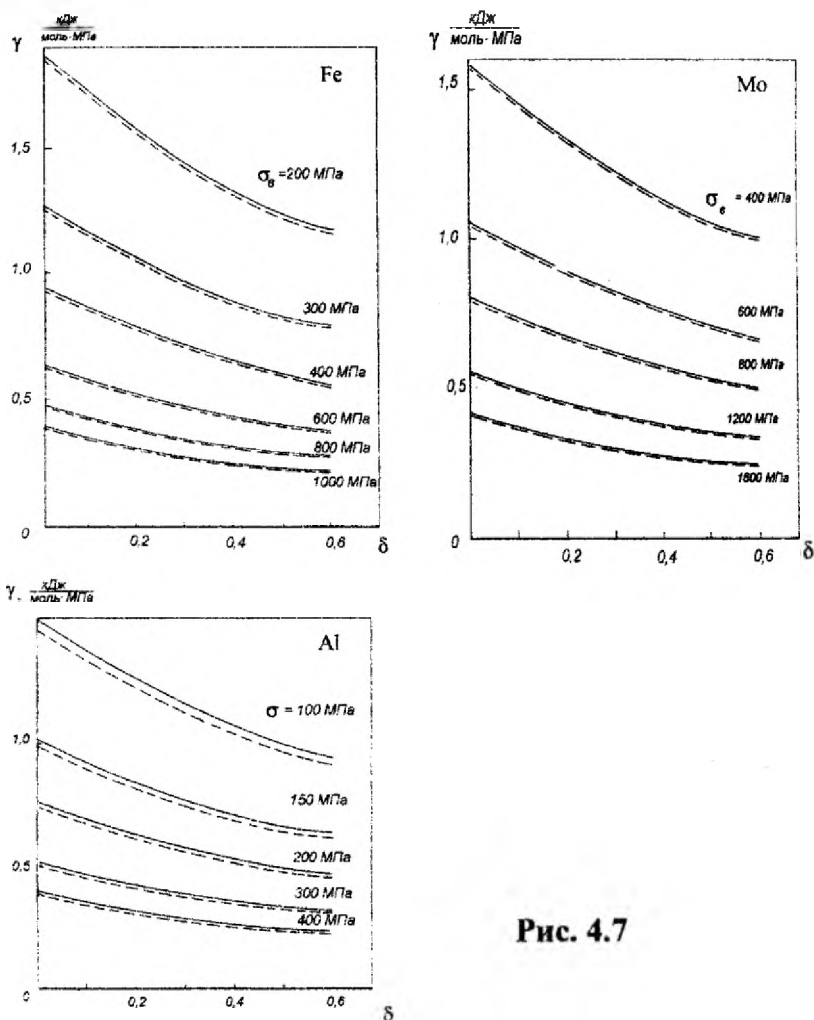


Рис. 4.7

На рис.4.7 наведені значення активаційного об'єму  $\gamma$ , отримані за результатами короточасних випробувань при  $T=293$  К сплавів Fe, Mo та Al з допомогою (4.15).

Аналіз отриманих номограм дозволяє запровадити спрощену формулу для оцінки активаційного об'єму (для  $\dot{\epsilon} \approx 0,001 \dots 0,0001 \text{ с}^{-1}$ ):

$$\gamma \approx (1,02 \dots 1,05) \frac{U_0 (1 - T/T_s)}{\sigma_B (1 + \delta)} \quad (4.17)$$

Це дає можливість констатувати слідує: для прогнозування характеристик надійності в умовах довготривалої міцності отримані інженерні залежності, що дозволяють теоретично визначити параметри в рівнянні Журкова. Причому, енергія активації  $U_0$  може бути визначена повністю на основі фундаментальних констант ( $T_s$ ,  $\theta_D$ ,  $E$ ,  $\rho$ ,  $a_0$ ), а активаційний об'єм – на основі тестових випробувань в умовах короткочасного навантаження хоча б одного зразка.

#### Задача 4.1.

*Розрахувати довготривалу міцність труби теплообмінника, виготовлену із жаростійкої сталі 12X18Н9Т, що буде працювати при  $t=700^\circ\text{C}$  з термінами  $\tau_{p1} = 10000$  годин та  $\tau_{p2} = 40000$  годин, якщо при короткочасних випробуваннях зразка при  $t=700^\circ\text{C}$  зі швидкістю  $\varepsilon = 0,001 \text{ с}^{-1}$  мали  $\tau_B = 270 \text{ МПа}$ ,  $\delta = 20\%$ .*

Розв'язок:

Використаємо рівняння Журкова:

$$\tau_p = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \tau}{RT}$$

Для сплавів на основі заліза  $T_s \approx 1800 \text{ К}$ . Тоді, використавши (4.4), маємо:

$$U_0 \approx 8,31 \cdot 10^{-3} \cdot 1800 \cdot \ln \frac{1}{10^{-3}} \approx 447,8 \frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$$

Для визначення активаційного об'єму використаємо спрощену формулу (4.17). Тоді

$$\gamma \approx 1,03 \frac{447,8(1 - 973/1800)}{270(1 + 0,2)} = 0,634 \frac{\text{кДж}}{\text{моль} \cdot \text{МПа}}$$

Звідки,

$$\sigma = \frac{U_0}{\gamma} - \frac{kT}{\gamma} \ln \frac{\tau_p}{\tau_0}$$

Для  $\tau_{pl} = 10000$  годин це дає:

$$\sigma_1 = \frac{447,8}{0,634} - \frac{8,31 \cdot 10^{-3} \cdot 973}{0,634} \ln \frac{3600 \cdot 10000}{10^{-13}} = 102,8 \text{ МПа}$$

Для  $\tau_{pl} = 40000$  годин відповідно:

$$\sigma_2 = \frac{447,8}{0,634} - \frac{8,31 \cdot 10^{-3} \cdot 973}{0,634} \ln \frac{3600 \cdot 40000}{10^{-13}} = 85,1 \text{ МПа}$$

Таким чином, за результатами короточасних випробувань нам вдалося спрогнозувати рівень допустимих напруг, при яких забезпечується заданий ресурс (відповідно 102,8 МПа для 10000 годин та 85,1 МПа для 40000 годин).

Яка ж тривалість короточасних випробувань?

$$\tau_p = \frac{\delta}{\epsilon} = \frac{0,2}{0,001} = 200 \text{ с.}$$

З урахуванням запуску машини, установки зразка в захвати та власне випробувань це займе 10...20 хвилин. Звичайно, такі випробування мають значну економічну доцільність в порівнянні з випробуваннями на протязі 10000 годин (1,1 року) та на протязі 40000 годин (4,5 років).

В той же час це не відкидає натурних випробувань для особливо відповідальних конструкцій, аварії яких приводять до важких наслідків.

Дану методологію прогнозування ресурсу та рівня напруг слід розглядати як наближену. Вона допомагає провести експрес-прогноз, наприклад, на стадії проектування конструкції, коли навіть для особливо відповідальної конструкції ще нема чого випробувати

#### 4.4. Прогнозування довготривалої міцності та показників надійності в умовах складного температурно-силового навантаження натурних конструкцій.

Отримані вище аналітичні залежності дозволяють прогнозувати показники міцності і надійності, коли напружений стан близький до лінійного, а температурне поле рівномірне і стаціонарне.

Даний випадок, на жаль, не є типовим для натурних конструкцій в реальних умовах експлуатації.

В цих випадках можна рекомендувати слідуєчи шляхи вирішення задачі:

а) використати наближення (4.4)-(4.6) та (4.15)-(4.17) для найбільш напружених об'ємів натурної конструкції;

б) привести складний напружений стан в даних об'ємах до еквівалентних значень і тоді скористатись (4.4)-(4.6) та (4.15)-(4.17);

в) провести прискорені натурні випробування;

г) провести натурні випробування в повному обсязі, в умовах, максимально наближених до експлуатації.

Очевидно, останній шлях дасть найбільш точні дані про характеристики міцності і надійності. Але даний шлях надто дорогий і не завжди можливий, т.я. конструкція може зістаритись морально раніше, ніж будуть доведені до кінця натурні випробування. Тому, якщо варіанти а) і б) не задовольняють конструктора, необхідно провести натурні випробування за скороченою програмою.

Нами запропонована методологія таких випробувань. На основі отриманих вище результатів ідея методології полягає в наступному. В умовах складного температурно-силового навантаження для забезпечення відповідності результатів прискорених випробувань умовам експлуатації необхідно виконати умови:

$$\begin{cases} \{\sigma_{ij}\}_1 = \{\sigma_{ij}\}_2 \\ T_1 \ln \frac{\tau_{p1}}{\tau_0} = T_2 \ln \frac{\tau_{p2}}{\tau_0} \end{cases} \quad (4.18)$$

А це означає, що для забезпечення еквівалентності прискорених випробувань умовам експлуатації необхідно залишити незмінними компоненти тензора напруг  $\{\sigma_{ij}\}$ , як тензора другого рангу, а прискорення випробувань досягти перетвореннями тензорів  $\{\tau_p\}$  та  $\{T\}$ , як тензорів нульового рангу (скалярів).

Це дає можливість отримати час чи температуру прискорених еквівалентних випробувань за формулою:

$$\tau_2 = \tau_0 \left( \frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^{\frac{T_1}{T_2}} \quad (4.19)$$

$$T_2 = T_1 \frac{\ln(\tau_{p1} / \tau_0)}{\ln(\tau_{p2} / \tau_0)}$$

### Задача 4.2.

*Конструкція складної конфігурації працює в умовах експлуатації при  $T_1=900$  К. Визначити умови прискорених випробувань, якщо в експлуатації необхідно забезпечити  $\tau_{p1}=50000$  годин.*

Розв'язок:

Прискорені випробування проведемо, зберігши силове навантаження таким, як і в експлуатації. Задавшись значеннями  $\tau_{p2}$ , наприклад, 10, 100 та 1000 годин, визначимо, на скільки потрібно підвищити температуру в кожному з випадків, щоб забезпечити  $\tau_{p1}=50000$  годин.

Використаємо формулу (4.19).

Для  $\tau_{p2}=10$  годин

$$T_2 = 900 \cdot \frac{\ln \frac{3600 \cdot 50000}{10^{-13}}}{\ln \frac{3600 \cdot 10}{10^{-13}}} = 1031 \text{ К}$$

Для  $\tau_{p2}=100$  годин

$$T_2 = 900 \cdot \frac{\ln \frac{3600 \cdot 50000}{10^{-13}}}{\ln \frac{3600 \cdot 100}{10^{-13}}} = 977 \text{ К}$$

Для  $\tau_{p2}=1000$  годин

$$T_2 = 900 \cdot \frac{\ln \frac{3600 \cdot 50000}{10^{-13}}}{\ln \frac{3600 \cdot 1000}{10^{-13}}} = 931 \text{ К}$$



#### 4.5. Про єдині криві довготривалої міцності.

Із рівняння Журкова значення довготривалої міцності:

$$\sigma_D = \frac{U_0}{\gamma} - \frac{RT}{\gamma} \ln \frac{\tau_D}{\tau_0} \quad (4.20)$$

Використовуємо для  $\gamma$  його параболічне наближення:

$$\gamma = \frac{U_0 - RT \cdot \ln \frac{\delta}{\varepsilon \tau_0}}{\tau_B (1 + \delta) \left[ 1 - \beta^{-1} \cdot \ln \cdot m \beta \right]} \quad (4.21)$$

Знехтувавши множником  $(1 + \delta)$ , т.я. використовуємо не істинні напруги в момент руйнування, а умовну границю міцності, можемо перейти до безрозмірних координат:

$$\varphi = \frac{\sigma_D}{\sigma_B} = \frac{U_0 - RT \cdot \ln \frac{\tau_D}{\tau_0}}{U_0 - RT \cdot \ln \frac{\delta}{\varepsilon \tau_0}} \left[ 1 - \beta^{-1} \ln m \beta \right] \quad (4.22)$$

Це дає можливість, використавши (4)-(6), отримати:

$$\varphi = \frac{30 - Z \cdot \ln \frac{\tau_D}{\tau_0}}{30 - Z \cdot \ln \frac{\delta}{\varepsilon \tau_0}} \left[ 1 - \beta^{-1} \ln m \beta \right] \quad (4.23)$$

де:  $Z = \frac{T}{T_s}$ , а  $\beta$  знаходиться із рекурентного співвідношення

$$\beta_{i+1} = \frac{\frac{30}{t} - \text{Ln} \frac{\delta}{\varepsilon \tau_0}}{1 - \beta_i^{-1} \text{Ln} \cdot m \beta_i} \quad (4.24)$$

(4.21) дозволяє побудувати універсальну діаграму  $(\sigma_D / \sigma_B) = f(T / T_S)$ , тобто всі (!!) ОЦК та ГЦК метали і їх сплави повинні потрапляти на дану діаграму. На *рис. 4.8* наведені залежності  $\varphi(Z)$  для  $\tau_D = 100$  годин,  $\delta = 0.2$  та швидкостей короткочасних випробувань  $\dot{\varepsilon} \in [0,01; 0,001; 0,0001] \text{ c}^{-1}$ , а також експериментальні дані – відношення  $(\sigma_D / \sigma_B)$  (відносна довготривала міцність) при заданій відносній температурі  $T / T_S$  для сплавів на основі нікеля, заліза та алюмінію. І хоча в абсолютних координатах характеристики довготривалої та короткочасної міцності даних сплавів суттєво відрізняються, у відносних координатах “ $\varphi - Z$ ” маємо добре співпадання. Це дає право говорити про існування єдиної (принаймні для всіх ОЦК і ГЦК металів та їх сплавів) кривої міцності у відносних координатах  $\varphi = \sigma_D / \sigma_B$ ;  $Z = T / T_S$

### Задача 4.3.

*Визначити за допомогою рис.4.8, які значення довготривалої міцності при  $T = 0,6T_S$  та  $\tau_D = 100$  год. будуть мати сплави Al, Fe, і Ni, якщо випробування на короткочасну міцність проводились при швидкості  $\dot{\varepsilon} = 0,001 \text{ c}^{-1}$ .*

Розв’язок:

Згідно середнього графіка  $\varphi /_{z=0,6} = 0,5$ . Це означає, що при  $T = 0,6 T_S$  всі сплави – Al Fe, і Ni будуть мати

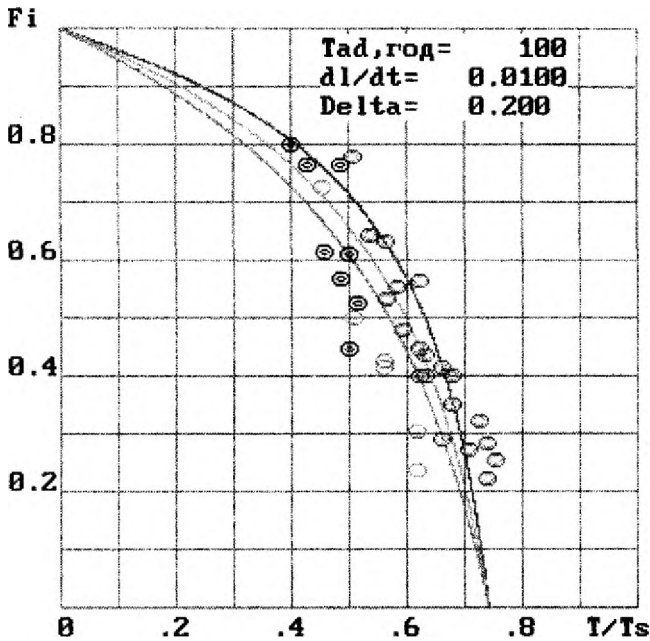
відносну довготривалу міцність 50% від короткочасної, отриманої при цій же температурі.

Такою температурою буде:

Для Al -  $T=0,6 T_s=558$  К

Для Fe -  $T=0,6 T_s=1080$  К

Для Ni -  $T=0,6 T_s=1035$ .



**Рис.4.8.** Єдині діаграми експрес-визначення довготривалої міцності за результатами короткочасних випробувань для сплавів Al, Fe, Ni.

#### 4.6. Термоактивний аналіз руйнування в умовах циклічного навантаження.

Термоактиваційні уявлення можна застосувати і для аналізу руйнування в умовах циклічного навантаження, а особливо в багаточиклової області, так як:

- до появи тріщини практично відсутні пластичні деформації;
- більше 90% первинних кривих втоми описується лінійними графіками в напівлогарифмічних координатах;
- при дотриманні умов автомодельності скорочується число незалежних параметрів в рівнянні Журкова  $\{U_0, \gamma, \tau_0\} \Rightarrow \{\gamma\}$ .

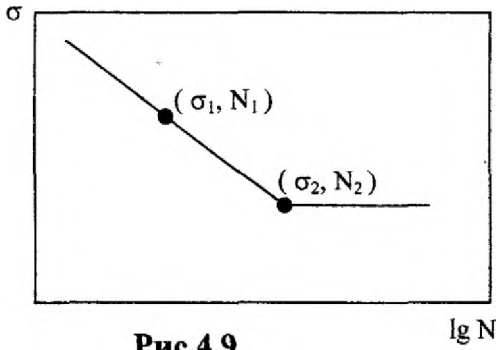


Рис.4.9.

Візьмемо на первинній кривій втоми, отриманій при температурі  $T$  та частоті  $f$ , дві точки  $\{\sigma_1, N_1\}$  та  $\{\sigma_2, N_2\}$ . Застосувавши до даної кривої втоми рівняння Журкова, знаходимо енергію активації та активаційний об'єм :

$$U_0^{II} = \gamma \sigma_1 - RT \cdot \ln \frac{N_1}{\tau_0} \quad (4.25)$$

$$\gamma = RT \frac{\ln \cdot (N_2 / N_1)}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

На рис. 4.10 наведені залежності енергії активації із 176 первинних кривих втоми.

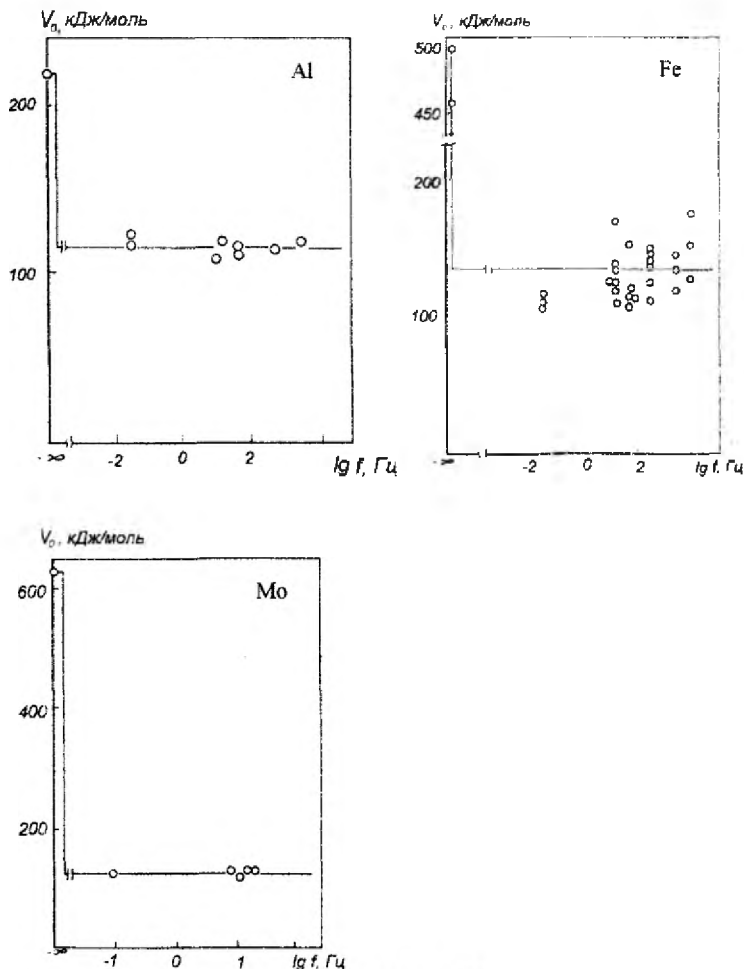


Рис.4.10.

Із *рис. 4.10* випливає, що такий стійкий параметр, як енергія активація, виявляється дуже нестійкою при переході до циклічного навантаження. Можливо, в цьому й кріпиться ключ до таємниці втоми. Чому так різко знижуються характеристики міцності при циклічному навантаженні?

На *рис. 4.11* наведено дві схеми пояснення феноменального зниження енергії активації при циклічному навантаженні.

В випадку *рис. 4.11(а)* зменшення висоти бар'єра до значення  $U_0'$  явно не узгоджується з попереднім аналізом стійкості енергії активації.

На *рис. 4.11(б)* запропоновано інший шлях – висота бар'єра залишається незмінною, тоді як збуджується осцилятор при циклічному навантаженні, переходячи на більш високий енергетичний рівень. В обох випадках ймовірність перескоку через бар'єр залишається однаковою.

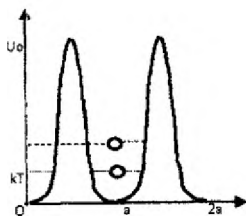
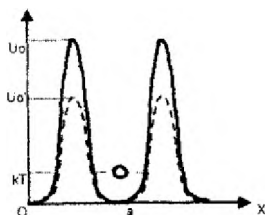
Із аналізу експериментальних даних випливає, що коефіцієнт збудження локальної зони  $\beta$  має складну залежність:

$$\beta = \begin{cases} 1, & \begin{cases} \text{якщо } f = 0; T \in [0, 1 \dots 0, 9] \\ \text{якщо } f \neq 0; T > 0,6 T_s \end{cases} \\ \frac{3}{5} \cdot \frac{T_s}{T}, & \text{якщо } f \neq 0; T \leq 0,6 T_s \end{cases}$$

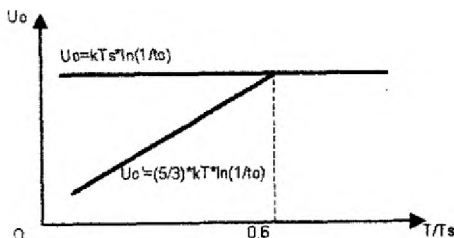
Це дозволяє для ОЦК і ГЦК металів та їх сплавів побудувати узагальнену діаграму  $U_0(T, f)$  (*рис. 4.12*), яку можна задати в вигляді залежності:

$$U_0 = \begin{cases} RT_s \frac{1}{\tau_0} \cdot \text{для} \cdot \begin{cases} f = 0, T \in [0, 1 \dots 0, 9] T_s \\ f \neq 0, T > 0, 6 T_s \end{cases} \\ \frac{5}{3} RT \ln \frac{1}{\tau_0} \cdot \text{для} \cdot f \neq 0, T \leq 0, 6 T_s \end{cases} \quad (4.26)$$

Наявність залежності (4.26) дозволяє створити САПР-програму розрахунків довготривалої та циклічної міцності та стадії ескізного проектування машини при обмеженій базі даних.



**Рис.4.11.** Дві моделі зниження уявної енергії активації



**Рис.4.12.** Єдина залежність енергії активації для довготривалої міцності та втоми

## **5. Забезпечення надійності машин при наявності корозії.**

**Корозія** – ( походить від пізньолатинського *corrosio* – розїдати ) – процес руйнування матеріалів при їх фізико-хімічній взаємодії з навколишнім середовищем.

Для металів корозія означає перехід деякої приповерхневої частини металу в інший стан з утворенням солі, окислу чи розчинення металу.

Корозію в більшості випадків ототожнюють з корозією металів. Хоча під визначення руйнування матеріалу при його фізико-хімічній взаємодії з навколишнім середовищем підпадає і руйнування будівельних матеріалів ( і перш за все – бетонів, шлакоситалів ), і деталей та конструкцій із деревини, і деструкція та біокорозія полімерів, і т. і.

*Корозія* – явище надзвичайно складне та різноманітне за факторами, що впливають на її характер та швидкість. Якраз це до даного часу не дозволяє знайти універсального та доступного за ціною засобу боротьби з корозією.

Втрати нашої цивілізації із-за корозії надзвичайно великі. Щорічно від 20 до 25 % тільки металевих виробів виходить із вжитку із-за корозії, з яких приблизно третина втрачається назавжди. Причому негативні наслідки корозії не обмежуються тільки втратами матеріалів. Основна шкода пов'язана з різким зниженням із-за корозії надійності та довговічності машин, що в кінцевому результаті несе загрозу безпеці життєдіяльності.

Корозія металів – це руйнування металів (поверхневих чи приповерхневих шарів ) внаслідок хімічної чи електрохімічної взаємодії з зовнішнім середовищем.



Корозія бетонів – це руйнування бетонів під дією агресивного зовнішнього середовища, головним чином в результаті фільтрації води та водних розчинів через бетон та їх взаємодії з компонентами бетону та арматури.

В зв'язку з тим, що явище корозії надзвичайно складне, існує велика кількість систем кваліфікації корозії. Найчастіше ( переважно для корозії металів ) користуються кваліфікацією за такими ознаками:

1. За характером взаємодії з середовищем;

1.1. Хімічна корозія, що протікає в середовищах, які не проводять електричний струм ( гази, нафта, нафтопродукти тощо);

1.2. Електрохімічна корозія, що протікає в водних розчинах електролітів ( розчини солей, кислот, основ ).

2. За геометрією корозійного пошкодження поверхні ( суцільне чи локальне).

3. За умовами протікання процесу в якому середовищі протікає, агрегатний стан середовища, ( твердий, рідинний, газовий ), та як допоміжні фактори, крім корозії, діють на матеріал ( механічні напруги, тертя, радіаційні потоки, блукаючі струми, зовнішній електричний струм, бактерії ).

На *рис. 5.1.* Наведена одна із таких класифікацій корозії ( за проф. Костецьким Б. І. ).

При вивченні корозії найбільше значення має хімічна взаємодія металів з киснем.

Ознакою окислення є окисні плівки, які при товщині  $h < 50 \text{ \AA}$  - не мають кольору, а при  $h > 50 \text{ \AA}$  в наслідок інтерференції світла дають широкую гаму кольорів.

В подальшій кінетиці корозії плівки починають грати важливу роль, виконуючи роль екрана між зовнішнім середовищем та основним металом.

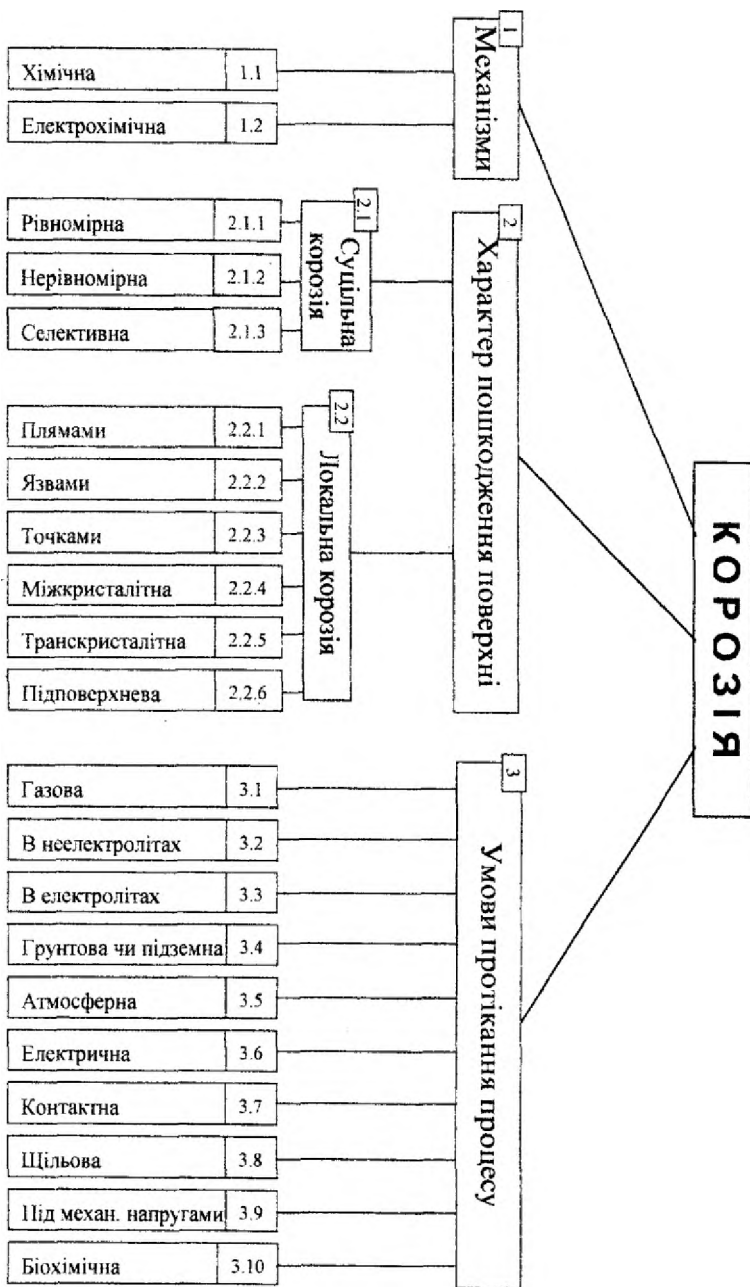


Рис. 5.1. Класифікація видів корозії.

При цьому значна роль належить температурі. Взагалі залежність швидкості окислення металів, як і більшість термоактивованих процесів, має арреніусову залежність від температури:

$$V_{ок} \cong V_0 \cdot e^{-\frac{U_0}{RT}},$$

де  $U_0$  - енергія активації окислення,  $R$  - універсальна газова постійна,  $V_0$  - константа,  $T$  - температура в  $K$ .

Окисні плівки на поверхні, захищаючи поверхню металу від зовнішнього середовища, на жаль, можуть руйнуватись, так як мають недостатню міцність та пластичність. В значній мірі критерієм неруйнування окисних плівок може бути відношення об'єму окислу  $V_{ок}$  до об'єму металу  $V_{ме}$ , з якого він утворився. Це відношення називається критерієм Пілінга - Бедворта:

$$\Delta \cong \frac{V_{ок}}{V_{ме}}$$

Числові значення критерію  $\Delta$ , характер окисних плівок та їх захисні властивості для металів наведені в таблиці 5.1.

З таблиці 5.1 та *рис.5.2* видно, що за характером та захисними властивостями окисних плівок всі метали діляться на дві групи:

- I - з задовільними захисними властивостями,
- II - з незадовільними захисними властивостями.

Якщо критерій  $1.2 \leq \Delta \leq 2.2$ , то окисна плівка щільна, не руйнується та має задовільні захисні властивості.

Так, при  $\Delta < 1.2$  та при  $\Delta > 2.2$  окисна плівка має незадовільні захисні властивості.

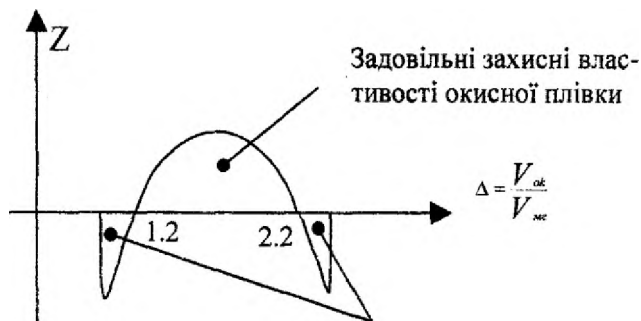


Рис. 5.2.

Незадовільні захисні властивості окисних плівок

Таблиця 5.1. Відношення об'ємів "окисел-метал" та захисні властивості окисних плівок металів.

Метал	Коефіцієнт збільшення об'єму $\Delta = \frac{V_{ок}}{V_{мет}}$	Характер окисної плівки та її захисні властивості
K Na Li Ca Ba Mg	0.45 0.55 0.57 0.64 0.67 0.81	Плівка пориста, має низькі захисні властивості
Cd Al Pb Sn Ti Zn Ni Be Cu Cr Fe	1.21 1.28 1.31 1.32 1.48 1.55 1.65 1.68 1.68 2.07 2.14	Плівка щільна, має задовільні захисні властивості
Ta Sb Nb U V W Mo	2.33 2.35 2.61 3.05 3.18 3.35 3.40	Плівка розтріскується, втрачає свої захисні властивості

## 5.1. Кінетика росту товщини плівки.

Оскільки в процесі хімічної корозії металів між зовнішнім середовищем та поверхнею металу з'являється окисна плівка, то в кінетичних дослідженнях замість двокомпонентної моделі «метал – зовнішнє середовище» необхідно розглядати трьохкомпонентну модель «метал – плівка – зовнішнє середовище».

Плівка, виконуючи роль екрану між зовнішнім середовищем і металом, суттєво впливає на кінетику свого подальшого росту, тобто на залежність  $h$  ( $\tau$ ), де  $h$  – товщина окисної плівки,  $\tau$  - час. Як показують чисельні експериментальні дослідження, всі кінетичні залежності росту окисної плівки в процесі хімічної корозії металів задовольняють одному із диференціальних рівнянь:

$$\frac{dh}{d\tau} \equiv kh^m \quad (5.1)$$

$$\frac{dh}{d\tau} \equiv k\tau^m \quad (5.2)$$

Теоретичний аналіз диференціальних рівнянь (5.1), (5.2) показує, що необхідно розглядати чотири випадки:

- 1)  $m > 0; k > 0$
- 2)  $m < 0; k < 0$
- 3)  $m > 0; k < 0$
- 4)  $m < 0; k > 0$

і розв'язувати відповідну задачу Коші з початковою умовою  $h_{\tau=0} = h_0$ .

Зупинимось детальніше на кожному із випадків.

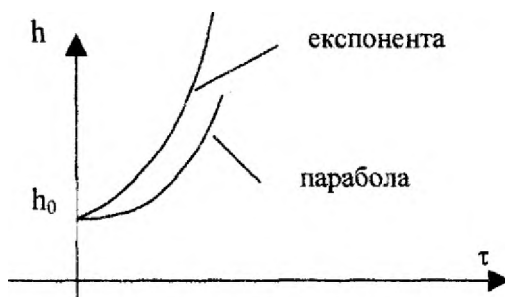
- 1)  $m > 0; k > 0$ . Одночасне виконання цих нерівностей означало б, що швидкість утворення окисної плівки пропорційна товщині вже існуючої плівки, тобто плівка

повинна прискорювати процес корозії. Насправді ж плівка виконує роль екрану між зовнішнім середовищем та поверхнею металу, і може тільки гальмувати процес корозії в часі.

Наприклад, для  $k > 0$ ;  $m = 1$  маємо

$$h = h_0 e^{k\tau} \quad (5.3)$$

$$\text{або } h = h_0 + k\tau^2 \quad (5.4)$$



**Рис. 5.3.**

(5.3) і (5.4) отримані відповідно для диференціальних рівнянь (5.1) і (5.2). Рівняння (5.3) і (5.4) відповідають прискореному росту окисної плівки в часі, що протирічить фізичній суті плівки, як екрану, і не підтверджується експериментально для нормальної корозії (без особливих умов та спеціальних стимуляторів).

- 2)  $m < 0$ ;  $k < 0$ . Одночасне виконання цих нерівностей означало б зменшення товщини плівки в процесі корозії, що теж суперечить експериментальним даним для нормальної корозії. Наприклад, для  $k < 0$ ,  $m = -1$  це дає відповідно для (5.1) і (5.2):

$$h = \sqrt{h_0^2 - |k|\tau} \quad (5.5)$$

$$h = h_0 - |k| \ln \tau \quad (5.6)$$

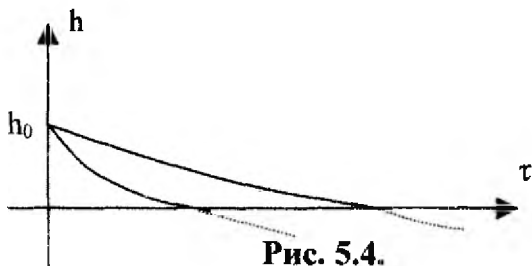


Рис. 5.4.

(Цей випадок, очевидно, може мати місце для розкислення окислу в доменному процесі, коли досягається умова  $P_{O_2} < P_{MetOn}$ , де  $P_{O_2}$  - парціальний тиск кисню,  $P_{MetOn}$  - пружність дисоціації окислу. В цьому випадку йде реакція дисоціації, тобто розщеплення окислу на метал та кисень, що використовується в металургії для відновлення металу із руд. Це досягається в безкисневих та відновлювальних середовищах, де парціальний тиск кисню суттєво знижений).

- 3)  $m > 0$ ;  $k < 0$ . Одночасне виконання цих нерівностей не перечить фізичним уявленням про кінетику реакцій при наявності екрану, т. я. веде до зменшення швидкості росту плівки відповідно від товщини плівки чи від часу. Однак, розв'язки (1) і (2) дають як і в випадку (2), залежності зменшення товщини плівки від часу окислення. Наприклад, при  $k < 0$ ;  $m = 1$ , це дає відповідно:

$$h = h_0 e^{-|k|\tau} \quad (5.7)$$

$$h = h_0 - \frac{|k|}{2} \tau^2 \quad (5.8)$$

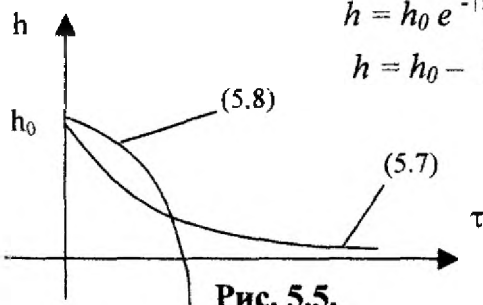


Рис. 5.5.

Цей випадок також суперечить експериментальним даним для нормальної корозії.

$k > 0$ ;  $m \leq 0$ . Одночасне виконання цих нерівностей означає, що швидкість зростання товщини плівки оберненопропорційна товщині плівки чи часові корозії.

Розглянемо окремо ці випадки для різних  $m$ :

4.1)  $k > 0$ ;  $m = 0$ . Розв'язок задачі Коші дає для рівнянь (5.1) та (5.2):

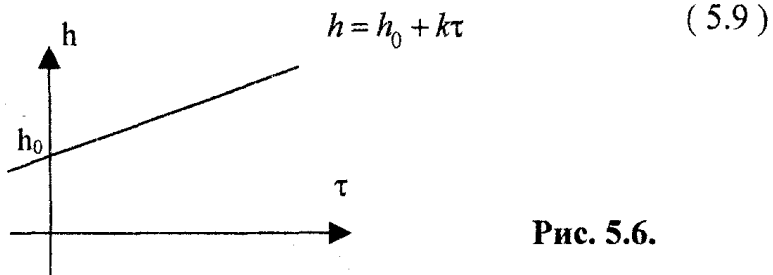


Рис. 5.6.

Лінійний ріст товщини тільки підтверджується експериментально в багатьох випадках (для I гр. табл. 5.1), особливо на ранніх стадіях корозії.

4.2)  $k > 0$ ;  $m = -1$ . Розв'язок (5.1) і (5.2) відповідно дає:

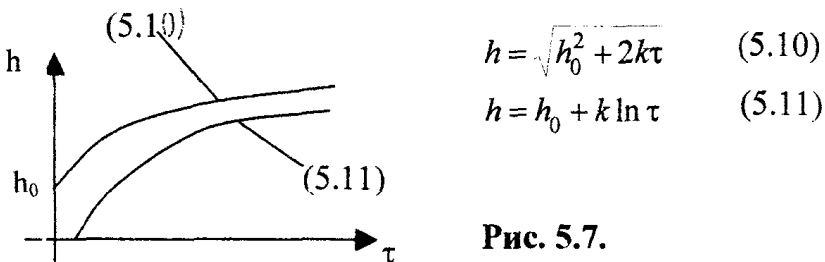


Рис. 5.7.



(5.10) підтверджується експериментально при окисленні в умовах підвищених температур багатьох металів ( Al, Fe, Cu, Sn, Cd, Cr та інших ), а (5.11) – для низькотемпературного окислення.

4.3)  $k > 0$ ;  $m = -2$ . Розв'язок (1) і (2) дає:

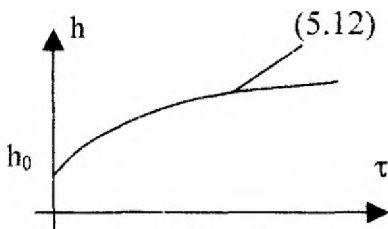


Рис. 5.8.

$$h = \sqrt[3]{h_0^3 + 3k\tau} \quad (5.12)$$

$$h = h_0 - \frac{k}{\tau} \quad (5.13)$$

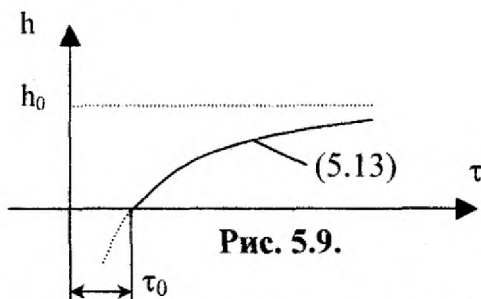


Рис. 5.9.

(5.12) виконується при високотемпературному окисленні Cu, Ni, Fe, коли процес окислення гальмується плівкою більше, ніж впливає з I-го закону Фіка.

Особливий інтерес з практичної точки зору викликає ( 5.13 ), т. я. дає обмежений ( ! ) ріст окисної плівки в процесі корозії.

Чи має це експериментальне підтвердження?

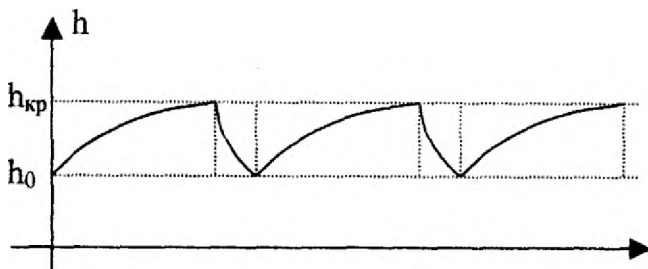
Авторові уявляється, що на обмежених проміжках часу (наприклад, порядку часу експлуатації машини) в умовах, близьких до стаціонарних, значну кількість деталей машин можна розглядати з позиції кінетичного

рівняння типу (5.13), і перш за все – виготовлених з металів та їх сплавів групи 2 табл.5.1.

Причому фактором обмеження корозії може виступати як сама окисна плівка, так і плівка разом з захисними покриттями, що для заданих умов експлуатації може давати:

$$h_{\tau \rightarrow \infty} \leq h^{\text{lim}} = h_0$$

Якщо ж кінетика корозійних процесів визначається кількома (особливо – конкуруючими) процесами, то залежності товщини окисної плівки можуть мати складну кінетику, в тому числі і коливальну. На *рис. 5.10* наведено випадок, коли товщина окисної плівки визначається двома конкуруючими процесами – агресивним середовищем, що збільшує товщину плівки, та її сколом, коли товщина  $h \rightarrow h_{\text{кр}}$ :



**Рис. 5.10.**

Кожен раз після сколу окисна плівка знову росте до значення  $h_{\text{кр}}$ , і процес повторюється.

**Таблиця 5.2.** Сплави та агресивні середовища, в яких виявлено корозійне розтріскування.

Сплав	Агресивне середовище
Алюмінієві сплави	Розчин $\text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}_2$ Розчин $\text{NaCl}$ Морська вода Повітря Водяна пара
Магнієві сплави	Приморська атмосфера Дистильована вода
Сплави міді	Пари аміаку Розчини солей ртуті
Маловуглецева сталь	Розчин $\text{NaOH} - \text{Na}_2\text{SiO}_3$ Розчини солей кальція, натрія, аммонія
Нержавіюча високохромиста сталь	Розчин $\text{NaCl} - \text{H}_2\text{O}_2$ Морська вода
Нікель	Розчин $\text{NaOH}$

## 5.2. Оцінка небезпечних наслідків корозійних ефектів.

Про безпеку корозійних процесів для подальшої експлуатації техніки можна судити:

а) за результатами безпосереднього заміру параметрів корозії:

- глибини корозії;
- площі деталі, враженої корозією;
- маси продуктів корозії тощо;

б) за зміною фізичних властивостей конструкційних матеріалів:

- характеристик міцності;

- характеристик втоми;
- електропровідності;
- теплопровідності тощо;

в) на основі дистанційного періодичного зондування експлуатаційних факторів:

- температури;
- вологи;
- концентрації забруднення повітря тощо;

г) на основі періодичної перевірки працездатності вузлів та агрегатів машин.

Найпоширенішим в практиці є візуальний метод оцінки корозії в експлуатації, т. я. не вимагає спеціального обладнання і дозволяє виявити зміни мікрогеометрії поверхні матеріалу чи захисного покриття, його набухання, відслоювання та розтріскування, вид корозійного руйнування.

Для оцінки корозійного пошкодження використовують систему балів (як правило – за десятибальною шкалою). (див табл.5.3).

При цьому корозійний стан конструкції розбивають на 6 груп стійкості:

- 0 – дуже стійкі (0 балів);
- 1 – стійкі (1-2 бали);
- 2 – задовільно стійкі (3-4 бали);
- 3 – низько стійкі (5-6 балів);
- 4 – нестійкі (7-8 балів);
- 5 – дуже нестійкі (9-10 балів).

Суттєвими недоліками бальної оцінки корозії є:

- суб'єктивність;
- відсутність кількісної оцінки залишкового ресурсу;
- неможливість виявити ранні стадії корозії.

**Таблиця 5.3. Критерії оцінки корозійного стану елементів механічних конструкцій.**

Група стійкості	Бал	Зміна декоративного виду і корозійного стану						
		Втрата металічного блиску (для металів і покриттів з низькою щорозоватістю), %	Пятна корозії		суцільна корозія, %	Захисні покриття		лаково-фарбові покриття, розтріскування
			площа, %	глибина, мм/рік		набухання, відслоювання,	осередки корозії основи.	
Дуже стійк.	0	-	-	-	-	-	-	-
Стійкі	1	До 5	< 0.1	<0.001	-	-	-	-
	2	5-10	0.1-1.0	0.001-0.005	-	-	-	-
Задовільно стійкі	3	11-20	1.1-2.0	0.006-0.01	-	-	-	Тріщини чи поверхнева сітка, видима при x12
	4	21-50	2.1-5.0	0.02-0.05	-	-	-	
Низько-стійкі	5	Більше 50	5.1-10	0.06-0.1	< 5	< 2	-	Тріщини чи сітка, видимі неозброєним оком, до 5% поверхні
	6		11-20	0.2-0.5	5-10	2-5		
Не-стійк.	7	-	21-50	0.6-1	11-20	6-10	< 5	Те ж, до 50% поверхні, глибокі тріщини до 5% поверхні
	8		> 50	2-5	21-50	11-20	5-10	
Дуже не-стійк.	9	-	-	6-10	> 50	21-50	11-20	Те ж, більше 50% та 5%
	10			> 10		> 50	> 20	

Для виявлення ранніх стадій корозії найбільш ефективно застосування металографічних методів.

Визначити склад продуктів корозії, визначити рН середовища, виявити анодні та катодні зони в умовах нерівновісної та локальної корозії та інше дозволяють хімічні і електрохімічні методи.

Сучасні електрофізичні методи дозволяють діагностувати корозію не тільки на поверхні, але і в підповерхневих шарах та у важкодоступних зонах. Струмовихреві та акустичні прилади дозволяють зафіксувати зміни геометричних розмірів (наприклад, зменшення товщини деталі під дією корозії) до 0,1 мм.

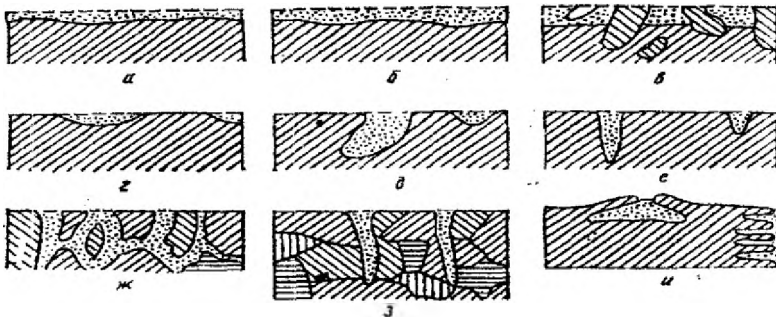
Найбільш об'єктивну інформацію про стан деталі чи конструкції після дії корозійного середовища на протязі заданого часу дає метод механічних випробовувань.

Ідея методу полягає в порівнянні механічних характеристик (при розтягуванні, згині, циклічному навантаженні) до та після корозії. Особливо відповідальні конструкції – баки, балони, трубопроводи випробовують під тиском повітря чи води. При цьому фіксують граничні значення тиску та порівнюють його зі стандартним значенням.

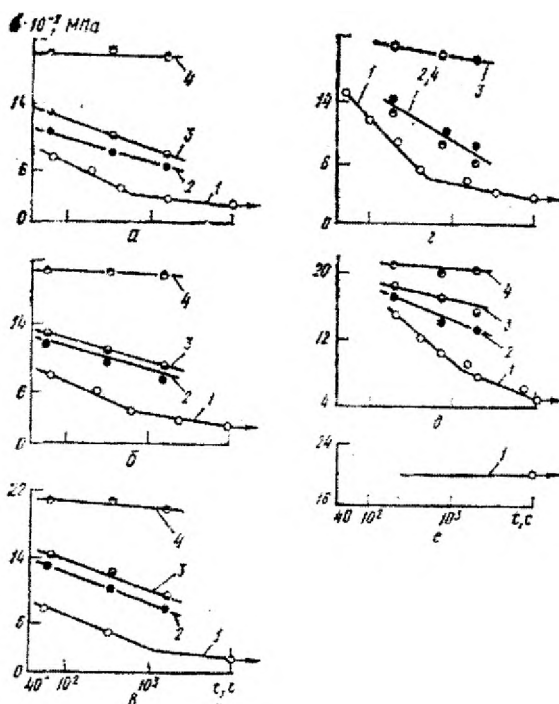
Для оцінки корозійних ефектів будемо користуватись наступними критеріями:

- 1) осередковий показник корозії  $K_0$  - число корозійних осередків, що виникли на одиниці поверхні за заданий проміжок часу в даних умовах експлуатації,  $[l]^{-2} [\tau]^{-1}$ ;
- 2) глибинний показник корозії  $K_r$  - характеризує середню чи максимальну глибину корозійного руйнування за даний час експлуатації,  $[l] [\tau]^{-1}$ ;

- 3) показник схильності матеріалу до корозії  $K_{сх}$ , що визначається часом від початку експлуатації (випробування) до початку корозійного процесу, при якому корозійне пошкодження досягло 1 % площі поверхні,  $[\tau]^{-1}$ ;
- 4) показник зміни маси матеріалу  $K_m$  - характеризує зміну маси матеріалу за час експлуатації (випробування) за рахунок втрат чи росту продуктів корозії,  $[m][l]^{-3}[\tau]^{-1}$  чи  $[m][l]^{-2}[\tau]^{-1}$ ;
- 5) механічний показник корозії  $K_{Мех}$  - характеризує зміну механічних властивостей матеріалу за час експлуатації (випробувань), наприклад,  $\delta_B$ ;  $\delta_{-1}$ ;  $K_{IC}$  тощо, в абсолютних чи відносних значеннях (МПа/год; проц./год.);
- 6) електричний показник  $K_{ел}$  - характеризує зміни електричного опору поверхні матеріалу за час експлуатації, (Ом/год. чи проц./год.).



**Рис.5.11.** Види корозії: а) рівномірна; б) нерівномірна; в) структурно-вибіркова; г) плямиста корозія; д) корозія язвами; е) корозія точками; ж) міжкристалічна корозія; з) корозія розтріскуванням; и) підповерхнева корозія.



**Рис.5.12.** Міцність зразків із сталі У-8 в розчинах.

- а) 20%-й розчин HCl;
  - б) 20%-й розчин H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>;
  - в) 20%-й розчин H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>+3% NaCl;
  - г) 50%-й розчин аміаку NH<sub>4</sub>NO<sub>3</sub> (при температурі кипіння);
  - д) 40%-й розчин аміаку NH<sub>4</sub>NO<sub>3</sub> (при температурі кипіння);
  - е) 3%-й розчин NaCl (при температурі кипіння);
- 1 – при випробуванні в електроліті;  
 2 – на повітрі (після витримки в електроліті в навантаженому стані);  
 3 – те ж, після витримки в електроліті в ненавантаженому стані);  
 4 – п.3 після старіння



### 5.3. Кінетика електрохімічної корозії.

В значній мірі на кінетику електрохімічної корозії впливають 3 основні фактори:

- корозійне середовище;
- електричний струм;
- термодинамічна стійкість та електродний потенціал металу чи сплаву.

Електрохімічна корозія розвивається при дії на метал електропровідного середовища – електроліту, яким може бути: вода, розчини кислот, солей, лугів. В електролітах молекули розчинених речовин дисоціюють (розпадаються) на вільні іони, що незалежно рухаються, а наявність електричного струму надає цьому рухові направлений характер.

Електрохімічну корозію можна розглядати як один із підрозділів електрохімічних явищ. Взагалі електрохімія вивчає фізико-хімічні процеси, що супроводжуються появою електричного струму, і має найрізноманітніше застосування (електроліз металів, гальванотехніка, хімічні джерела струму, електрохімічна корозія). Значна кількість біологічних процесів має електрохімічну природу.

Коли метал розчинити в розчині власної солі, то на поверхні розділу «метал – електроліт» настає динамічна рівновага процесів переносу іонів металу в розчин та навпаки.

В таблиці 5.4 наведені значення стандартних рівноважних потенціалів для металів при активності власних іонів в розчині що дорівнює одиниці та  $T = 298 \text{ K}$ .

Як видно із таблиць 5.4, 5.5, значення стандартного електродного потенціалу визначає корозійну стійкість металів.

**Таблиця 5.4.** Загальна термодинамічна характеристика корозійної стійкості металів та їх електродні потенціали.

Група	Характеристика термодинамічної стабільності	Електродна реакція	Електродний потенціал $E^0, \text{В}$
Метали підвищеної термодинамічної нестабільності (неблагородні)	Корозія може розвиватись навіть в нейтральних розчинах (без окислювачів) -----	Li - e Rb - e K - e Cs - e Sr - e Ca - e Na - e Mg - e U - 3 e Al - 3 e Ti - 2 e Zr - 4 e Ti - 3 e V - 2 e Mn - 2 e Nb - 3 e Zn - 2 e Cr - 3 e Fe - 2 e	- 3.045 - 72.925 - 2.925 - 2.923 - 2.89 - 2.87 - 2.714 - 2.37 - 1.80 - 1.66 - 1.63 - 1.53 - 1.21 - 1.18 - 1.18 - 1.10 - 0.762 - 0.74 - 0.440
Термодинамічно нестійкі метали	Стійкі в нейтральних середовищах без кисню. В кислих середовищах корозують навіть без $O_2$ + - - -	Cd - 2 e Mn - 3 e Co - 2 e Ni - 2 e Mo - 3 e Sn - 2 e Pb - 2 e W - 3 e	- 0.402 - 0.283 - 0.277 - 0.250 - 0.20 - 0.136 - 0.126 - 0.11
Метали проміжної термодинамічної стабільності	Стійкі в кислих та нейтральних середовищах (за відсутності $O_2$ та окислювачів) + + - -	Bi - 3 e Cu - 3 e Hg - e Ag - e	+ 0.226 + 0.337 + 0.789 + 0.799
Метали високої термодинамічної стабільності (благородні)	Не корозують в нейтральних середовищах в присутності $O_2$ . корозують в кислих середовищах при наявності $O_2$ + + + -	Pd - 2 e Ir - 3 e Pt - 2 e	+ 0.987 + 1.000 + 1.19
Метали повної термодинамічної стабільності (суперблагородні)	Не корозують в кислих середовищах при наявності $O_2$ + + + +	Au - 3 e	+ 1.50

Таблиця 5.5. Корозійна стійкість металів.

Група стійкості	Середовище				Електродний потенціал $E^0$ , В
	Нормальне	кисле	нормальне, + $O_2$ , + окислювачі	Кисле, + $O_2$ , + окислювачі	
1. Підвищеної термодинамічної нестійкості (Li, Rb, K, Cs, Na, Mg, Al, U, Ti, V, $Mn^{+2}$ , Zn, Cr, Fe) (неблагородні)	-	-	-	-	- 3.045...- 0.440
2. Термодинамічно нестійкі (Cd, In, Tl, $Mn^{+3}$ , Co, Ni, Mo, Ge, Sn, Pb, W) (неблагородні)	+	-	-	-	- 0.402...-0.11
3. Проміжної термодинамічної стабільності (Bi, As, Cu, Hg, Ag, Rh) (напівблагородні)	+	+	-	-	+ 0.226...+ 0.80
4. Високої термодинамічної стабільності (Pd, Ir, Pt) (благородні)	+	+	+	-	+ 0.987...+ 1.19
5. Повної термодинамічної стабільності (Au) (благородні)	+	+	+	+	+ 1.50

Взагалі явище електрохімічної корозії можна моделювати на прикладні роботи гальванохімічних елементів. Як відомо, в гальванічному елементі одночасно протікають два відносно незалежних процеси - анодний та катодний. Найчастіше результатом анодного процесу є розчинення металу в електроліті з віддачею відповідної кількості електронів, а катодного - відновлення на катоді водню чи кисню.

Головна причина локалізації анодного та катодного процесів - це електрохімічна неоднорідність поверхні, що корозує. Ця неоднорідність пов'язана з різними значеннями електродних потенціалів на різних ділянках поверхні і може мати макро- та мікроскопічну природу.

Макроелектрохімічна неоднорідність має місце при контакті різнорідних металів, суцільних плівок на поверхні і т. д.

Мікроелектрохімічну неоднорідність спричиняє неоднорідність структури металу, границі зерен, неметалічні включення і т. д.

#### 5.4. Чинники, що впливають на корозію.

Як показує досвід, теоретичні та експериментальні дослідження, кінетика корозійних процесів в різних умовах має різну швидкість, а ці умови визначаються величезною кількістю чинників, що можуть впливати на кінетику корозії. В таблиці 5.6 наведені 35 найбільш впливових чинників. Умовно вони можуть бути розділені на 4 групи:

- чинники, що характеризують стан матеріалу;
- конструктивні;
- технологічні;
- експлуатаційні.

Таблиця 5.6. Чинники, що впливають на розвиток корозії.

Група	Назва чинника	Позначення
1. чинники стану матеріалу	Термодинамічна стійкість.	X <sub>1</sub>
	Положення в періодичній системі.	X <sub>2</sub>
	Співвідношення компонент в сплаві.	X <sub>3</sub>
	Структура.	X <sub>4</sub>
	Неоднорідність (гетерогенність) поверхні.	X <sub>5</sub>
	Мікрогеометрія (шорховатість) поверхні.	X <sub>6</sub>
	Внутрішні (залишкові) напруги.	X <sub>7</sub>
2. чинники конструктивного виконання виробу	Контакт різнорідних металів.	X <sub>8</sub>
	Контакт «метал - полімер».	X <sub>9</sub>
	Характер з'єднання (різьба, зварювання, пайка тощо).	X <sub>10</sub>
	Обтічність елементів, наявність застійних зон.	X <sub>11</sub>
	Загальна компоновка, взаємне розміщення елементів.	X <sub>12</sub>
	Концентрація напруг.	X <sub>13</sub>
	Доступ до відновлювальних покриттів, видалення продуктів корозії.	X <sub>14</sub>
Можливість використання допоміжного захисту.	X <sub>15</sub>	
3. технологічні чинники	Хімічний склад металу (основні, легуючі, домішки).	X <sub>16</sub>
	Фазовий склад (рівномірність розподілу фаз, структур).	X <sub>17</sub>
	Стан поставки (брус, лист, провід).	X <sub>18</sub>
	Особливості виготовлення напівфабрикатів (ливарне, обробка тиском тощо).	X <sub>19</sub>
	Особливості обробки поверхні (механічна, термохімічна, електрохімічна тощо).	X <sub>20</sub>
	Особливості захисних покриттів (технологічні).	X <sub>21</sub>
	Особливості допоміжної обробки (мастил, нейтралізаторів тощо).	X <sub>22</sub>
Технологічні особливості з'єднань (дефекти зварювання, пайки, склеювання тощо).	X <sub>23</sub>	
4. експлуатаційні чинники	Термін експлуатації (випробовування).	X <sub>24</sub>
	Температура та її зміни.	X <sub>25</sub>
	Товщина та рівномірність розподілу водних середовищ рН розчину.	X <sub>26</sub>
	Характер забруднення (механічне, агресивні компоненти, мікробіологічне, продукти корозії та їх розподіл).	X <sub>27</sub>
	Наявність стимуляторів (інгібіторів) корозії.	X <sub>28</sub>
	Тиск агресивних середовищ (постійний, змінний).	X <sub>29</sub>
	Сонячна радіація (прямі промені, розсіяні, затемнення).	X <sub>30</sub>
	Рух середовищ (ламінальний, турбулентний).	X <sub>31</sub>
	Зовнішнє навантаження (маса, вітер, тертя, взаємодія з іншими елементами конструкції).	X <sub>32</sub>
	Характер контакту з агресивним середовищем (локальний, рівномірний, періодичний, безперервний).	X <sub>33</sub>
	Обмін повітря (відкрита атмосфера, обмежений доступ, замкнений доступ).	X <sub>34</sub>
		X <sub>35</sub>

Для хімічного моделювання процесів корозії в загальному вигляді необхідно було б розв'язати систему рівнянь типу:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = f(x_1; x_2; \dots; x_{35}; \tau; h) \\ x_{35} = x_{35}(\tau; h; x_1; x_2; \dots; x_{34}) \end{cases} \quad (5.14)$$

при заданих початкових умовах.

Сказати, що розв'язок (5.14) - складна задача, то означає нічого не сказати. Задача архіскладна, і в найближчі роки навряд чи матиме розв'язок, якщо взагалі коректно про це говорити. І справа ось у чому.

По-перше, нема (і навряд чи буде) залежності кінетики корозії від кожного із факторів  $x_1 \dots x_{35}$  (не забуваймо, що це ще не всі, а тільки - головні фактори, що впливають на корозію).

По-друге, кількість сплавів, станів їх поверхні, комбінацій різнорідних контактів, концентрацій напруг, покриттів і т. д. - швидше за все - належить нескінченній множині.

По-третє, вплив кожного із чинників  $x_1 \dots x_{35}$  та їх взаємовплив має нелінійний характер, зі стохастичною природою, протікає за нерівновісних умов, тобто такі, що вивчаються міждисциплінарною наукою синергетикою.

В багатьох випадках такі системи мають стійкий аттрактор, тобто кінетика може бути більш-менш успішно прогнозуватись. Але є випадки, коли маємо дивний аттрактор, розв'язки нестійкі, кінетика майже непрогнозована (ефект «метелика»).

Можливо, в майбутньому якраз синергетичні принципи, і перш за все - використання принципу підпорядкування - дозволить побудувати загальну теорію кінетики корозійних процесів (хоч би з урахуванням чинників  $x_1 \dots x_{35}$ ).

Причому в високому розумінні під теорією слід розуміти можливість кількісного прогнозу корозії в часі, використовуючи виключно відомі фізичні константи (термодинамічні, електричні, міжмолекулярні).

На даний час вчення про корозію, як і більшість наук, базується на емпіричних даних, які дозволяють прогнозувати кількісні характеристики тільки для даних конкретних умов на даному проміжку часу.

А як бути в тому випадку, коли для даних конкретних умов задачі нема емпіричних даних? Або коли неможливо кількісно оцінити наслідки того чи іншого чинника?

Тоді в прийнятті інженерного рішення на перший план виступає інтуїція конструктора, яка базується на знаннях, досвіді, відчутті гармонії тощо.

Щоб зменшити роль суб'єкта, досить часто користуються колективною думкою:

- в вигляді спільної роботи консиліуму;
- в вигляді незалежних експертних оцінок групою експертів.

В першому випадку може мати більший вплив суб'єктивність лідера консиліуму (а такий завжди є - і добре, якщо лідер - дійсно найкращий фахівець в даній галузі, а коли просто начальник, директор, генерал, тобто лідер за посадою?).

Звичайно, більше об'єктивності має метод експертних оцінок, проведених незалежно один від одного (краще - в різних просторово-часових координатах) групою експертів.

До таких оцінок ми звикли в не кількісних видах спорту (фігурне катання, стрибки в воду, художня гімнастика тощо). На відміну від футболу, тенісу, бігу, де результат оцінюється кількісно в голах, очках, секундах, в

некількісних видах кількість отримується за суб'єктивними оцінками арбітрів.

В таблиці 5.7 наведені експертні оцінки, проведені групою з шести незалежних експертів (визнаних фахівців у сфері корозії) чинників  $x_1 \dots x_{35}$  для п'яти видів корозії:

- атмосферної;
- міжкристалітної;
- під напругою;
- мікробіологічної;
- пігінгової.

**Таблиця 5.7.** Дані експертних оцінок впливу чинників корозії.

Чинник	Експерт						Сума балів	
	1	2	3	4	5	6	$\sum \alpha_i$	$\Delta S_i$
<b>Атмосферна корозія</b>								
5	7	8	7	8	7.5	6	43.5	12
6	7	7	7	7	7.5	7	42.5	11
8	7	10	9	9	10	9	54	22.5
9	10	9	10	10	9	10	58	26.5
15	6	6	7	6	6	8	39	7.5
24	5	5	5	5	2.5	4	26.5	5
26	2	1	2	3	2.5	2	12.5	19
27	2	2.5	2	3	2.5	3	15	16.5
28	2	2.5	2	1	2.5	1	11	20.5
35	4	4	4	3	2.5	5	22.5	9
<b>Міжкристалітна корозія</b>								
3	4	4	3	1	2	2	16	17
4	1	1	1	2	1	2	8	25
5	9	10	7	8	7	9	50	17
16	7	6	9	7	8	7	44	11
17	2.5	2	3	5	4	4	20.5	12.5
20	2.5	3	3	3	3	2	16.5	16.5
24	9	8	9	9	9	9	53	20
27	5	6	5	5	5	5	31	2
29	9	9	9	10	10	9	54	21
34	6	6	6	5	6	6	35	2



Чинник	Експерт						Сума балів	
	1	2	3	4	5	6	$\sum \alpha_i$	$\Delta S_i$
<b>Корозія під напругами</b>								
7	4	6	4	4	5	5.5	28.5	4.5
10	10	6	9	8.5	9	5.5	48	15
13	1	1	2	1.5	2	1	8.5	24.5
23	4	6	8	8.5	9	5.5	41	8
24	9	9	7	6.5	7	9	47.5	14.5
27	7	3	6	6.5	2	2	26.5	6.5
29	8	10	10	10	9	10	57	24
30	4	6	4	4	5	5.5	28.5	4.4
34	4	6	4	4	5	8	31	2
33	4	2	1	1.5	2	3	13.5	19.5
<b>Мікробіологічна корозія</b>								
6	7	8	8	7	8	6	44	10
9	9	10	10	9	10	7	55	21
15	9	8	8	9	8	9	51	17
22	9	8	8	9	8	9	51	17
25	3	5.5	6	5	4	4	27.5	6.5
26	6	3	2	5	4	9	29	5
27	3	3	3	2	4	2	17	17
28	1	1	1	2	1	1	7	27
31	3	5.5	4	2	4	4	22.5	11.5
35	5	3	5	5	4	4	26	8
<b>Пітінгова корозія</b>								
3	8	7.5	9	6	9	5	44.5	11.5
4	8	7.5	9	9	9	9	51.5	18.5
5	2	3	1	2	2	9	19	14
6	8	9	7	9	9	7	49	16
20	10	10	9	9	7	9	54	21
24	6	6	6	7	3	5	33	0
27	4	3	3	2	5	5	22	11
28	2	1	2	2	1	2	10	23
34	2	3	4	5	5	2	21	12
35	5	5	5	4	5	2	26	7

Як показує аналіз результатів таблиці 5.7, найбільш впливовими чинниками є:

а) для атмосферної корозії - контакт «метал - полімер» ( $x_9$ ) та контакт різнородних металів ( $x_8$ );

б) для міжкристалітної корозії - наявність стимуляторів корозії ( $x_{29}$ ) та термін експлуатації ( $x_{24}$ );

в) для корозії під напругами - наявність стимуляторів корозії ( $x_{29}$ );

г) для мікробіологічної корозії - контакт «метал - полімер» ( $x_9$ ), можливість використання допоміжного захисту ( $x_{15}$ ), особливості допоміжної обробки ( $x_{22}$ );

д) для пітингової корозії - технологічні особливості обробки поверхні ( $x_{20}$ ) та структура металу ( $x_4$ ).

В таблиці 5.8 наведені підсумкові дані провідних чинників для одночасного протікання атмосферної, міжкристалітної, мікробіологічної, пітингової та корозії під напругами.

Аналіз таблиці 5.8 показує, що найбільший вплив на корозію у всіх її проявах має термін експлуатації (160 балів та провідну роль у чотирьох із п'яти видів корозії).

pH розчину хоча й поступається за сумою балів чиннику  $x_9$  - контакт «метал - полімер», але потрапляє у перші 10 чинників для всіх видів корозії.

**Таблиця 5.8.** Провідні чинники для одночасного розвитку всіх видів корозії (за даними експертних оцінок).

	Позна- чення чинника	Атмос- ферна корозія	Міжкри- сталітна корозія	Корозія під на- пругами	Мікроби- ологічна корозія	Пітингова корозія	Сума балів
Термін експлуатації	$x_{24}$	+	+	+	-	+	160
Контакт «метал - полімер»	$x_9$	+	-	-	+	-	113
pH розчину	$x_{27}$	+	+	+	+	+	111.5
Наявність сти- муляторів корозії	$x_{29}$	-	+	+	-	-	111
Мікрогеометрія (шороховатість)	$x_6$	+	-	-	+	+	93
Можливість вико- ристання допо- міжного захисту	$x_{15}$	+	-	-	+	-	90

## 5.5 Сучасні методи боротьби з корозією в умовах конструювання, експлуатації та ремонту машин.

На *рис.5.13* наведені основні методи захисту матеріалів від корозії, що діляться на три великі групи:

- вплив на матеріал (легування, обробка поверхні, захисні покриття, раціональне конструювання);
- вплив на середовище та умови експлуатації (електрохімічний захист, раціональне конструювання, герметизація, сушка, створення штучних середовищ);
- комбінованої дії (комплексний вплив на матеріал і середовище).

Розглянемо детальніше деякі із напрямків захисту від корозії, що на нашу думку, найбільше впливають на надійність машин.

### *1. Раціональне конструювання деталей та вузлів для роботи в агресивних середовищах.*

Так як в реальних конструкціях з'єднуються метали з різними електрохімічними потенціалами, то для захисту від контактної корозії слід ізолювати ці метали між собою пластмасами, резиною, герметиками, мастикою. Елементи в конструкції необхідно розміщувати так, щоб не утворювалися щіли, зазори, застійні зони, пазухи (*рис.5.14*). Якщо ж їх не вдається уникнути, то необхідно ізолювати чи заповнити герметиком, чи мастилом, що значно зменшить ризик від корозії.

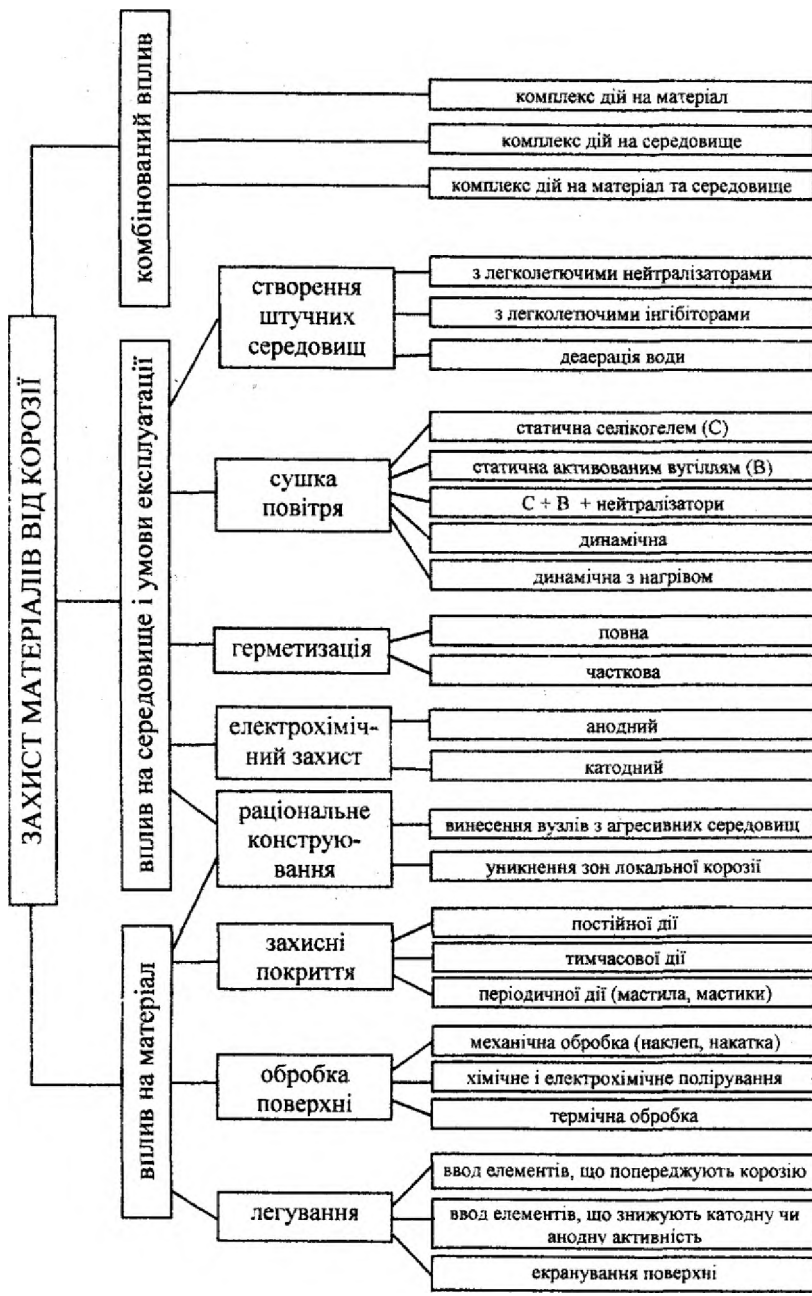
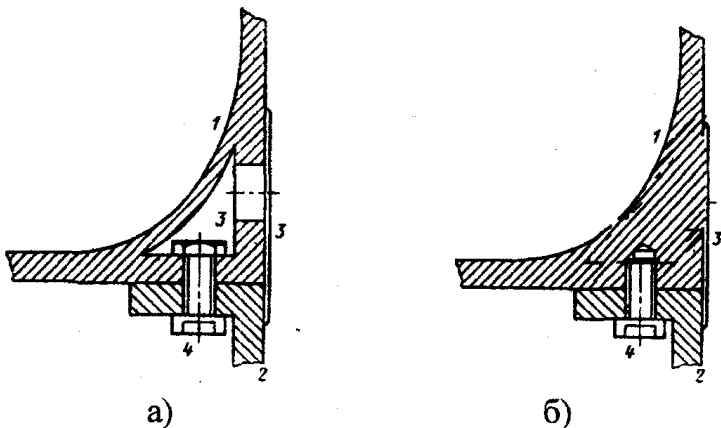


Рис. 5.13



**Рис.5.14.** Нерациональна (а) та раціональна (б) конструкторська схема.

## 2. Раціональний вибір корозійностійких матеріалів.

На жаль, нема універсальних матеріалів, доступних за ціною, стійких при всіх видах корозії. Не створено єдиної теорії, здатної передбачити та кількісно розрахувати наслідки корозійного руйнування в конкретних умовах експлуатації, та й механізми підвищення корозійної стійкості сплавів суттєво відрізняються. Тому при виборі матеріалів для роботи в агресивних середовищах, в залежності від конкретних умов, необхідно слідувати рекомендаціям:

а) корозійностійкі сталі;

для агресивних середовищ – 08X13, 12X13, 20X13, 30X13, 12X17, 20X13НЧГ9 та інші, де перша цифра – вміст вуглецю в сотих %, друга – вміст хрому в %. Як бачимо, це високохромисті сталі, які стійкі в азотній, уксусній, хромовій кислоті, лугах та солях при невисоких (до 50 °С) температурах;

для соляних середовищ – сталі 09X15H8Ю, 07X16H6, 08X17H5M3 та інші – хромово-нікелеві та хромово-нікеле-молібденові сталі;

для середовищ середньої агресивності – сталі 08X17T, 08X17T1, 15X28 – з вмістом 0.2...1 % титану;

для високоагресивних середовищ – сталі 08X18H10T, 08X18H12T та інші;

сплави на нікелевій основі для дуже агресивних середовищ – ХН65МВ, Н70МФ та інші;

б) двошарові листові сталі, що складаються із основного шару (низьколегована чи вуглецева сталь) та корозійностійкого покриваючого шару. Такі листові композиції виготовляють гарячим способом пакетним прокатом чи ливарним покриттям;

в) жароміцні сталі – сталі, що працюють значний час ( $10^3 \dots 10^5$  годин) при високих температурах ( $500 \dots 700^\circ\text{C}$ ) при значних навантаженнях: 12X8ВФ, 20X13, 15X11МФ, 12X13, 15X5М, 12X18H10T та інші;

г) жаростійкі сталі і сплави з підвищеною температурою утворення окалини ( $700 \dots 1200^\circ\text{C}$ ): 15X5, 08X17T, 15X18СЮ, ХН38Т та інші.

Як видно із назв, маємо основні легуючі елементи для підвищення корозійної стійкості – хром, нікель, марганець, та допоміжні – азот, ніобій, вольфрам, мідь, молібден, титан, ванадій, алюміній, кобальт.

### *3. Зменшення агресивності середовища чи його заміна.*

Даний напрямок боротьби з корозією може бути впроваджений як на стадії розробки та конструювання машини, так і безпосередньо в експлуатації, і має велике майбутнє.

Може бути реалізованим слідуючими методами:

відсмоктуванням чи відгоном агресивного середовища від деталі (димососом чи вентилятором);

зменшенням концентрації агресивного середовища (методом розбавлення);

зменшення температури агресивного середовища (охолодження);

видаленням відповідальних вузлів конструкції за межі зони агресивного середовища;

заміна агресивного середовища (напуск нейтрального чи інертного середовища) та інші.

#### *4. Виконання електрохімічного захисту.*

Полягає в організації примусової реакції електрохімічного відновлення окисного металу, і має надзвичайно великі перспективи, особливо на транспорті, де може бути використана бортова електромережа. В залежності від схеми, найбільшого поширення набув анодний та катодний захист від корозії. Згідно законів Фарадея, можна розрахувати необхідну потужність мережі та показати, що для автомобіля масою 1000 кг, що втрачає від корозії 1 % своєї ваги в рік, необхідна потужність електрохімічного захисту має порядок 5...10 Вт.

*5. Захисні покриття (ізоляція конструкції від агресивного середовища).*

Аналіз методів захисту матеріалів від корозії показує, що значне місце серед цих методів займають захисні покриття. Захисні покриття умовно можна розділити на чотири групи:

а) за терміном експлуатації покриття розділяють на постійні (наносяться при виготовленні машини), тимчасові (консервація на міжопераційному збереженні чи транспортуванні машини) та періодично-відновлювальні (в періоди ремонтів та технічного обслуговування).

б) за призначенням покриття ділять на захисні (для захисту поверхні матеріалу від агресивного середовища), декоративні (для надання виробу відповідного зовнішнього вигляду, кольору, маскувальних чи інформаційних властивостей) та спеціальні (забезпечують необхідну твердість, стійкість проти зношування, електропровідність, термостійкість та інші властивості поверхні).

в) за способом нанесення розділяють:

фізичні (конденсація, плакіровка, металізація та інші); в виробництві металоконструкцій не знайшли (окрім плакіровки) широкого вжитку;

електрохімічні (електролітичні на катоді, анодного оксидування, електрофоретичні), мають суттєвий недолік – нерівномірність покриття для деталей складної конфігурації;

хімічні (хімічне осадження) – дають досить рівномірне покриття, але значно відстають від електрохімічних за продуктивністю.

г) за видом (фізико-механічних властивостей та природи) покриття ділять на:

неорганічні (цинкові, кадмієві, нікелеві, мідні, хромові, олов'яні, срібні, олов'яно-свинцеві, цинково-мідні, цинково-нікелеві, а також неметалічні – фосфатні, оксидні, оксидофосфатні та інші);

органічні (всі лако-фарбувальні покриття – ЛФП);

комбіновані (одно-, дво- та багатофазні системи металевих чи неметалевих плівок). Приймати рішення про застосування того чи іншого виду захисного покриття необхідно з врахуванням конкретних умов експлуатації, технологічних можливостей, економічних показників, можливих наслідків тощо.



## 6. Забезпечення надійності машин при зношуванні.

### 6.1. Стан поверхні деталей та надійність машин.

В процесі експлуатації деталі взаємодіють з навколишнім середовищем. При цьому можливе навантаження всього об'єму деталі, його значної частини чи лише поверхневих та приповерхневих шарів.

В першому випадку накопичення пошкоджень відбувається по всьому об'єму деталі, в останньому – локалізується в поверхневих шарах.

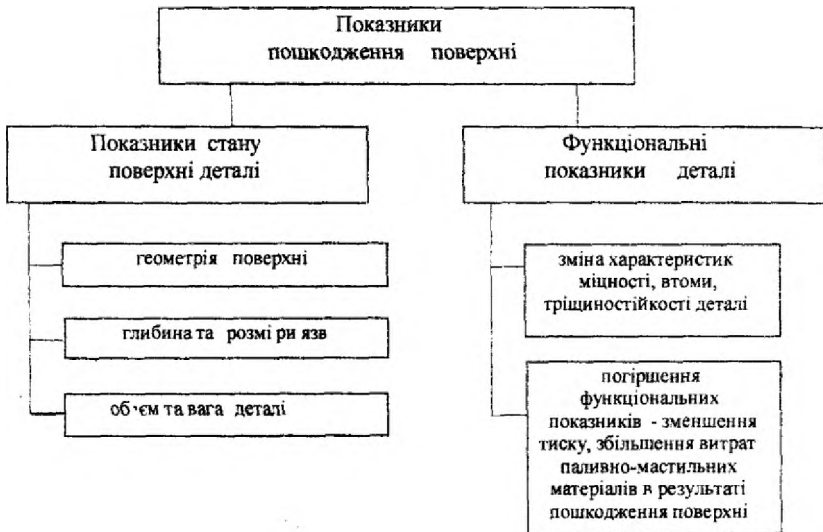
Прискорене накопичення пошкоджень в поверхневому та приповерхневому шарі деталі зустрічається доволі часто і характерне для так званих контактних явищ – взаємодії поверхні деталі з твердими тілами, потоками рідин та газів. Це призводить до таких видів руйнування деталі, як зношування, фретинг-корозія, корозія, ерозія, контактна втома, високотемпературна газова корозія та інші.

Всі ці процеси призводять до пошкодження поверхні та втрати функціонального призначення деталей внаслідок підвищення тертя, збільшення зазорів чи повного руйнування, і, в кінцевому результаті – зменшенні показників надійності. Наприклад, зношування кілець в зазорі “поршень – гільза циліндра” призводить до зменшення компресії в камері двигуна внутрішнього згоряння. При досягненні критичного зношування кілець двигун втрачає можливість самопідтримувати процес, тобто втрачає можливість стійкої роботи – показники надійності двигуна (і автомобіля в цілому) при цьому зменшується до нуля.

Як показує практичний досвід, пошкодження поверхневих шарів та зношування призводить до втрати

несучої здатності деталей та елементів конструкцій і в багатьох випадках обмежує ресурс машини.

Таблиця 6.1.



В таблиці 6.1 показано, що стан поверхні деталей впливає на дві групи показників – геометричні та функціональні.

Задача теорії надійності – побудувати кількісні моделі зміни показників 1 та 2 групи, які дали б змогу спрогнозувати ресурс машини в заданих умовах експлуатації.

Розглянемо найвпливовіші види руйнування поверхні деталей та елементів конструкцій.

У відповідності з ГОСТ 27674-88, зношування – це процес видалення матеріалу з поверхні твердого тіла і (чи) збільшення залишкової деформації при терті, що виявляється в поступовій зміні розмірів і (чи) форми тіла.

Зношування, як правило, це складний фізико-механо-хімічний процес.

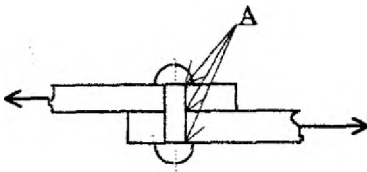
Зношування, що виникає при терті навантажених поверхонь, найпоширеніший вид пошкоджень більшості машин та механізмів.

До речі, зношування характерне не тільки для деталей машин, але й елементів будівельних конструкцій, одягу, взуття, дорожнього покриття тощо.

В багатьох випадках, як форми зношування, розглядаються фретинг-корозія та ерозія, в тому числі і кавітаційна.

Фретинг-корозія – це корозія в місцях щільного стиснення робочих поверхонь, якщо внаслідок вібрацій між цими поверхнями виникають мікроскопічні зміщення зсуву.

Наприклад, при тривалій експлуатації заклепкових з'єднань за умов вібрації в зонах А виникають плями корозії, які в подальшому стають причиною зародження тріщин втоми.



**Рис.6.1.**

Ерозія – це поступове руйнування поверхні деталі в потоках рідин, газів, механічних частинок чи електричних розрядів.

Це складний фізико-механо-хімічний процес, на який впливає навколишнє середовище, окислення, нагартівка, залишкові напруги та ін. На явищі ерозії засновані технології піско-струмневої, електро-ерозійної та ультразвукової обробки.


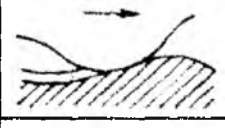


Кавітація (від лат. cavitas – пустота) – виникнення в рідині порожнин (сфер), заповнених газом, парою чи їх сумішшю.

Ерозійне зношування можна спостерігати на електричних контактах, деталях, що контактують з рідинами при значних швидкостях тощо.

Розглянемо більш детально зношування, що виникає внаслідок утворення та руйнування фрикційних зв'язків, що мають молекулярно-механічну природу.

Що ж діється в контактї двох тіл за різних умов навантаження ?

**Таблиця 6.2**

№	Схема	Характер деформування	Число циклів до руйнування	Причина зношування поверхні
1		Пружна деформація поверхневого шару	$n \geq N$	багатоциклова втома
2		Пластична деформація поверхневого шару	$1 < n \leq N$	малоциклова втома
3		Мікрорізання поверхневого шару	$n = 1$	мікрорізання
4		Руйнування окисних плівок	$n > N$	руйнування плівок
5		руйнування основного матеріалу	$n = 1$	Когезійний (адгезійний) відрив основного матеріалу

В таблиці 6.2 наведена класифікація основних схем контактування в залежності від умов навантаження, які розміщені по зростаючій важких наслідків для тріади тертя.

В правильно підбраній тріаді в результаті контакту деформація поверхневих шарів повинна бути пружною (схема 1), і така схема в умовах експлуатації – найбажаніша. По-перше, багатоциклова контактна втома дозволяє досягати ресурсу  $\tau \approx 10^5 \dots 10^6$  годин. По-друге, за таких умов накопичення пошкоджень має плавно-поступовий прогнозований характер.

Найнебажанішим є контакт за схемою V, який може виникати в дуже навантажених парах тертя при відсутності мастил, з суттєвим підвищенням температури.

Руйнування поверхні в контакті може наступати при різних числах циклів. Якщо руйнування поверхні регламентується втомою, число циклів  $N$  можна визначити по відповідній кривій втоми.

Провідним процесом при терті та зношуванні є взаємодія мікрорельєфів поверхонь, що контактують.

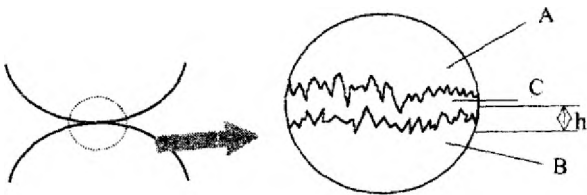


Рис. 6.2.

На рис.6.2. показані основні “діючі особи” процесу зношування при терті – це контактуючі поверхні А,В та проміжний шар С, який в першому наближенні

можна вважати двофракційним – мастила та продукти зношування.

Ця “трійця” (A+B+C) – так звана тріада тертя – визначає значну частину долі контакту. Як слідує із *рис.б.2*, значною мірою доля контакту залежить від мікрогеометрії в контакті. Але не тільки. Як зазначалось вище, зношування при терті – це складний механо-фізико-хімічний процес, що включає механічну взаємодію мікрорельєфів, міжатомні та міжмолекулярні взаємодії, хімічні та електрохімічні реакції, причому як між собою, так і з навколишнім середовищем.

Оскільки процес тертя досить енергоємний, в контакті можуть виникати локальні температури, що значно перевищують середні значення.

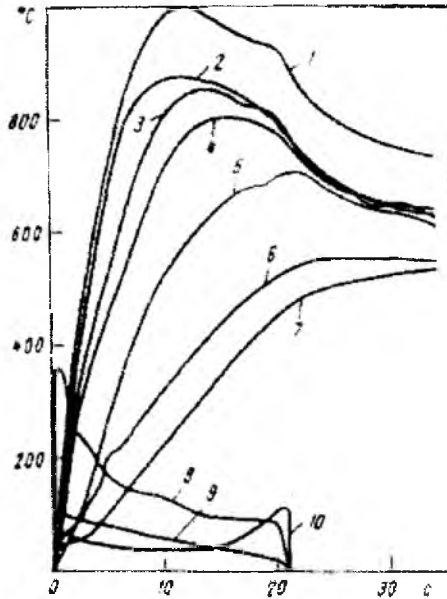
Розрахунки та експериментальні дослідження показують, що в залежності від конкретних умов, температура при терті може бути настільки високою, що призведе до оплавлення тонкого шару поверхні. В зв'язку з неоднорідністю теплового поля в просторі та часі слід розглядати (І.В.Крагельський):

- середню об'ємну температуру тіл, що контактують;
- середню температуру поверхні;
- локальну температуру в одиночному контакті.

В залежності від призначення вузла тертя (гальмо, передача, шип), провідну роль може виконувати кожна із названих температур.

Крім власне температури, на кінетику зношування при терті буде впливати:

- градієнт температури;
- здатність матеріалів акумулювати тепло;
- умови тепловіддачі.



**Рис.6.3.** Температурне поле гальмівного барабана на відстані від поверхні: 1 – 0,2 мм; 2 – 0,25 мм; 3 – 0,55 мм; 4 – 0,75 мм; 5 – 1,8 мм; 6 – 7,7 мм; 7 – 11,7 мм; 8 – потужність тертя; 9 – кутова швидкість; 10 – момент гальмування.

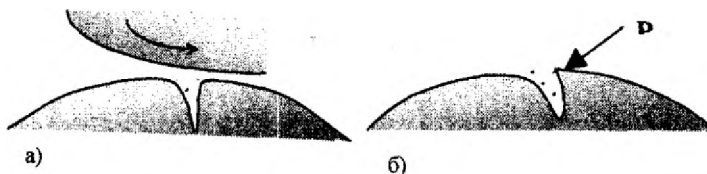
На *рис. 6.3* наведені графіки зміни температурного поля гальмівного барабана в просторі (в глибину від поверхні) та часі, а також потужність тертя, кутова швидкість та момент гальмування, як функції часу. Як видно із рисунка, для поверхневих шарів (1 - 5) характерне різке підвищення температури на протязі перших 5...10 с, з подальшими її зниженнями до рівноважного значення, тоді як для глибинних шарів (6 - 7) йде монотонне збільшення температури до рівноважного значення.

Звичайно, в процесі зношування при терті, крім температури, значна роль належить:

- утворенню окисних плівок та їх руйнуванню;
- розчиненню одного із тіл під дією механо-хімічних процесів контакту;
- підвищенню крихкості поверхні в результаті насичення воднем, що виділяється з мастил та ін.

Головна особливість нормального зношування при терті – це відсутність будь-яких видів руйнування основного матеріалу в контакті.

Надзвичайно великий вплив на кінетику зношування при терті (ЗПТ) належить мастилам. З однієї сторони, мастила, зменшуючи сили тертя, суттєво уповільнюють процес зношування. Але крім позитивних наслідків слід пам'ятати, що, потрапляючи в мікротріщини, мастила можуть розклянювати їх, що прискорює руйнування поверхневого шару (*рис. 6.4*).



**Рис.6.4**

## 6.2. Види зношування при терті.

Згідно *рис. 6.5*, всі види зношування можна умовно розділити на три великі групи:

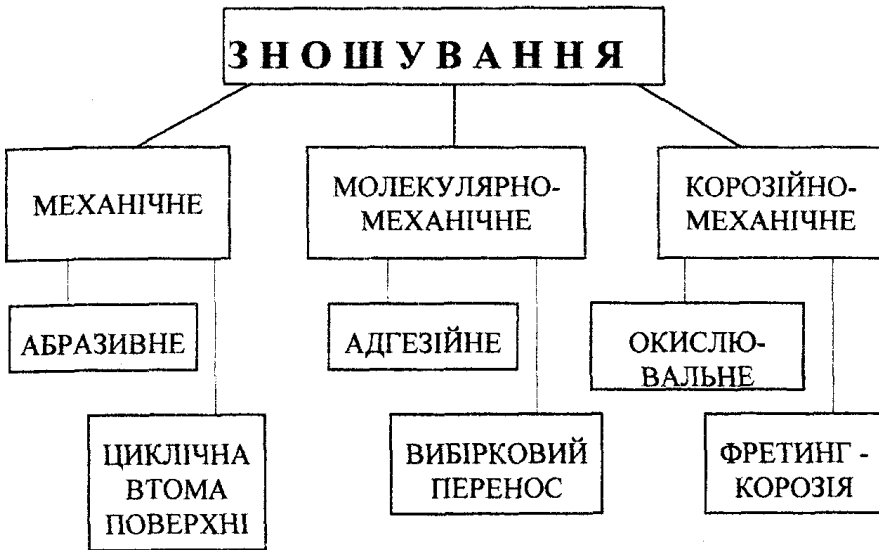
1 – механічне (тільки в результаті механічної взаємодії матеріалів, що контактують);

2 – молекулярно-механічне, що супроводжується також взаємодією на атомно-молекулярному рівні;

3 – корозійно-механічне, коли значна роль в зношуванні належить хімічній взаємодії з середовищем.



Розглянемо деякі специфічні особливості кожного із видів зношування .



**Рис.6.5**

Абразивним зношуванням будемо називати таке зношування поверхні деталі, що настає в результаті мікрорізання чи мікродряпання поверхні абразивними мікрочастинами, що мають доступ в зону контакту. При цьому виді зношування матеріал видаляється з робочої поверхні в вигляді дуже дрібної стружки чи мікрочастинок та уламків, що крихко відділяються від поверхні за один чи багато циклів навантаження.

Абразивні частини можуть потрапити в зону тертя такими шляхами:

- разом з пилом, паливом чи мастилом;
- із продуктів зношування;
- залишатись в приповерхневому шарі при обробці деталі абразивним інструментом;

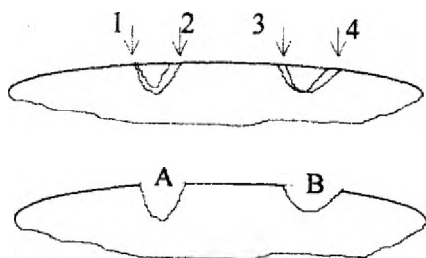
- в результаті забруднення поверхні і т.д.

Абразивні мікрочастини (в основному –  $\text{SiO}_2$ ) можуть бути різної форми та орієнтації. При цьому різати та знімати стружку можуть лише деякі з них, решта лише пластично деформує поверхневі шари, залишаючи на них сліди мікроподряпин чи рисок.

Абразивне зношування характерне для багатьох видів машин, особливо для кар'єрної, сільськогосподарської техніки, тракторів, деяких деталей автомобілів, відкритих передач. Як можна вплинути на кінетику абразивного зношування? Перш за все необхідно ізолювати зону контакту від абразивних частинок:

- заміна відкритих передач закритими;
- фільтрація газів, мастил та палива;
- ліквідувати доступ пилу та бруду в зону контакту та ін.

Циклічна втома поверхні – виникає під дією циклічного навантаження поверхні. При цих умовах на поверхні виникають мікротріщини, приводячи до крихкого відламування частин поверхні, які згодом можуть перетинатись, приводячи до крихкого відламування частин поверхні (рис. 6.6).



**Рис.6.6.**

Цей вид зношування має місце при терті кочення з ковзанням.

Зони крихкого видалення мікрочастинок в результаті злиття мікротріщин називають пітінгами (раковинами, ямками).

Як показують досліді, необхідною умовою утворення пітінгів є наявність мастил в зоні контакту, що потрапляють в первинну мікротріщину. Мастила, що потрапили в відкриту мікротріщину, в наступному циклі розклинюють її. Це відбувається внаслідок періодичного перекриття входу в тріщину в результаті пружної взаємодії в зоні контакту. При наступних циклах навантаження тріщина поглиблюється, і на кінцевій стадії перетинається з іншими тріщинами, утворюючи пітінг.

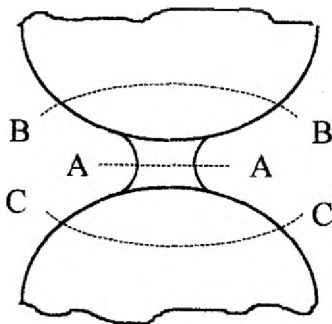
Під дією змінних контактних напруг може наступати і інший вид пошкоджень - відшарування. Особливо даний вид руйнування характерний для різких аномалій властивостей між шарами деталі (загартування, цементация, азотування поверхневого шару). В таких випадках можливе виникнення та розвиток підповерхневих тріщин.

Ліквідувати відшарування можна збільшенням товщини зміцненого шару чи зменшенням питомого навантаження.

Адгезійне зношування – настає при мікрозварюванні матеріалів, що контактують з утвореннями міцних зв'язків в зоні контакту.

Необхідна умова утворення зв'язків мікрозварювання – руйнування плівки мастил.

При подальшому переміщенні контактуючих поверхонь одна відносно іншої можливі слідуючі схеми руйнування мікрозв'язків:



- руйнування по тілу зв'язка  
(A-A, рис.6.7)

- вирив основного матеріалу  
одного із тіл, що контактують  
(B-B, C-C).

**Рис.6.7**

Це призводить до збільшення коефіцієнта тертя та прискореного зношування. Найгірший сценарій розвитку адгезійного зношування – це утворення задирів (заїдань), в результаті чого на поверхні тертя залишаються широкі та глибокі борозни з нерівними берегами, виривами та наростами, що може привести до заклинювання деталей. Такий вид зношування має місце в сильно навантажених зубчастих передачах, циліндро-поршньовій групі двигунів при обмеженому доступі мастил та досягненні закритичних температур.

Зношування в умовах вибіркового переносу характеризується атомарними явищами в зоні контакту. На поверхні утворюються шари, збагачені атомами елементів, що покращують умови контакту, зменшують тертя та питомі навантаження, їх крапкий розподіл по поверхні контакту.

Окислювальне зношування має місце, коли кисень взаємодіє з поверхнею металів та утворює окисні плівки. Якраз окисні плівки і є причиною зношування. Окислення металів настає при взаємодії з киснем, що є в повітрі, розчинений в мастилах та паливі.

Окисні плівки не схильні до мікрозварювань, так як мають неметалічну природу. При терті плівки

поступово стираються чи відриваються від металу, видаляючись з мастилами, а на їх місці утворюються нові.

Фретинг-корозія, чи контактна корозія, - це особливий вид зношування в місцях мікропереміщень поверхонь, що мають щільний контакт. Наприклад, болтові та заклепкові з'єднання, що зазнають дії вібрацій.

В даному випадку на поверхнях, що контактують, утворюються продукти корозії. На першій її стадії руйнуються мікровиступи, на другій – розвиваються корозійно-втомні процеси, на третій – зароджуються мікротріщини, що на четвертій стадії переростають в макротріщини.

Основні засоби боротьби з фретинг-корозією полягають в усуненні безпосереднього контакту між поверхнями за допомогою проміжних шарів (покриття, мастили, прокладки). При підборі контактуючих матеріалів слід пам'ятати, що швидкість фретинг-корозії оберненопропорційна їх твердості.

### 6.3. Кількісні оцінки зношування та підвищення надійності машин.

На жаль, до сьогоднішнього дня не створено теорії зношування при терті, яка б дозволила з перших принципів – (фундаментальних констант, параметрів виготовлення та експлуатації деталі) визначити кінетику її зношування без емпіричних даних. І головна перешкода в створенні такої теорії – надзвичайна складність механо-фізико-хімічних процесів в зоні контакту, їх нелінійний характер, велика кількість факторів, що впливають на показники зношування.

Для кількісної оцінки зношування використовують наступні три показники:

а) лінійне зношування, яке визначається зміною розмірів деталі до поверхні тертя;

б) об'ємне зношування, яке визначається зміною об'єму деталей, що контактують;

в) масове зношування, яке визначається зміною маси деталей, що контактують.

Іноколи в експлуатації користуються і іншими показниками – зміною зазорів, відхиленням від правильної геометричної форми (еліпсність, конусність) тощо.

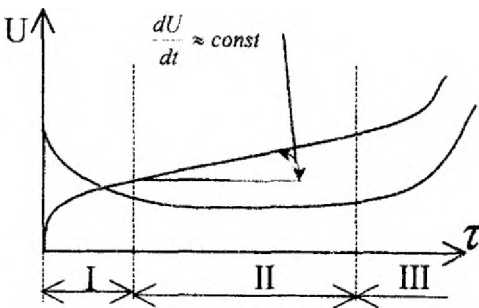
В подальшому будемо позначати:

$U$  – лінійне зношування (мкм); швидкість зношування

$$V_u = \frac{du}{dt} \text{ (мкм/год); інтенсивність зношування } I = \frac{du}{ds}$$

(мкм/км), де  $s$  – шлях пари тертя. В експлуатації буває зручно через  $s$  позначати загальний пробіг машини (по спідометру).

Будемо виділяти три стадії зношування (рис. 6.8):



- 1 - стадія приробки;
- 2 - стадія рівномірного зношування;
- 3 - стадія інтенсивного (катастрофічного) зношування.

Рис.6.8

Як видно із *рис.6.8* на першій стадії  $\frac{du}{d\tau} < 0$ ; на другій -  $\frac{du}{d\tau} \approx 0$ ; на третій -  $\frac{du}{d\tau} > 0$ .

Якщо пара тертя працює з перервами, то інтенсивність зношування в період запуску машини більша, і стадія 2 (*рис.6.8*) може мати ступінчатий характер. По стадії 2 визначають термін експлуатації пари тертя:  $\tau_{\text{lim}} = \frac{U_{\text{lim}} - U_0}{\text{tg}\varphi}$ ,

де  $U_{\text{lim}}$  - граничне зношування;  $U_0$  - початкове зношування (на стадії приробки);  $\varphi$  - кут нахилу кривої зношування на стадії 2.

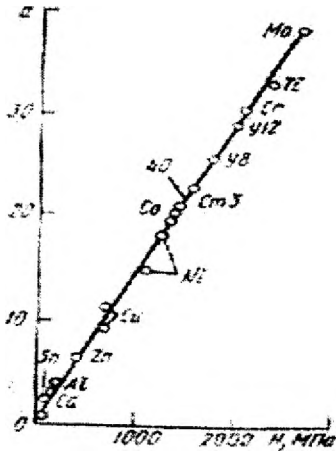
На кінетику зношування в першу чергу впливають: силові та кінематичні параметри – тиск на поверхні тертя  $P$  та швидкість відносного ковзання  $V$ ; параметри стану, структури та механічних властивостей матеріалів, що контактують: твердість  $H$ , границя плинності  $\sigma_T$ , модуль пружності  $E$ ; параметри поверхневого шару – мікро- та макрогеометрії, напруженого стану; виду тертя і умов змащування; зовнішніх умов – температури, вологості, вакууму, наявності вібрацій тощо.

Із механічних властивостей добру кореляцію зі стійкістю проти зношування  $d$  має твердість (*рис.6.9, 6.10*). Для чистих металів (*рис.6.9*) маємо:

$$d = \frac{U_2}{U_1} = a \times \frac{H}{P_a}$$

де  $U_2/U_1$  - відношення зношування випробного зразка  $U_2$  до зношування еталону  $U_1$ ;  $H$  – твердість зразка;  $P_a$  - нормальний тиск в контакті;  $a$  - коефіцієнт пропорційності.

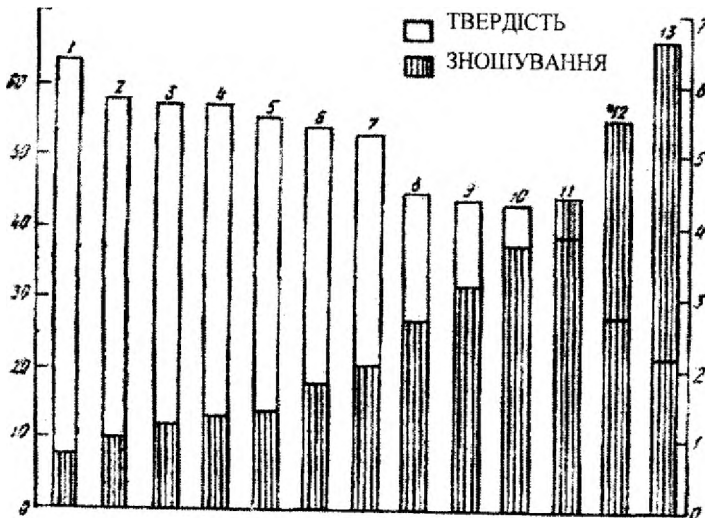
На *рис.6.10* приведена діаграма залежності зношування від твердості для конструкційних сталей, яка має таку ж тенденцію – при збільшенні твердості поверхні зношування зменшується.



**Рис.6.9.** Залежність між відносною стійкістю до зношування та твердістю металів.

ТВЕРДІСТЬ НРС

ЗНОШУВАННЯ НА  
1 КМ ШЛЯХУ. МГ



**Рис. 6.10.**



На рис 6.10 зображена діаграма зношування конструкційних сталей при окислювальному зношуванні в залежності від твердості:

1 – 18ХГТ ; 2 – 12ХНВА; 3 – 18ХНВА; 4 – 20Х; 5 – СХ8; 6 – 40Х; 7 – сталь 45 (покращена); 8 – 18ХНВА(низький відпуск); 9 – 30ХГСА; 11- 37ХНЗА; 12 – ХГСА; 13 – сталь 45 (без обробки).

В літературі наведена велика кількість часткових випадків для оцінки параметрів зношування. Так, для зношування без мастил швидкість зношування можна визначати :

$$V_u = KP^m V^n$$

де  $P$  - тиск на поверхні тертя,  $V$  - швидкість відносного ковзання,  $K$  - коефіцієнт зношування, що характеризує матеріал пари тертя та умови зношування;  $n \approx 1$ ;  $m = 0,5...3$ .

Для об'ємного зношування можна використовувати емпіричну залежність:

$$V = LK\left(\frac{P}{P_i}\right)^f$$

де  $V$  - зміна об'єму деталей при зношуванні;  $L$  - шлях ковзання пари тертя;  $P$  - тиск;  $P_i$  - тиск, що відповідає плинності матеріалу з меншою твердістю;  $f$  - константа.

## 6.4 Методи експериментального вимірювання зношування.

Існує велика кількість експериментальних методів вимірювання зношування. Розглянемо основні з них:

а) метод прямого вимірювання зношування — полягає в безпосередньому вимірюванні за допомогою мікрометра чи індикатора розмірів деталей в процесі випробувань чи експлуатації. Різниця лінійних розмірів на попередній та даній стадіях замірів характеризує приріст зношування;

б) метод оцінки зношування по зменшенню маси — базується на зважуванні деталі до та після зношування; використовується для деталей з невеликою масою;

в) метод аналізу мікрочастинок в оливі базується на вивченні продуктів зношування в пробі оливи (хімічним чи поліграфічним методом);

г) метод радіоактивних ізотопів — є частковим випадком попереднього методу. Полягає в тому, що в матеріал деталі, зношування якої вивчається, вводять радіоактивний ізотоп. При цьому разом з продуктами зношування в оливу буде потрапляти пропорційна їм кількість атомів радіоактивного ізотопу. По інтенсивності їх випромінюванням в пробі оливи можна зробити оцінку інтенсивності зношування. Різновидом даного методу є інтегральне (по всьому об'єму) та локальне (на окремих ділянках) введення ізотопів;

д) профілографічний метод — базується на вимірі профілів (наприклад, зубів в зубчастих колесах) в процесі зношування за допомогою спеціального прилада — профілографа;

е) метод штучних баз — полягає в тому, що на поверхні створюють поглиблення заданої глибини  $h_0$  (рис. 6.11).

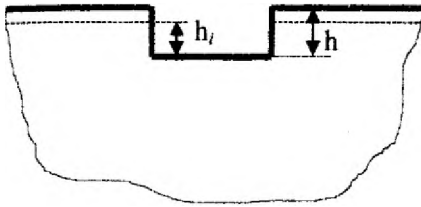


Рис. 6.11.

При зношуванні глибина буде зменшуватись. Різниця  $h_0 - h_1$  буде характеризувати зношування  $U_1$ .

$$U_1 = h_0 - h_1.$$

Виготовляються спеціальні прилади, що дозволяють визначати зношування з точністю не гірше 1,5...2 мкм за допомогою нанесених штучних баз.

### 6.5. Шляхи підвищення стійкості проти зношування.

При підвищенні стійкості проти зношування велика роль належить раціональному вибору матеріалів тріади тертя – пари тертя і мастил: це дозволяє суттєво (інколи в десятки разів) покращити стійкість проти зношування. Як зазначалось вище, велика кількість факторів впливає на кінетику зношування, і кожен із цих факторів може стати керуючим при боротьбі зі зношуванням.

Загалом є три основні групи факторів управління процесом зношування:

- конструкторські (раціональна конструкторська схема, вдало підібрані матеріали навантаження, макро- та мікрогеометрія, умови для підводу мастил та охолодження тощо);
- технологічні (дотримання технологічної дисципліни в процесі обробки, допусків, послідовності операцій і т.д.);
- експлуатаційні (дотримання режимів навантаження, швидкості, температури, регламенти, вчасні огляди та поточний ремонт, правильний підбір експлуатаційних

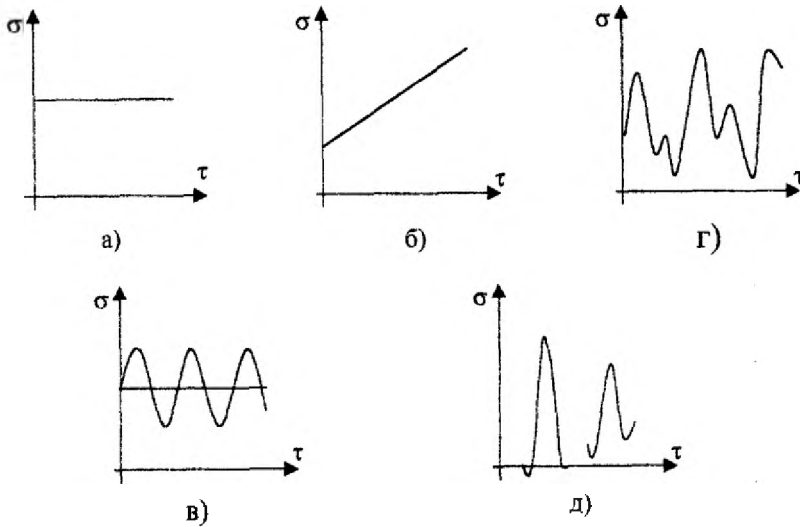
матеріалів та їх вчасна заміна, запобігання проти попадання бруду, пилу та вологи в зони тертя, і т.д.).

Наведемо основні чинники із зазначених трьох груп, що можуть суттєво підвищити стійкість проти тріади тертя:

- раціональний вибір матеріалів тріади тертя;
- раціональне конструкторське рішення;
- раціональне температурно-силове навантаження;
- підвищення якості виготовлення деталей;
- технологічні заходи:
- пластичне деформування поверхні;
- термічна та хіміко-термічна обробка;
- металізація;
- раціональні фінішні операції (алмазна розточка замість хонінгування) і т.д.
- стабільність матеріалів (з малим розсіюванням основних властивостей);
- підвищення твердості поверхневих шарів (азотування, цементация, поверхневе гартування);
- методи зміцнюючих технологій поверхні;
- нанесення стійких проти зношування покриттів;
- застосування сучасних мастил та присадок;
- зменшення коефіцієнта тертя за рахунок особливої обробки поверхневих шарів (насичення сполуками вуглецю, пасивація поверхні радіоактивним опроміненням, аморфізація поверхні тощо).
- дотримання вимог експлуатації

## 7. Забезпечення надійності машин в умовах циклічних навантажень.

Вплив навколишнього середовища та технологічних факторів на деталь чи конструктивний елемент сприймають через питоме навантаження  $\sigma(\tau)$ . Найтиповіші варіанти навантаження наведені на *рис. 7.1*:



**Рис. 7.1.** Види навантажень

В реальних машинах та механізмах найчастіше зустрічаються варіанти навантаження в) – д), вони ж являють найбільшу небезпеку з точки зору надійності машин, тобто найінтенсивніше впливають на її зниження.

Проблема втоми, тобто руйнування конструкційних матеріалів під дією циклічних навантажень, значно нижчих за границю міцності (а в багатьох випадках – коли мова йде про багатоциклову втому – і значно нижче границі плинності) – виникла понад півтора століття як наукова проблема. Як проблема практична – проблема втоми існувала і буде існувати завжди.

Значна частина деталей машин та конструктивних елементів працюють в умовах повторних (циклічних) навантажень і їх ресурс повністю контролюється втомою матеріалів, з яких вони виготовлені.

Перші системні дослідження втоми виконав німецький вчений Велер в 1858 році. Дуже повчальний історичний аналіз розвитку науки про втому конструкційних матеріалів. Дослідження механіки та фізики втомного руйнування мали нерівномірний характер, то прискорювались, то сповільнювались, і в багатьох випадках прискорення досліджень співпадали з подіями, що впливали на долю значної частини людства. За В.С.Івановою, перший період в дослідженні втоми закінчився в 1910-11 рр. накопиченням значних експериментальних даних по циклічній міцності сталей та чавунів, впровадженням прискорених способів визначення границі втоми, виявленню надзвичайно високої чутливості характеристик втоми до стану поверхні - шорсткості, подряпин, гострих надрізів, різких перепадів розмірів.

В 30-і роки отримані дуже цінні дані про вплив масштабного фактору, де було показано різке зменшення границі втоми зі збільшенням розмірів зразків, а також значне розсіювання експериментальних даних (наприклад, циклічної довговічності) при досить жорстких вимогах до однорідності початкових умов.

В роки другої світової війни – в зв'язку зі стрімким розвитком авіації – дослідження проблеми втоми знову прискорились. Було побудовано багато моделей накопичення пошкоджень при нестационарних циклічних навантаженнях, а також підвищення циклічної міцності за допомогою спеціальних технологій обробки поверхні. В повоєнні роки розвиток реактивної авіації та практичної

космонавтики (50-60 роки) знову привернула увагу вчених до проблеми втоми.

В 70-80 роки масове будівництво ядерних та хімічних реакторів ініціювали дослідження тріщиностійкості та корозійної тріщиностійкості при циклічних навантаженнях.

В тому числі – в період 70-80 років – в центрі світової наукової думки з дослідження проблеми втоми виявилась Україна. Це – Інститут проблеми міцності, Інститут механіки (Київ), Київський політехнічний інститут, фізико-механічний та політехнічний інститути у м.Львові та ряд інших академічних, галузевих НДІ та вузів.

Слід сказати, що лише за період з 1981 по 1990 рр. у м.Житомирі проведено 10 Всесоюзних конференцій та симпозіумів, присвячених проблемі втоми в умовах низьких та високих температур, складного напруженого стану, поверхневих покриттів тощо.

В червні 1993 р. Україна приймала VIII Міжнародну конференцію з механіки руйнування.

За період дослідження втоми значний вклад в її розвиток внесли всесвітньовідомі вчені Веллер, І.А.Одинг, С.В.Серенсен, М.М.Давиденко, В.В.Болотін, В.І.Іванова, Г.С.Писаренко, В.Т.Трощенко, А.А.Шанявський та ряд інших.

Слід відзначити, що за два роки до кінця II тисячоліття проблема втоми далека до свого завершення. І на головне питання – при розробці нового сплаву чи конструкційного матеріалу - як спрогнозувати його характеристики міцності, втоми, тріщиностійкості без проведення експериментальних досліджень – все ще нема відповіді. Деяку надію в цьому напрямку дає розвиток термоактиваційних уявлень про природу руйнування та

синергетика (В.С.Іванова, С.М.Журков, Дж.Кенеді, І.Г.Грабар та інші).

Можливо, перше десятиріччя наступного тисячоліття принесе сподівані результати в побудові теорії втоми, що об'єднає нескінченно велику множину даних, накопичених сотнями наукових лабораторій світу, в єдину струнку наукову теорію втоми.

Автор прогнозує, що це відбудеться за 10-20 років саме на базі синергетики термоактиваційних уявлень про природу руйнування.

### 7.1. Основні терміни та визначення.

Згідно з ГОСТ 23207-78:

**Втома** – це процес поступового накопичення пошкоджень в матеріалі під дією змінних напруг, що призводять до зміни його властивостей, утворенню і розвитку тріщини та руйнування.

**Багатоциклова втома** – це втома матеріалу, при якій втомне пошкодження чи руйнування настає в основному при пружному деформуванні (без накопичення пластичних деформацій).

**Малоциклова втома** – це втома матеріалу, при якій втомне пошкодження чи руйнування настає при пружнопластичному деформуванні (зі значними пластичними деформаціями).

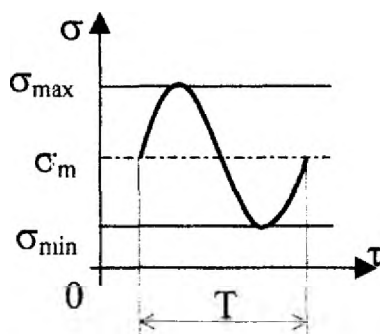


Рис. 7.2. Параметри циклу навантаження



Цикл навантаження характеризують (рис. 7.2):

- періодом циклу  $T, c$  ;
- частотою навантаження  $f = 1/T, zц$  ;
- максимальною та мінімальною напругою циклу  $\sigma_{max}$  ,  $\sigma_{min}$  , **МПа** ;
- середньою напругою циклу  $\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2$  ;
- амплітудою напруг  $\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / 2$  ;
- коефіцієнтом асиметрії циклу  $R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$  .

Цикл, у якого максимальні та мінімальні напруги рівні по модулю та протилежні за знаком, називається симетричним.

Якщо  $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$  , то для такого циклу:

$$\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min}) / 2 = 0 \quad R = \sigma_{min} / \sigma_{max} = -1$$

В довідковій літературі під  $\sigma_1$  якраз і наводиться границя втоми при симетричному циклі.

Цикл, у якого одна з напруг -  $\sigma_{max}$  чи  $\sigma_{min}$  - дорівнює нулю, називається віднульовим.

Якщо  $\sigma_{min} = 0$  , то  $R = 0 / \sigma_{max} = 0$  , якщо  $\sigma_{max} = 0$  , то  $R = \sigma_{min} / 0 = \infty$  .

Границя витривалості ( $\sigma_R$ ) – це максимальна амплітуда напруг, при якій ще не настає втомне руйнування на заданій базі випробувань.

## 7.2. Методи визначення характеристик втоми.

Основним методом визначення характеристик матеріалів при руйнуванні від втоми є метод натурних випробувань:

- гладких лабораторних зразків;
- лабораторних зразків з імітацією дії зовнішніх факторів:

а) конструктивних (розміри, концентратори напруг в вигляді отворів, гантелей, виточок, надрізів тощо);

б) технологічних (стан поверхні, поверхневої обробки, її зміцнення);

в) експлуатаційних (зовнішнє середовище, фретинг-корозія, температурно-силові умови навантаження тощо);

- елементів натуральних конструкцій, коли необхідно реалізувати умови, максимально наближені до реальних умов експлуатації.

При цьому можуть бути реалізовані найрізноманітніші схеми навантаження: циклічний розтяг – стиск ( $P - C$ ); циклічний згин ( $Z$ ); циклічний згин з обертанням ( $ZO$ ); циклічне кручення ( $K$ ) та інші.

На *рис. 7.3* наведені основні схеми навантаження, що найчастіше зустрічаються в практиці: а – циклічний розтяг; б, в – циклічний згин; г-е – консольний згин; ж – циклічне кручення.

На *рис. 7.4* наведені схеми машин для циклічних випробовувань.

Як зазначалося вище, випробовування можуть проводитись як на гладких зразках, так і на зразках з концентраторами (отворами, виточками, вирізами тощо), основні із яких наведено на *рис. 7.5*.

### 7.3. Інженерні методи визначення характеристики втоми.

Надзвичайно велике значення для підвищення надійності машин надається експрес-методам визначення характеристик втоми. Найпоширеніший метод експрес-аналізу конструкційного матеріалу – це стандартні короткочасні випробовування.

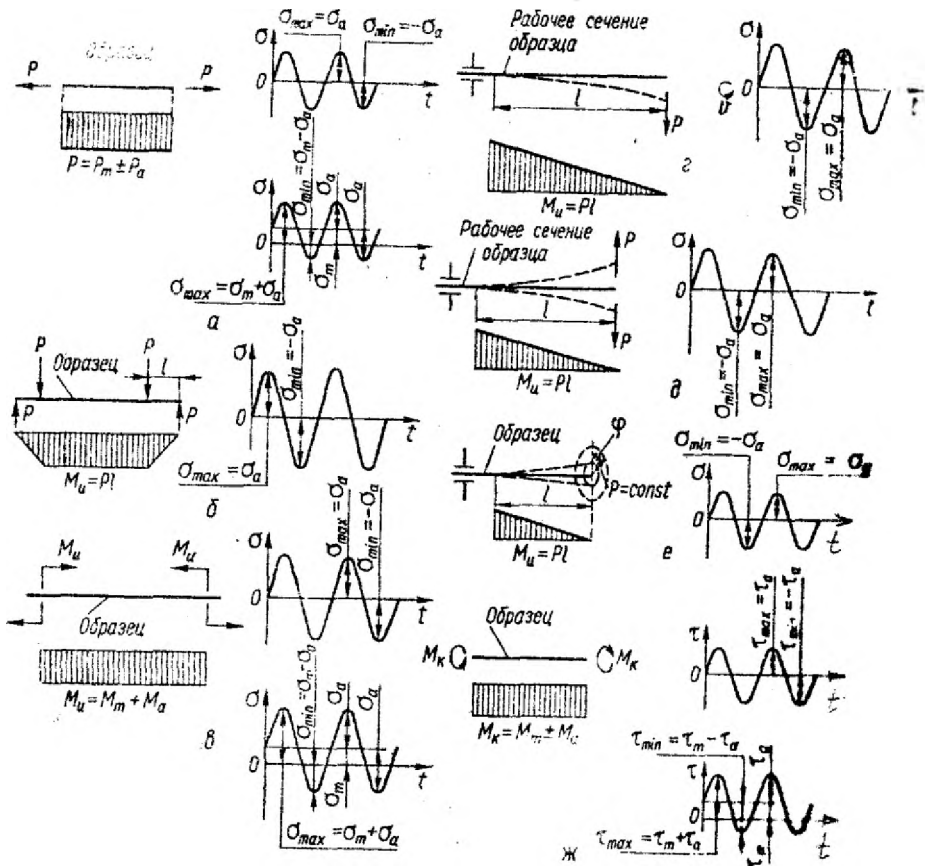


Рис. 7.3. Схеми навантаження зразків при випробуваннях на втому.

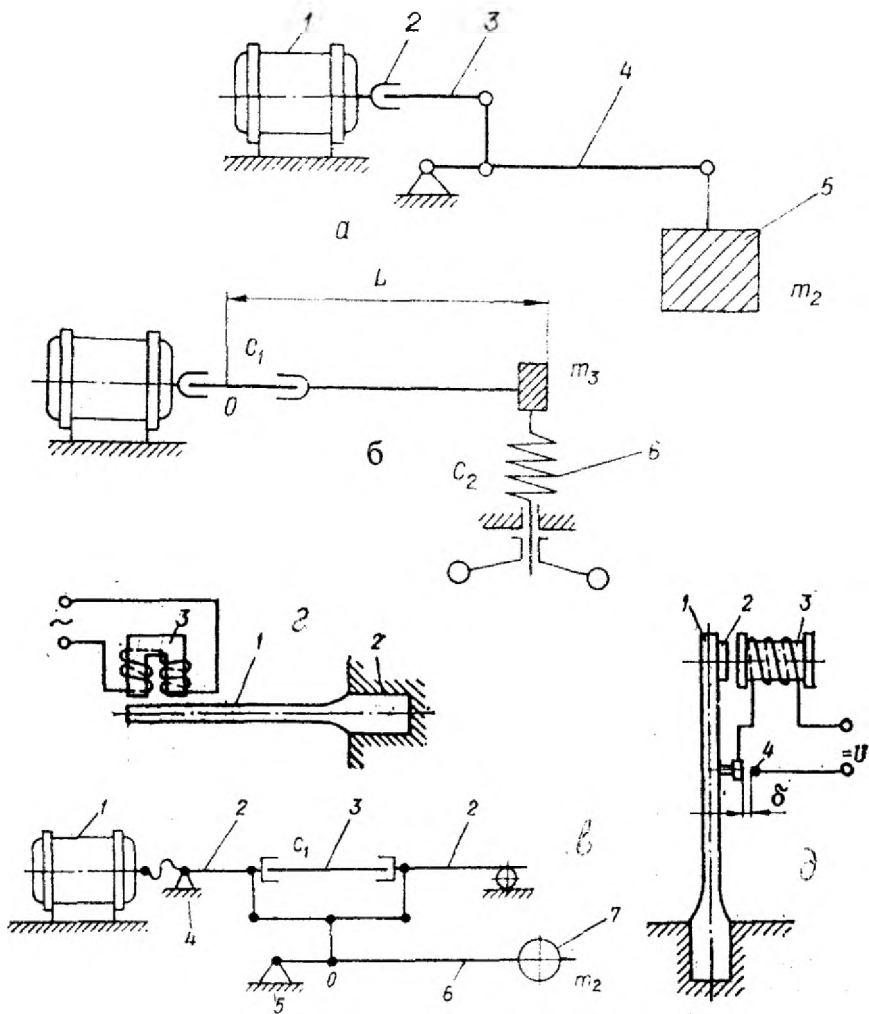


Рис. 7.4. Схеми машин для випробувань на втому:  
 а) консольний згин (КЗ) – мяке навантаження;  
 б) консольний згин – жорстке навантаження;  
 в) чистий згин – мяке навантаження;  
 г) - д) консольний згин при електромагнітному збудженні.

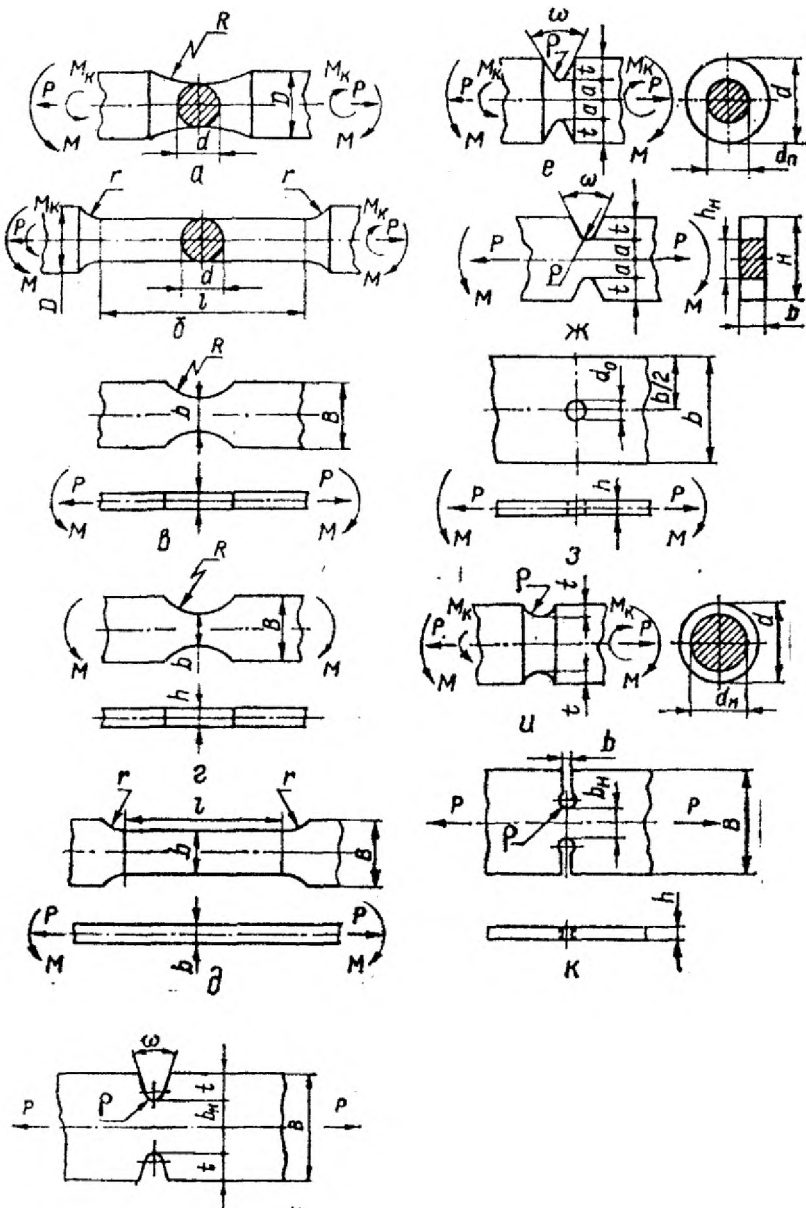


Рис. 7.5. Стандартні зразки для випробувань на втому.

На отримання стандартної кривої деформування зразка на розтяг зі швидкістю навантаження  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-3} \dots 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  необхідно 5...50 хв. Зі стандартної кривої деформування маємо  $\{ \sigma_T, \sigma_B, \psi, \delta \}$  – відповідно  $\sigma_T$  – границя плинності,  $\sigma_B$  – границя міцності,  $\psi$  – відносне звуження,  $\delta$  – відносне видовження зразка.

Ці дані дозволяють прогнозувати характеристики втоми. Так, існує емпіричний зв'язок границі втоми  $\sigma_{-1}$  з границею міцності  $\sigma_B$ :

$$\sigma_{-1} = (0,4 \dots 0,6) \sigma_B \text{ – для сталей,} \quad (7.1)$$

$$\sigma_{-1} = (0,25 \dots 0,4) \sigma_B \text{ – для сплавів алюмінію;} \quad (7.2)$$

$$\sigma_{-1} \approx 0,765 \sigma_B - 123 \text{ (МПа) – для будівельних сталей} \quad (7.3)$$

$$\sigma_{-1} \approx 0,432 \sigma_B + 22 \quad (7.4)$$

$$\sigma_{-1} \approx 0,249 \sigma_B + 25 \quad \left. \vphantom{\sigma_{-1}} \right\} \text{ для конструкційних сталей} \quad (7.5)$$

Інколи користуються залежністю:

$$\sigma_{-1} \approx 0,3 \sigma_B / (1 - \psi) \quad (7.6)$$

Якщо узагальнити велику кількість емпіричних залежностей

$$\sigma_{-1} = \{ \sigma_T, \sigma_B, \psi, \delta \} \quad (7.7)$$

то найчастіше зустрічається досить грубе наближення

$$\sigma_{-1} \approx 0,5 \sigma_B. \quad (7.8)$$

яке дозволяє без будь-яких циклічних випробовувань провести розрахунки та визначити розміри конструкції.

Як було показано в розділі 4, для побудови кривої втоми можна скористатись термоактиваційними уявленнями:

$$\tau_{BT} = \tau_0 \exp \frac{U_0^{BT} - \gamma^{BT} \sigma}{RT} \quad (7.9)$$

$$\text{де } \tau_{BT} = N/f,$$

$$U_0^{BT} \approx \frac{5}{3} RT \ln \frac{1}{\tau_0}$$

$N$  – кількість циклів до руйнування,

$f$  – частота циклічного навантаження,

$T$  – температура, при якій проводяться циклічні випробовування.

Для побудови двохпараметричного рівняння кривої втоми

$$\sigma = a - b \lg N \quad (7.10)$$

необхідно провести випробовування на втому хоча б на двох рівнях навантажень (дві точки кривої втоми). В той же час використання ( 7.9 ) дає можливість побудувати рівняння кривої втоми, використавши лише випробовування на одному рівні навантажень (одна точка кривої втоми).

#### 7.4. Вплив концентрації напруг та виду навантаження.

За результатами циклічних випробовувань великої кількості зразків будують криву втоми. Найчастіше в сучасній літературі (більше 90%) використовуються напівлогарифмічні координати “ $\sigma - \lg N$ ” (рис. 7.6, 7.7).

Це підтверджує термоактиваційну природу циклічного руйнування, т.я. рівняння Журкова описує пряму лінію в координатах “ $\sigma - \lg t$ ”.

В деяких випадках, коли кілька механізмів одночасно впливають на процес втоми (наприклад, втома з повзучістю, втома з корозією), використовують і інші координати: “ $\lg \sigma - \lg t$ ”; “ $\lg \sigma - \lg \lg N$ ” та інші.

Як видно із рис. 7.6-7.7, надзвичайно великий вплив на криві втоми мають концентратори напруг.

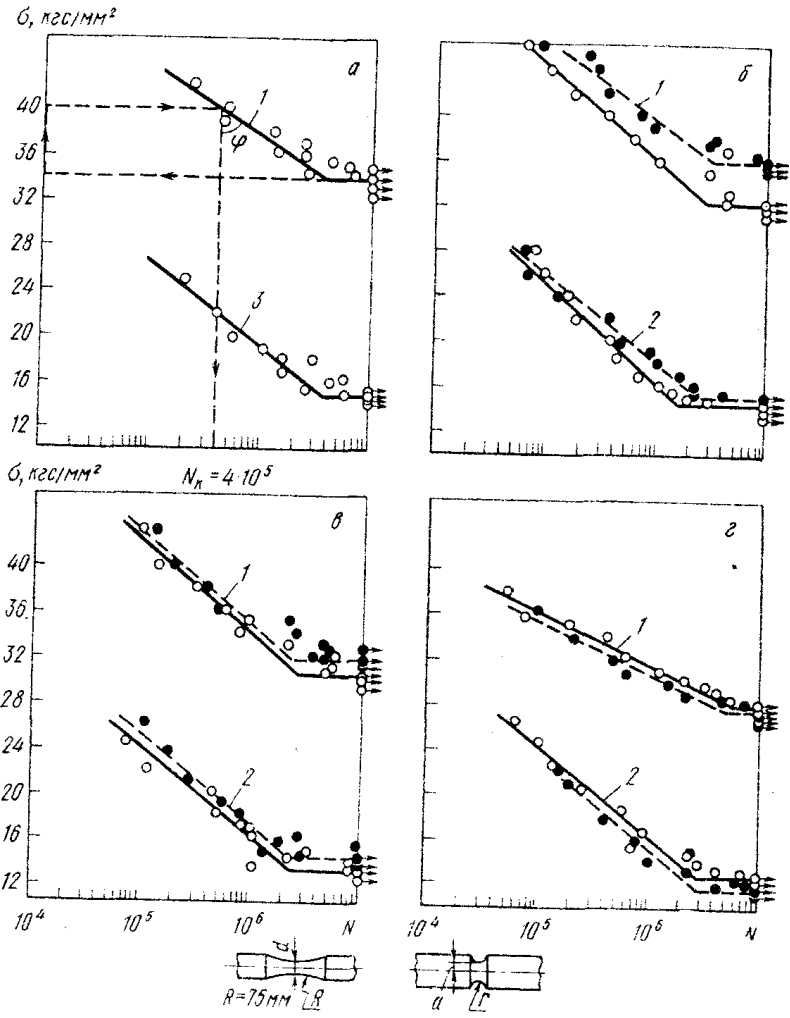


Рис.7.6. Криві багатоциклової втоми низьколегованих сталей:

а – 12ХГН, б – 15ГС, в – 14Г2, г – 19Г

- 1 – зразки гладкі;
- 2 – зразки з надрізом ( $r = 0,3 \text{ мм}$ ,  $a_{\text{надр}} = 4,3 \text{ мм}$ )
- 3 – зразки з надрізом ( $r = 0,3 \text{ мм}$ ,  $a_{\text{надр}} = 3,75 \text{ мм}$ )



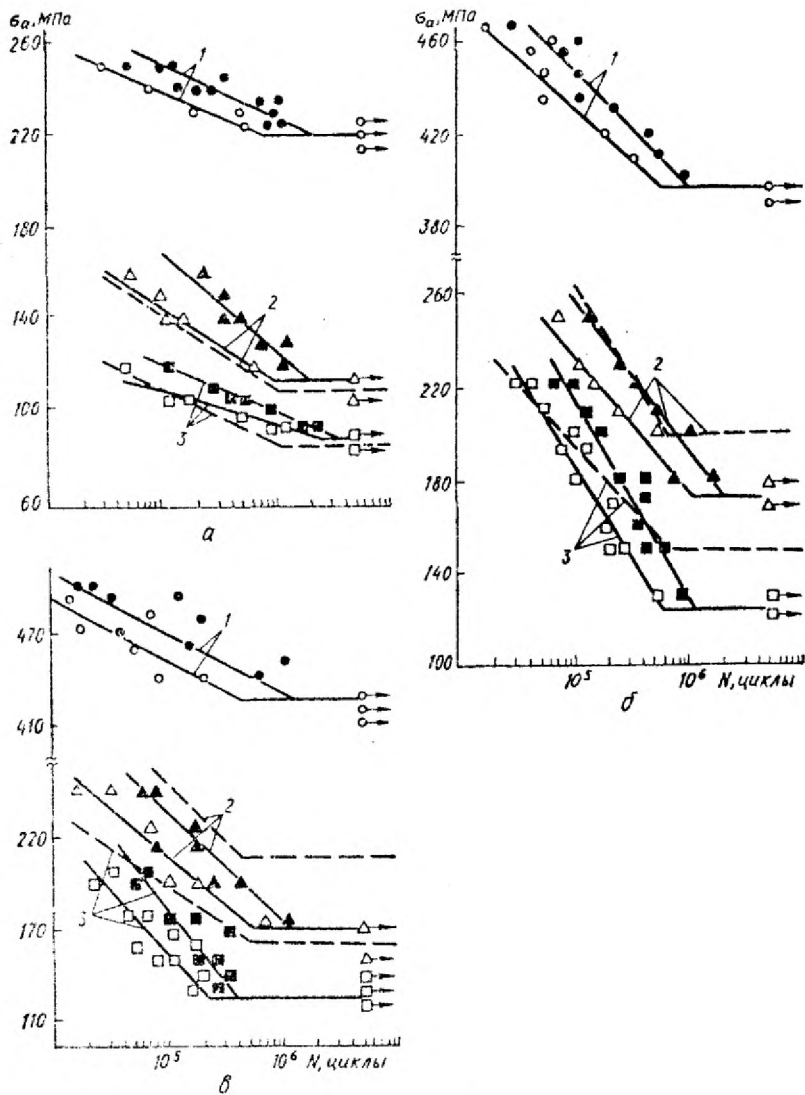


Рис. 7.7. Криві втоми сталей:

а – 45, б – 12ХНЗЛ, в – 40Х

1 – зразки гладкі (Р – С);

2 – зразки з концентратором (Р – С)

3 – зразки з концентратором (кручення)

На *рис.7.8* наведені залежності ефективного коефіцієнта концентрації напруг. Для випробовувань використовувались трубчасті зразки зовнішнім діаметром в робочій зоні  $\varnothing 14$ , та внутрішнім -  $\varnothing 12$ , що дозволило отримати при випробовуваннях на циклічне кручення практично однорідний напружений стан. Концентратор – отвір  $\varnothing 1,3$  – наносився в робочій зоні зразка і відповідав теоретичному коефіцієнту концентрації напруг  $\alpha_\sigma=3$  для Р-С та  $\alpha_\sigma=4$  для кручення.

Ефективний коефіцієнт концентрації напруг розраховується за формулою

$$K_\sigma = \sigma_a / \sigma_{\sigma a},$$

де  $\sigma_a$  – напруга при Р-С гладких зразків,  $\sigma_{\sigma a}$  – напруга при Р-С чи К зразків з концентраторами напруг при однакових числах циклів до зародження тріщини 0,1 мм.

Криві втомі *рис.7.6-7.7* показують, що діапазон довговічностей  $N \in [5 \cdot 10^4 \dots 10^7]$ . Це так звана багатоциклова втома, для якої характерне руйнування без помітних пластичних деформацій.

На *рис.7.9-7.10* наведені криві втомі в області малоциклової втоми в координатах “ $\varepsilon - \lg N$ ” та “ $\sigma - \lg N$ ”, звідки видно, що до  $10^4 \dots 5 \cdot 10^4$  циклів циклічне руйнування супроводжується значними пластичними деформаціями (до 30...40%), які і є основною характерною ознакою малоциклової втоми.

Як слідує із таблиці 7.1, рівень циклічних навантажень для малоциклової втоми сягає значної величини, порядку  $\sigma_{0,2}$ , тоді як для багатоциклової втоми величина рівня напруг значно менше.

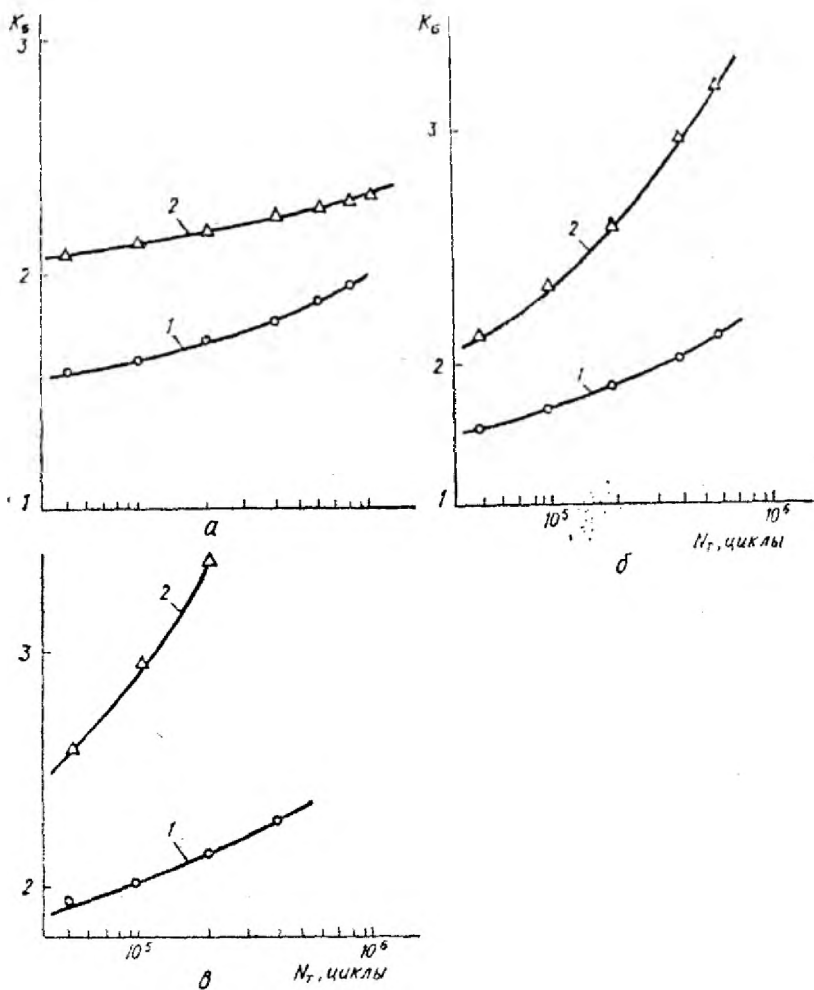


Рис. 7.8. Залежності  $K_\delta(N)$  для сталей  
 а – 45, б – 12ХНЗЛ, в – 40Х  
 1 – розтяг – стиск (Р – С);  
 2 – кручення

**Таблиця 7.1.** Механічні властивості та характеристики малоциклової втоми деяких сталей та сплавів

Матеріал	$\sigma_{в}$ , МПа	$\sigma_{0,2}$ , МПа	$\delta$ , %	$\psi$ , %	$\sigma_{мцв}$ , МПа	$N \cdot 10^{-4}$ , цикли
15Г2АФДпс	520	429	28,5	62,5	420	6,5
15Х2НМФА	758	666	27,1	65,3	720	3,0
Сталь Ст3	425	258	26,7	48,5	290	10,0
Сталь 20	478	315	28,7	50,0	340	8,0
Д20-1	430	315	11,5	23,6	420	0,35
АМГ6	335	148	26,6	31,7	330	0,30
ВТ6С	1075	965	11,6	13,3	990	0,35
АТ2-2	840	795	13,3	53,5	750	0,25
ВТ5	820	775	13,1	34,4	700	0,95
ВТ9	1160	1110	19,5	38,0	111 0	0,35
Сплав (1)	365	230	18,2	44,0	295	3,50
БрХО8	231	148	34,0	81,0	165	10,00

Характеристики втоми, як ніякі інші характеристики механічних випробовувань, мають ймовірнісну природу, Взагалі можна сформулювати такий постулат:

чим нижче рівень навантаження, тим ширше діапазон розсіювання характеристик втоми.

Ймовірнісна природа руйнування – фундаментальне фізичне явище, яке повністю узгоджується з термоактиваційними уявленнями (див. розділ 4). Це підтверджують численні експериментальні дані. В таблиці 7.2 показано, що при одному і тому ж рівні навантажень довговічність може відрізнятись на порядок і більше, що й вимагає застосовувати ймовірнісні методи теорії надійності (рис. 7.11-7.14).

**Таблиця 7.2. Значення довговічності зразків сплава АВ при різних рівнях  $\sigma$  циклічного навантаження.**

№ п/п	N-10 <sup>7</sup>				N-10 <sup>6</sup>	N-10 <sup>5</sup>
	При $\sigma$ , МПа					
	110	115	120	125	135	165
1	3,02	2,05	1,26	0,594	3,38	5,83
2	4,49	2,57	1,33	1,00	3,75	11,0
3	4,77	3,81	2,12	1,12	4,23	12,0
4	4,90	4,53	2,74	1,54	6,75	12,9
5			3,01	1,73	8,01	18,1
6			3,69	2,30	8,17	21,8
7				2,31	9,26	22,3
8				6,67	10,3	26,5
9					12,4	16,5
10		5,00*	5,00*		14,6	33,6
11				5,00*	16,5	38,4
12	5,00*				18,2	62,4
13					23,9	75,9
14					24,0	
15					32,1	
16					45,9	
17					47,7	
18					50,0*	

\* - зразок не зруйнувався.

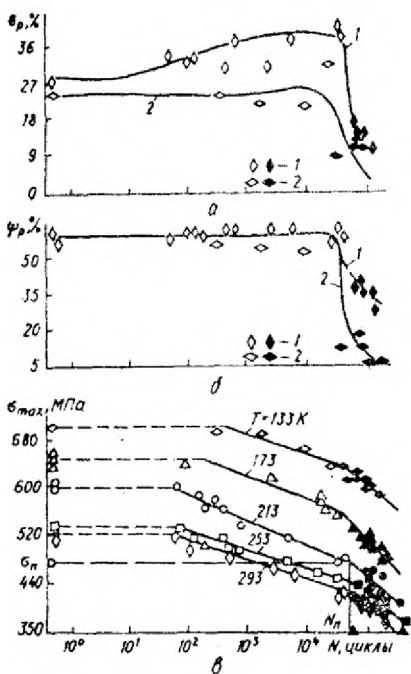


Рис.7.9. Залежності  $\epsilon_p(N)$ ,  $\psi_p(N)$  для сталі 12Г2АФДпс  
 1 :  $T=393$  К  
 2 :  $T=133$  К

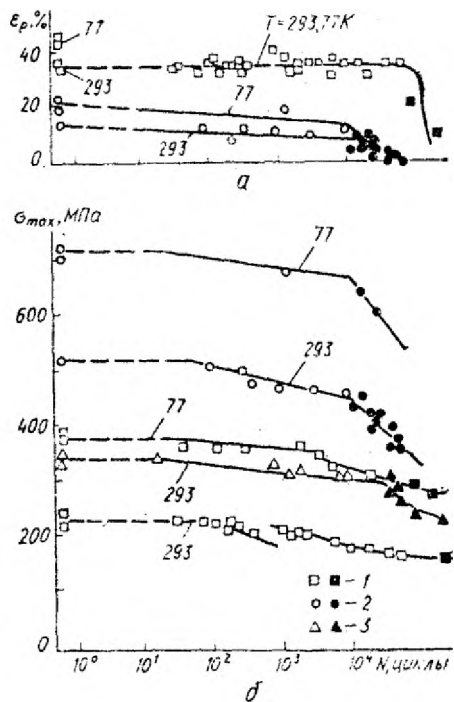


Рис.7.10. Залежності  $\epsilon_p(N)$  та  $\sigma_{max}(N)$ :  
 1 : сталь BrXO8  
 2 : сплав міді

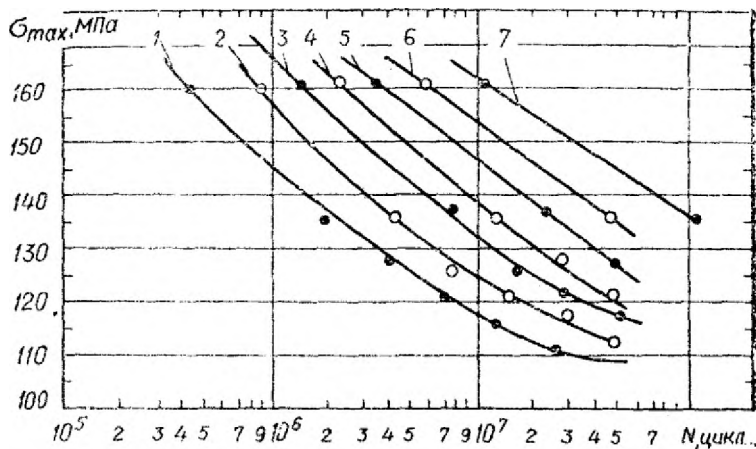


Рис 7.11. Криві втоми зразків сплава АВ:

1 -  $P=1\%$ ; 2 -  $P=10\%$ ; 3 -  $P=30\%$ ; 4 -  $P=50\%$ ;  
 5 -  $P=70\%$ ; 6 -  $P=90\%$ ; 7 -  $P=99\%$ .

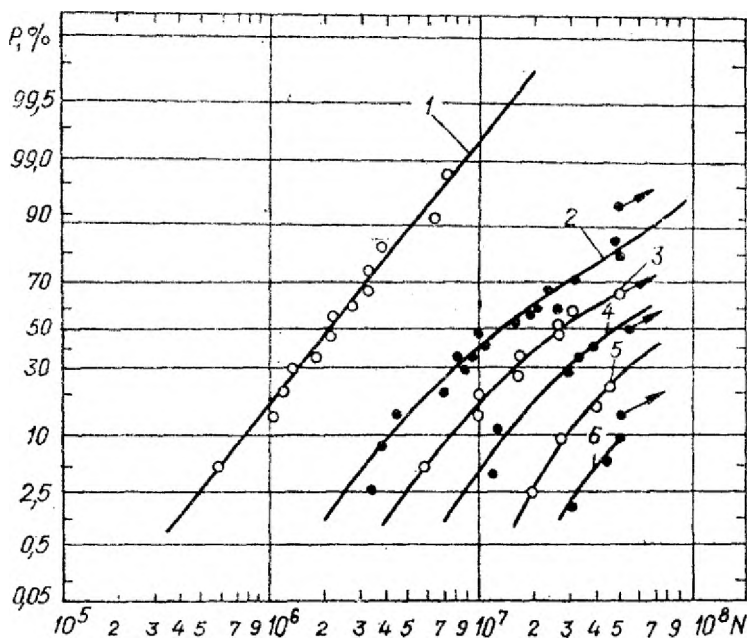


Рис 7.12. Криві розподілу довговічності зразків сплава АВ:

1 -  $\sigma=165$  МПа; 2 -  $\sigma=135$  МПа; 3 -  $\sigma=125$  МПа;  
 4 -  $\sigma=120$  МПа; 5 -  $\sigma=115$  МПа; 6 -  $\sigma=110$  МПа.

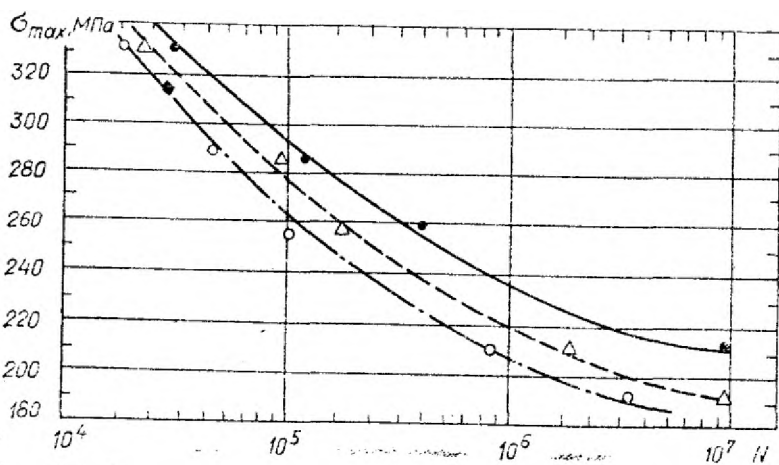


Рис.7.13. Криві втоми зразків із сплаву В95 з заданою ймовірністю руйнування:

○ - P = 1%;    Δ - P = 10%;    ● - P = 50%;

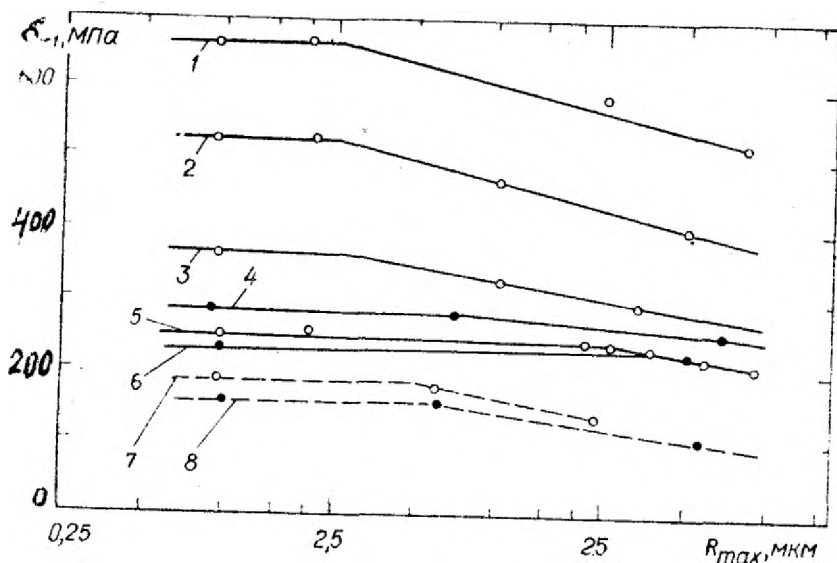


Рис.7.15. Вплив на границю втоми мікрогеометрії поверхні зразків: 1 – пружинна сталь; 2 – хромолібденова сталь; 3 – сталь 45; 4 – хромолібденова сталь відпалена; 5 – сталь 45 відпалена; 6 – нержавіюча сталь; 7 – сплав Al – Cr; 8 – сплав Al – Mg.



Як показує *рис.7.15*, на характеристики втоми суттєво впливає стан поверхні зразків – при збільшенні шорсткості зменшується границя втоми.

В таблиці 7.3 показано, що на границю втоми суттєво впливає поверхнєве пластичне деформування.

**Таблиця 7.3. Підвищення надійності зубчастих коліс поверхнєвим пластичним деформуванням.**

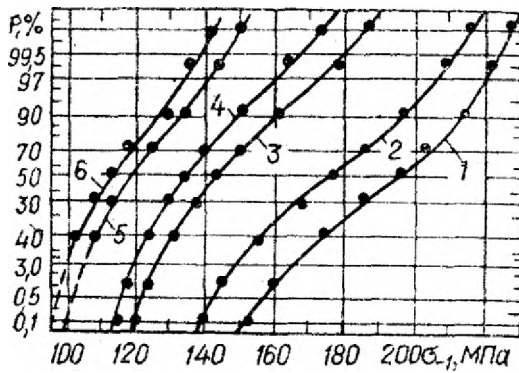
Марка сталі	$\sigma_t$ , МПа	Товщина зразка, мм	Границя втоми (Мпа) на базі $5 \cdot 10^6$ циклів при зусиллі обкатки Р, кН					
			0	1	2	3	4	5
65г	500	10	155	205	220	210	185	170
МСТЗ	293	10	115	130	120	-	-	-
		15	110	120	130	115	-	-
Сталь 45	484	10	140	175	190	-	155	-
		15	135	170	180	195	165	-
		25	120	150	165	-	175	-

Поверхнєве пластичне деформування здійснювалось пластичним деформуванням в зоні концентрації напруг, що, як слідує з таблиці, дає приріст на базі  $5 \cdot 10^6$  циклів в межах 13...44% (А.С. СРСР № 721207).

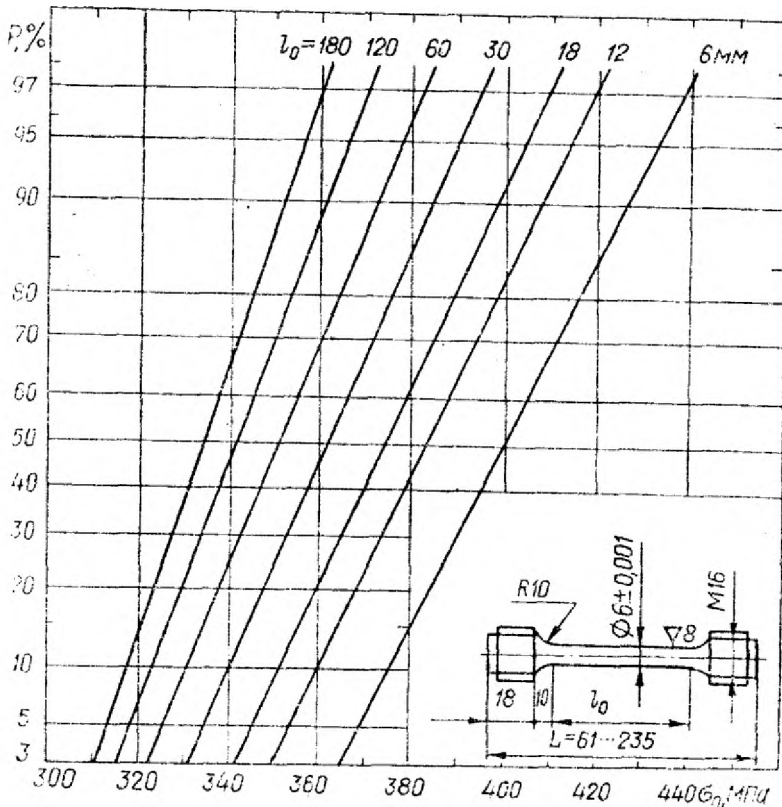
## 7.5. Шляхи підвищення надійності машин при циклічних навантаженнях.

Наведені експериментальні дані показують, що для підвищення надійності деталей та конструктивних елементів необхідно:

- по можливості не вводити концентраторів напруг;
- покращувати чистоту поверхні деталей;
- формувати оптимальну мікроструктуру матеріалів деталей;
- застосовувати оптимальну термообробку;
- застосовувати оптимальну технологію механічної обробки.



а)



б)

Рис. 7.14. Емпіричні функції розподілів границь обмеженої витривалості:

а) сплав АВ (1 -  $N_B=5 \cdot 10^5$ ; 2 -  $N_B=10^6$ ; 3 -  $N_B=5 \cdot 10^6$ ; 4 -  $N_B=10^7$ ;

5 -  $N_B=5 \cdot 10^7$ ; 6 -  $N_B=10^8$  циклів)

б) сталь 3X13, вплив довжини зразка.

## 8. Надійність машин за наявності тріщин.

### 8.1. Вступ до кінетики тріщин.

Подальше підвищення надійності машин дуже тісно пов'язано з проблемою тріщиностійкості елементів конструкцій. Ще 20...25 років тому поява тріщини в експлуатації вважалась надзвичайною подією з відповідною реалізацією організаційних (а інколи і репресивних) заходів.

Однак подальша інтенсифікація режимів роботи машин, збільшення питомих навантажень, з однієї сторони, та глибоке вивчення механіки і фізики руйнування, поява нових методів дефектоскопії тріщин та прогнозування життєздатності конструкцій з тріщинами з другої сторони створили передумови на перехід на більш прогресивну стратегію експлуатації машин, що допускає виникнення тріщин в елементах конструкцій – це експлуатація за станом конструкції. Основа цієї стратегії визначається постулатом:

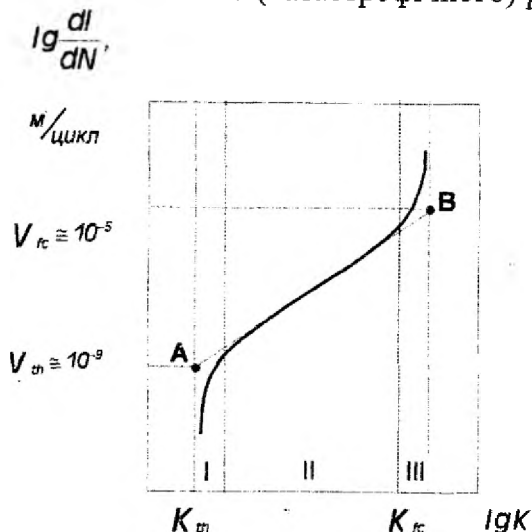
Пошкодження (тріщини) повинні бути виявлені раніше, ніж вони призведуть до непоправних наслідків.

Якраз це вимагає інтенсивного розвитку як експериментальних, так і теоретичних робіт в сфері механіки та фізики руйнування взагалі і механіки та фізики тріщин, як складової частини.

Взагалі швидкість росту тріщин займає діапазон як мінімум в 10...12 порядків, від  $\sim 100 \text{ A}^\circ/\text{C}$  до  $\sim 1000 \text{ м}^\circ/\text{C}$ .

Нами було виявлено, що характерні швидкості тріщин тісно корелюють з фундаментальними фізичними константами. Так, кінетичні діаграми росту тріщин втомі в координатах  $\text{“lg} \frac{dl}{dN} \text{ - lg} K \text{”}$  мають три характерні зони

(рис.8.1): I - спорадичного, або тунельного росту, коли тріщина за один цикл підростає не по всьому фронту; II - стадія Періса (лінійна ділянка) стабільного росту тріщини; III - зона нестабільного (катастрофічного) росту.



**Рис. 8.1.**

Нами було виявлено, що принаймні для ОЦК та ГЦК металів та їх сплавів:

$$q_A \cong S\tau_0 \cong (\pi \dots 2\pi)\alpha_0 = (8 \dots 17)A^0 \cong 10^{-9} \text{ м};$$

$$q_B \cong C\tau_0 \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

де  $S$  – швидкість пружних хвиль в даному матеріалі;

$C$  – швидкість колективних електронів в даному металі;

$\tau_0$  – період теплових коливань вузлів кристалічної ґратки;

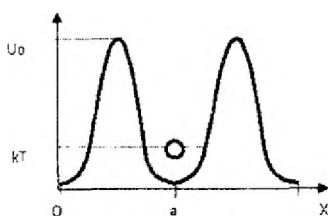
$q_A$ ,  $q_B$  – підростання тріщини за один цикл навантаження.

Дані оцінки  $q_A$  та  $q_B$  добре співпадають зі значеннями  $V_{th}$  та  $V_{fc}$  (рис.8.1) – швидкостями росту

тріщин втоми, що відповідають пороговим значенням характеристик тріщиностійкості.  $V_{th}$  та  $V_{fc}$  можна отримати, як точки перетину продовження лінійної частини графіка тріщиностійкості з вертикалями в точках  $K_{th}$  та  $K_{fc}$ . В подальшому виявлення фундаментальної природи  $K_{th}$  та  $K_{fc}$  (яка, безумовно, має місце), дозволить будувати теоретичними методами кінетичні діаграми росту тріщин втоми та прогнозувати тріщиностійкість взагалі без проведення експерименту. Крижкі тріщини мають швидкість  $\sim 10^3 \frac{m}{c}$ . Нами показано, що без примусового нагнітання енергії в вершину крижкої тріщини її швидкість підлягає залежності:

$$V_{TP} \cong S \exp\left(-\frac{U_0 - \gamma\sigma_{eff}}{KT}\right)$$

де  $S$  – швидкість пружних хвиль в даному матеріалі;  
 $\sigma_{eff}(\sigma_B, \sigma_{0,2}, T, K_{Ic}, \dots)$  – ефективні напруги в вершині тріщини. Граничного значення швидкість тріщини набуває, коли  $(U_0 - \gamma\sigma_{eff}) \Rightarrow KT$ .



**Рис. 8.2.**

Щоб осцилятор (рис.8.2) знаходився в потенційній ямі хоча б деякий час (умова неруйнування), необхідно, щоб  $(U_0 - \gamma\sigma_{eff}) > KT$ .

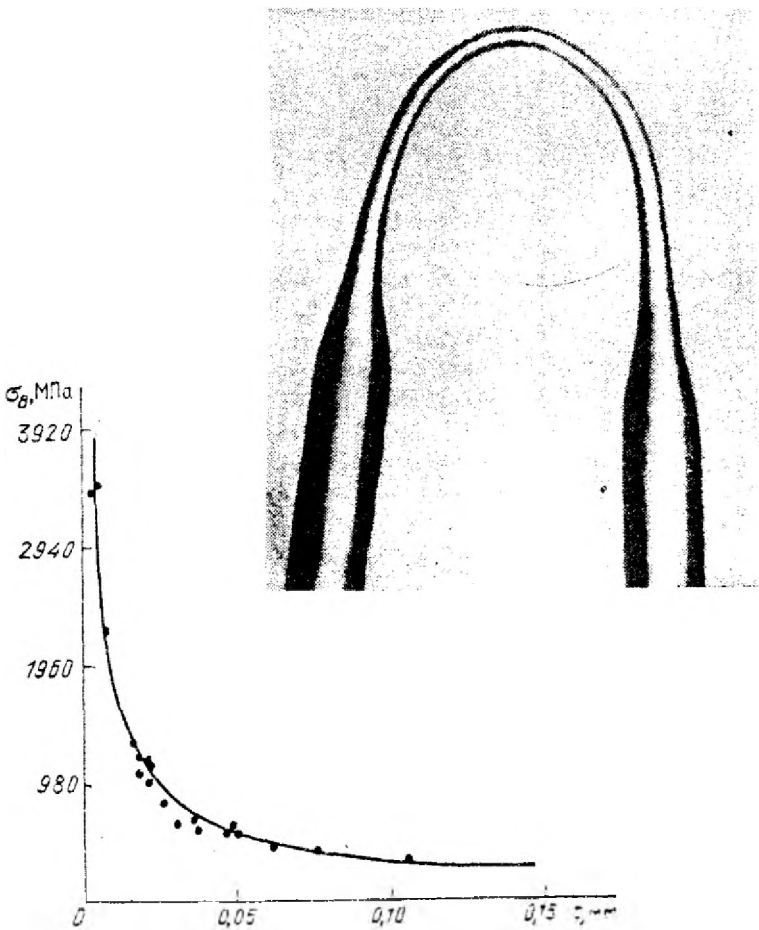
При  $(U_0 - \gamma \sigma_{\text{eff}}) \Rightarrow KT$  маємо асимптотичне (максимально можливе) значення швидкості крихкої тріщини:

$$V_{TR}^{\max} \cong C \cdot e^{-1} = 0,368S,$$

що блискуче співпадає з експериментальними даними В.М.Фінкеля, де було показано, що без накачки енергії в вершину крихкої тріщини  $V_{\max} \leq 0,38S$ .

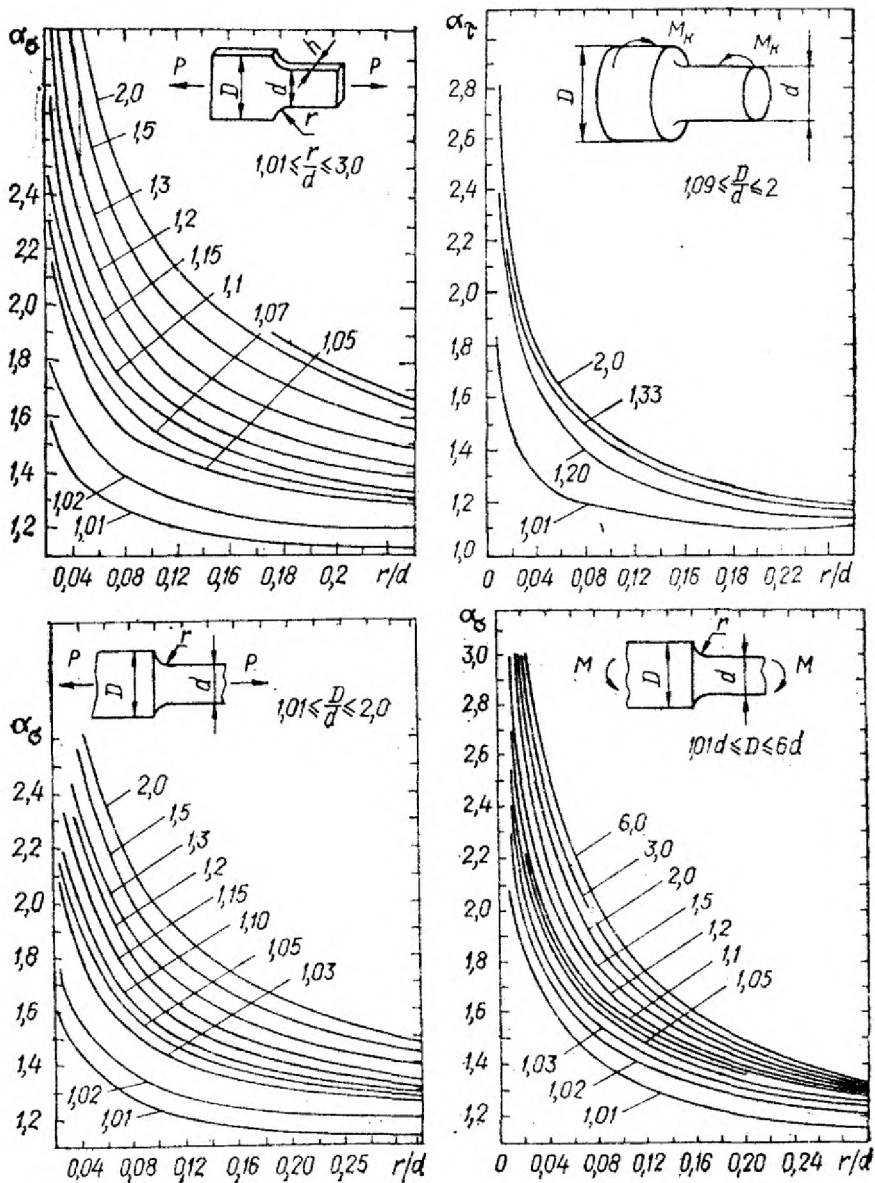
І хоча проблема тріщин існує в механіці та фізиці твердого тіла досить давно, серйозні наукові дослідження цієї проблеми розпочалися лише на початку ХХ століття.

В дослідях А.Гриффітса та А.Ф.Іоффе (1920...1930 роки) було виявлено надзвичайно велику роль розмірів та стану поверхні на характеристики міцності (рис.8.3 – 8.4). Приблизно в той же час були побудовані теоретичні розв'язки задач теорії пружності для тіл з концентраторами напружень – галтелі, перепади діаметрів, виточки, отвори (рис.8.5 – 8.6). З однієї сторони, дані результати показали надзвичайно велику роль концентраторів, як зон зародження тріщин, а з іншої – створили передумови для глибокого вивчення пружно-деформованого стану в вершині тріщини і становленні нової науки – механіки руйнування.



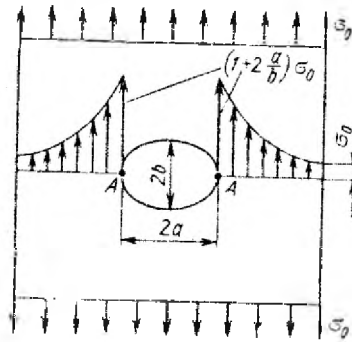
**Рис.8.3.** Ниткоподібний кварцовий зразок,  
 $\sigma_{зриву} \cong 4900 \text{ МПа}$ .

**Рис. 8.4.** Гіперболічна залежність границі міцності  $\sigma_b$  скляних волокон від їх товщини  $t$ , виявлена в дослідях Гриффітса.

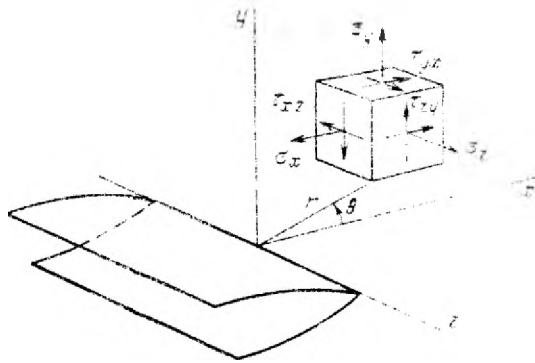


**Рис. 8.5.** Теоретичні коефіцієнти концентрації напруг при розтягу, згині та крученні плоских та циліндричних зразків з галтельними переходами.





**Рис. 8.6.** Теоретичний розв'язок Колосова-Інґліса: в вершині  $\alpha_\sigma = 1 + 2\frac{a}{b}$ .



**Рис. 8.7.** Схематичне зображення напруженого стану в вершині тріщини.

## 8.2. Пружно-деформований стан в вершині тріщини.

Оцінка граничної несучої здатності деталі з тріщиною вимагає ретельного дослідження НДС в вершині тріщини та сформулювати критерії, що визначають критичний стан матеріалу. Ці задачі надто складні як в теоретичному, так і в експериментальному плані. Аналітичні розв'язки, як буде показано далі, крайових задач теорії пружності в вершині тріщини дають нескінченно великі значення напруг, тобто міцність матеріалів з тріщинами повинна наближатись до нуля, що протирічить експерименту.

Найбільш ефективним розв'язком крайових задач теорії пружності для лінійно-пружних тіл з тріщинами є використання комплексних функцій напруг, розвинених в роботах Мухелішвілі та Вестергарда. Для плоскої пластини з центральною тріщиною (рис. 8.7 – 8.8) це дає:

$$\sigma_y(x; y=0) = \frac{\sigma_\infty x}{\sqrt{x^2 - a^2}};$$

$$\sigma_x(x; y=0) = \frac{\sigma_\infty x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \sigma_\infty;$$

В загальному вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} f_{1ij}(\theta) + C_1 \left(\frac{r}{a}\right)^0 f_{2ij}(\theta) + C_2 \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{2}} f_{3ij}(\theta) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{n-1}{2}} f_{nij}(\theta). \end{aligned}$$

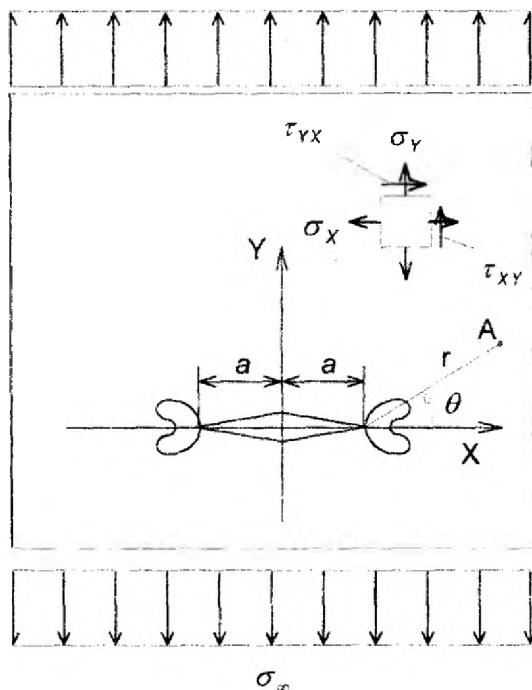


Рис. 8.8.

В околі вершини тріщини всі члени, крім першого, є нескінченно малими більш високого порядку малості, і ними можна знехтувати.

Тоді  $\sigma_y \cong \frac{C_0}{r} f_{0y}(\theta)$ , де  $C_0 = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $K$  –

коефіцієнт інтенсивності напруг – параметр, що визначає напружно-деформований стан в вершині тріщини.

• *Значення  $K$ , при якому настає крихке руйнування тіла з тріщиною (в умовах плоскої деформації, тобто товстого зразка), називається критичним коефіцієнтом інтенсивності напруг і позначається  $K_{IC}$ .*

Числові значення  $K_{IC}$  визначаються при випробуваннях зразків і дозволяють визначити граничну несучу здатність тіл з тріщинами якої завгодно конфігурації при їх пружному деформуванні в умовах максимального обмеження пластичної деформації (плоска деформація – ПД).

В механіці руйнування розглядається три схеми деформування тіл з тріщинами (рис. 8.9)

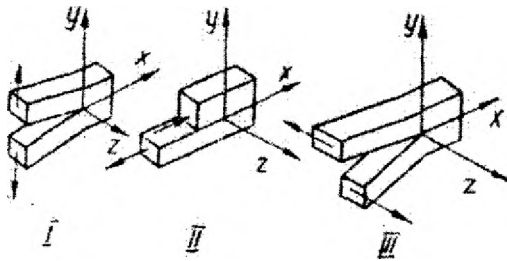


Рис. 8.9. Схеми деформування тіла з тріщиною

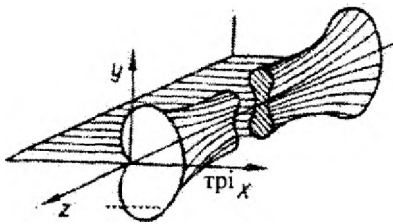


Рис. 8.10. Розподіл пластичних деформацій в вершині тріщини.

Коефіцієнти інтенсивності напруг для кожного з даних випадків позначаються відповідно  $K_I$ ,  $K_{II}$  та  $K_{III}$ .

В подальшому найчастіше будемо розглядати схему I, для якої компоненти тензора напруг та деформацій мають вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2},\end{aligned}\tag{8.1}$$

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$



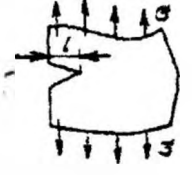
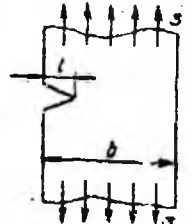
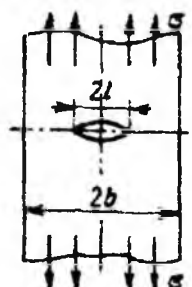
$$U = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( K - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right),$$

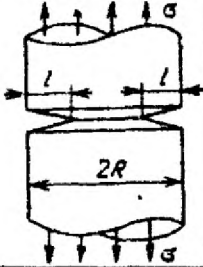
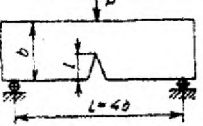
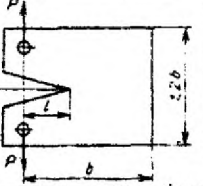
$$V = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( K + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right),$$

де:  $K = 3 - 4\mu$ ;  $\mu$  - коефіцієнт Пуасона;  $r, \theta$  - координати точки A, (див. *рис. 8.8*).

Значення коефіцієнтів інтенсивності напруг для найважливіших практичних випадків наведені в таблиці 8.1.

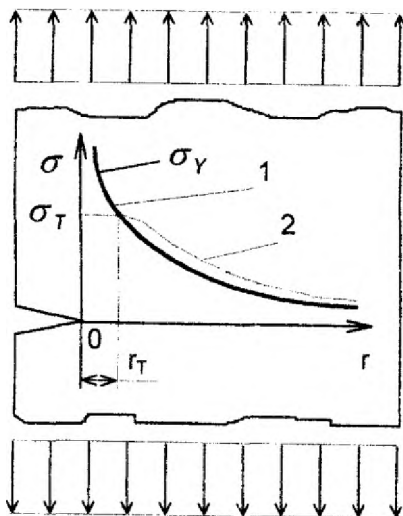
Таблиця 8.1. Коefіцієнти інтенсивності напруг.

№ схеми	Форма зразка і схема навантаження	Умови навантаження	Формула для коefіцієнта інтенсивності напруг
		Необмежена площина з тріщиною, розтяг перпендикулярно тріщині	$K = \sigma \sqrt{\pi l}$
		Необмежена площина з тріщиною, розтяг зосередженими силами	$K = \frac{P}{\sqrt{\pi l}}$
		Напівплощина із крайовою поперечною тріщиною, розтяг перпендикулярно тріщині	$K = 1,12 \sigma \sqrt{\pi l} = 1,99 \sigma \sqrt{l}$
		Смуга з крайовою поперечною тріщиною, осьовий розтяг	$K = \sigma \sqrt{l Y(\lambda)}$ $\lambda = \frac{l}{b} (\lambda < 0,7)$ $Y(\lambda) = 1,99 - 0,41\lambda + 1,70\lambda^2 - 28,48\lambda^3 + 53,85\lambda^4$
		Смуга з крайовою поперечною тріщиною, осьовий розтяг	$K = \sigma \sqrt{\pi l Y(\lambda)}$ $\lambda = \frac{l}{b} (\lambda < 0,7)$ $Y(\lambda) = 1 + 0,128\lambda - 0,288\lambda^2 + 1,525\lambda^3$

№ схе-ми	Форма зразка і схема навантаження	Умови навантаження	Формула для коефіцієнта інтенсивності напруг												
		Циліндр із зовнішньою кільцевою тріщиною, осьовий розтяг	$K = \sigma \sqrt{l} Y(\lambda)$ $\lambda = l / R$ <table border="1" data-bbox="672 271 918 472"> <tr> <td><math>\lambda</math></td> <td><math>Y</math></td> </tr> <tr> <td>0,03</td> <td>1,88</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>1,82</td> </tr> <tr> <td>0,1</td> <td>1,66</td> </tr> <tr> <td>0,2</td> <td>1,41</td> </tr> <tr> <td>0,4</td> <td>1,01</td> </tr> </table>	$\lambda$	$Y$	0,03	1,88	0,05	1,82	0,1	1,66	0,2	1,41	0,4	1,01
$\lambda$	$Y$														
0,03	1,88														
0,05	1,82														
0,1	1,66														
0,2	1,41														
0,4	1,01														
		Балка з крайовою поперечною тріщиною, згин зосередженою силою	$K = \frac{6P\sqrt{l}}{tb} Y(\lambda)$ $\lambda = \frac{l}{b} (\lambda < 0,6)$ $Y(\lambda) = 1.93 - 3.07\lambda + 14.53\lambda^2 - 25.1\lambda^3 + 25.8\lambda^4$												
		“компактний” зразок, розтяг зосередженими силами	$K = \frac{P\sqrt{l}}{tb} Y(\lambda)$ $Y(\lambda) = 29.6 - 185\lambda + 655\lambda^2 - 1017\lambda^3 + 639\lambda^4$												

Як слідує із (8.1), при  $r \rightarrow 0$ ;  $\sigma_x, \sigma_y \rightarrow \infty$ .

Однак, як видно з рис. 8.10 – 8.11, в вершині тріщини досягається значення напруги пластичного деформування  $\sigma_T$ , що призводить до створення пластичної зони, тобто на деяку глибину  $r_T$  від вершини тріщини  $\sigma_y$  залишається постійним і рівним  $\sigma_T$ .



**Рис. 8.11.** Теоретична (1) та істинна (2) епюра напруг  $\sigma_y$  в вершині тріщини при  $\theta = 0$  (вздовж осі  $r$ , що співпадає з траєкторією тріщини).

Значення і конфігурацію пластичної зони в вершині тріщини можна оцінити із співвідношень:

Для плоского напруженого стану:

$$r_T(\theta) = \left( \frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2 \frac{1}{4\pi} \left( 1 + \cos \theta + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right),$$

$$r_T^{\max} = r_T(70,5^\circ) = 0,21 \left( \frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2,$$

$$r_T(0^\circ) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2.$$

Для плоскої деформації:

$$r_T(A) = \left( \frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2 \frac{1}{4\pi} \left[ (1 - 2\mu)^2 \left( 1 + \cos A + \frac{3}{2} \sin^2 A \right) \right],$$



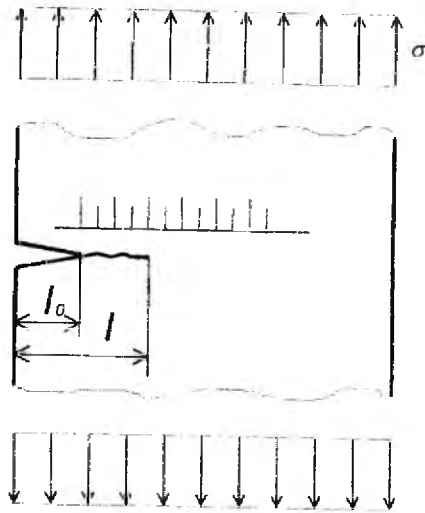
$$r_T^{\max} = r_T(87,9^\circ) = 0,13 \left( \frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2,$$

$$r_T(0^\circ) = \frac{(1-2\mu)^2}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2.$$

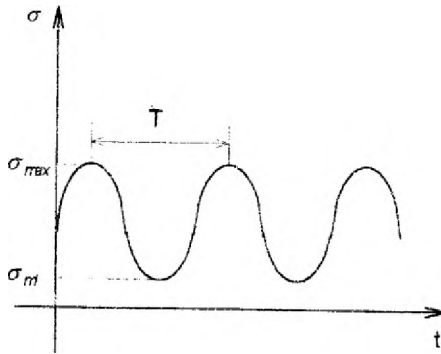
8.3. Експериментальні методи дослідження та дефектоскопії тріщин в задачах надійності машин.

В багатьох випадках експериментальної механіки руйнування необхідно побудувати залежності довжини тріщини та її швидкості, а також її критичних параметрів від напруженого стану та навантаження конструкції (навантаження, тиск, оберти тощо), а також виявити тріщини в експлуатації на ранніх стадіях.

На *рис.8.12* наведена схема слідування за тріщиною (а) та графік циклічного навантаження (б). Слідування за тріщиною дає можливість побудувати її графік. Найчастіше це робиться або в координатах, що безпосередньо вимірюються  $l(N)$ - “довжина тріщини – кількість циклів”, або в координатах Періса – “ $\lg V - \lg K$ ”, де  $V$  - швидкість тріщини за один цикл (*рис. 8.13 – 8.14*).



а)



б)

**Рис. 8.12.** Схема заміру росту тріщини втомі (а) та графік зміни напруг (б).

На *рис. 8.14 – 8.15* наведено графіки росту тріщин в магнієвому сплаві М18 та алюмінієвому сплаві 2219 в координатах Періса, та показано вплив асиметрії циклу на зміщення графіків.

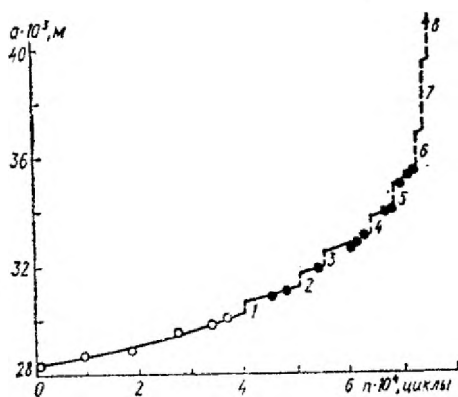


Рис. 8.13. Діаграма росту тріщини втоми в координатах "l - N".

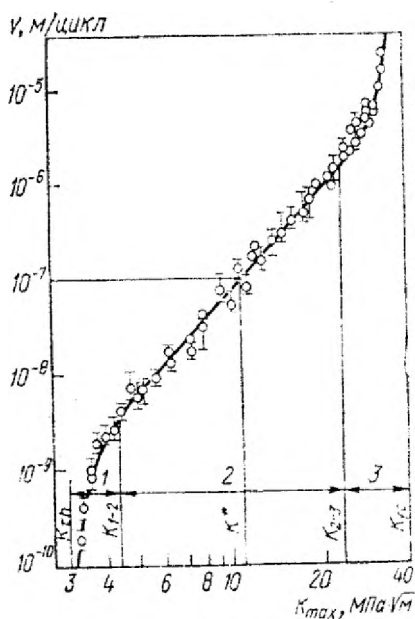
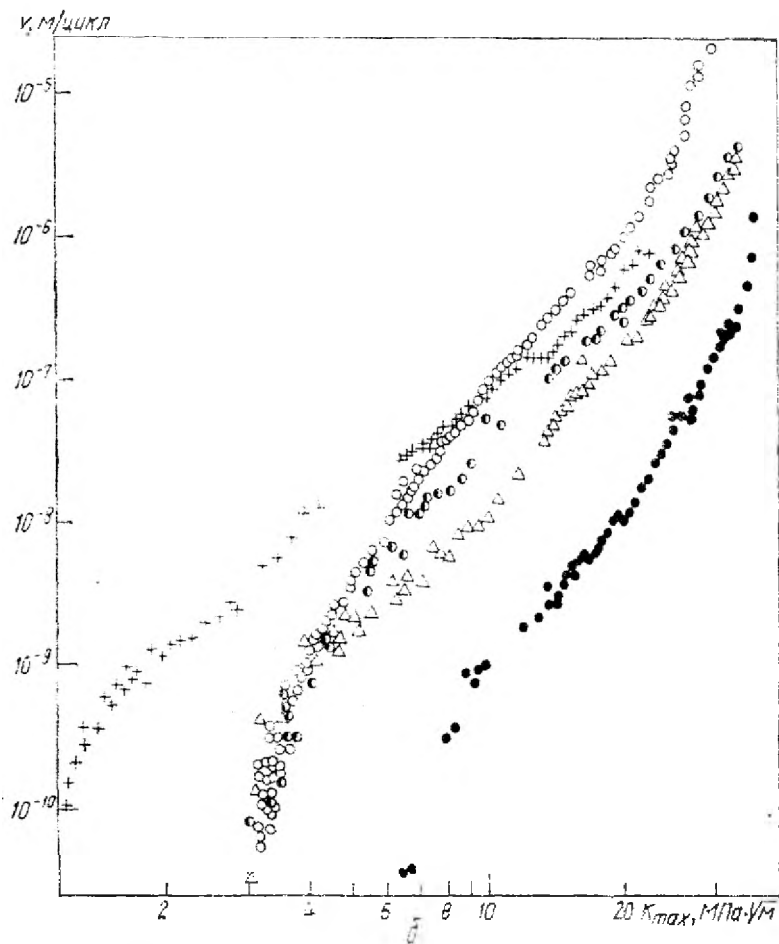
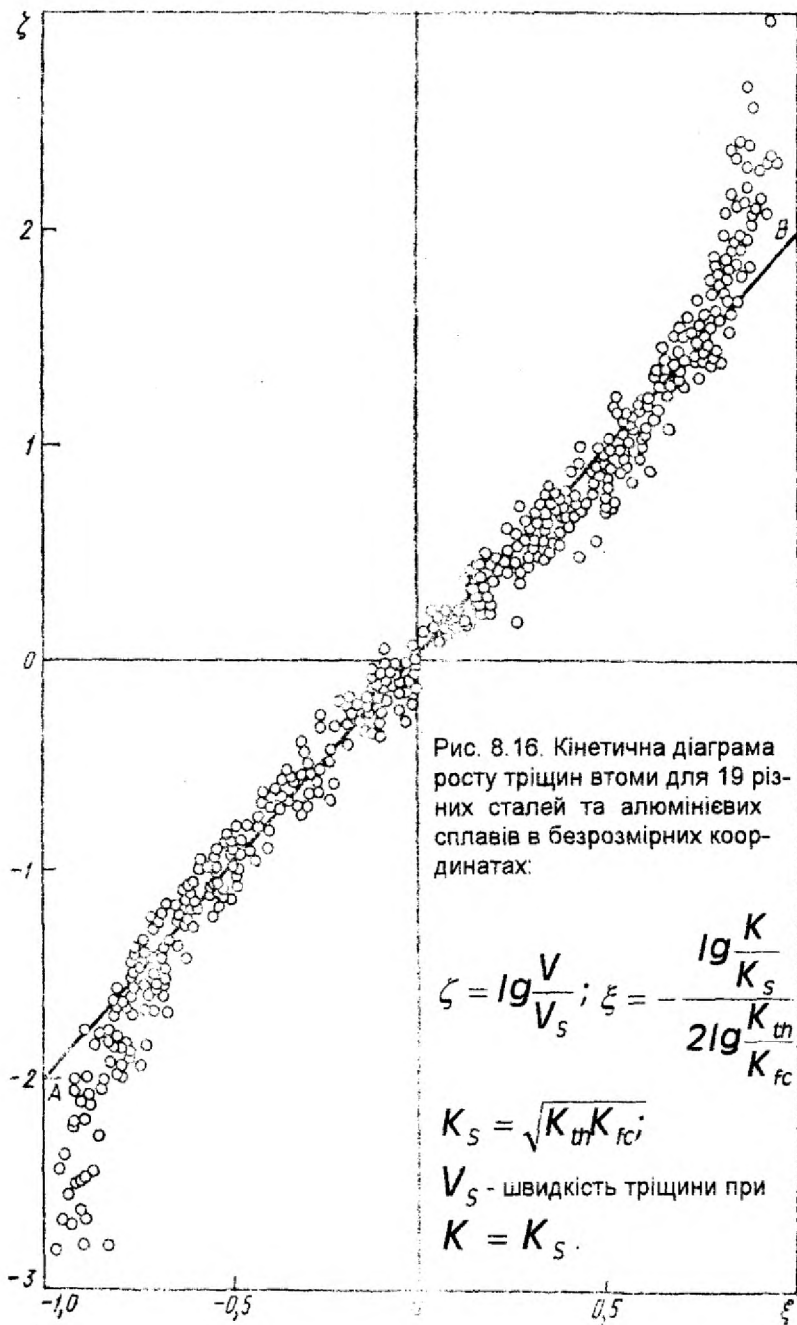


Рис. 8.14. Діаграма росту тріщини втоми в координатах Періса "lg V - lg K\_{max}" (магнієвий сплав М18).



**Рис. 8.15.** Вплив асиметрії циклу на діаграми циклічного росту тріщин для алюмінієвого сплаву 2219 (аналог сплаву Д20): + –  $R = -1$ ;  $\circ$  –  $R = 0,1$ ;  $\bullet$  –  $R = 0,8$ ;  $\odot$  –  $R = 0,3$ ;  $\Delta$  –  $R = 0,5$ .



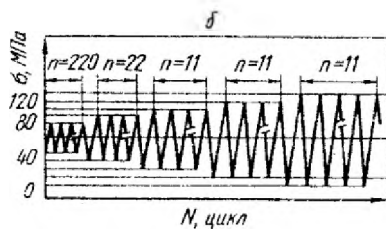
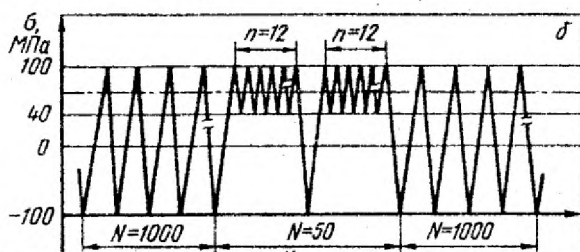
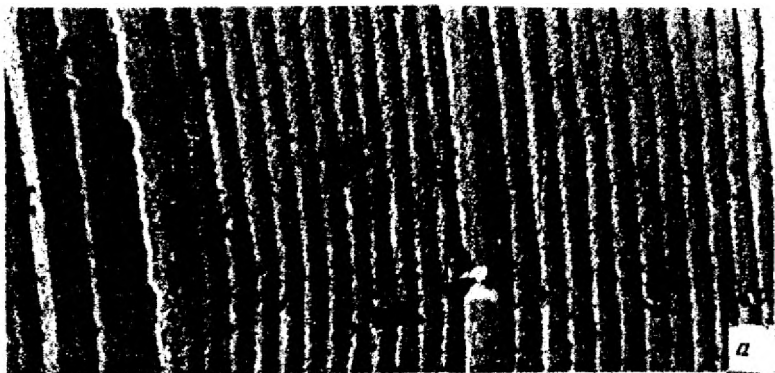
На *рис. 8.16* на прикладі дев'ятнадцяти різних сталей та алюмінієвих сплавів показано, що координати Періса є досить універсальні і перспективні для побудови теоретичної механіки руйнування. Як було показано А.А.Шанявським та В.М.Григорьевим, в координатах

Періса  $\text{"lg}V - \text{lg}\left(\sqrt{\frac{1-\mu^2}{E\sigma_T}}K\right)\text{"}$  існує єдина крива

тріщиностійкості для сплавів заліза, титану та алюмінію.

Надзвичайно велике теоретичне і практичне значення в механіці руйнування та аналізі причин руйнування конструкцій має вивчення зломів. Будова злому може дати експерту надзвичайно багату інформацію про характер та величину навантаження, а також про кінетику розвитку тріщини (*рис 8.17 – 8.18*). На *рис. 8.18* наведено схеми будови зломів при циклічному навантаженні в залежності від схеми навантаження та рівня діючих напруг. На даних схемах штрихом під  $45^\circ$  позначено зони статичного чи квазістатичного долому. Із схем *рис. 8.18* випливає, що при низьких рівнях напруг значна доля злому має втомну природу. Якраз фрактографічні дослідження цієї зони – в електронних мікроскопах при досить великих збільшеннях ( $\sim 5000\dots 20000$ ) – показують, що злом в цій зоні вкритий системою борозен (*рис. 8.17*).

Дані борозни дозволяють реконструювати кінетику тріщини при вивченні причин аварій, тобто побудувати графік залежності  $l - N$  безпосередньо за результатами вивчення злому.



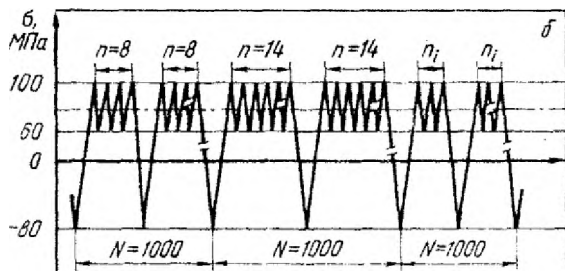
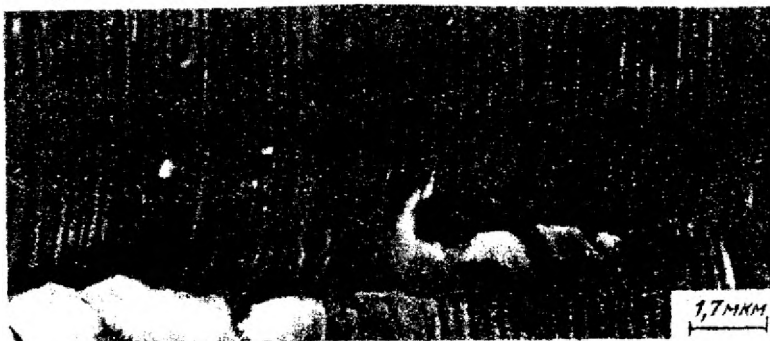
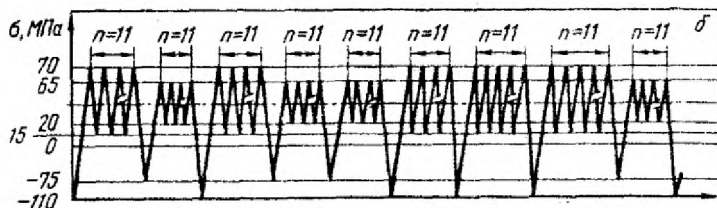


Рис. 8.17. Фрактограми зломів сплаву В95 після різних видів маркерного навантаження I-IV: а) - бороздки на зломі; б) - схеми маркерного навантаження.



Схема випробування	Характер злому в зразках					
	гладких		з концентрацією напруг			
			значною		незначною	
	при напрузі					
висо- кій	низь- кій	висо- кій	низь- кій	висо- кій	низь- кій	

Рис. 8.18. Характер будови злому при циклічному руйнуванні в залежності від схеми навантаження та рівня діючих напруг.

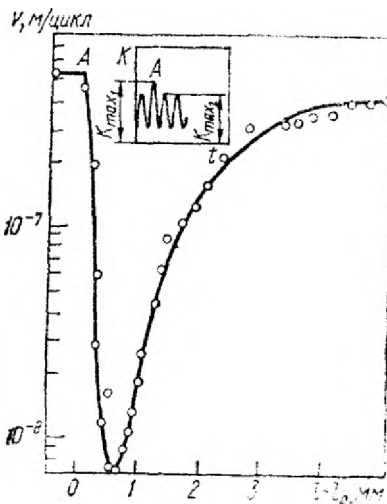


Рис.8.19. Вплив одноразового перевантаження на швидкість росту тріщини втоми для алюмінієвого сплаву 2024 (аналог сплаву Д16).

Разом з надзвичайною чутливістю швидкості росту тріщин втоми до перевантажень (рис. 8.19) це дозволило проф. Шанявському А.А. запропонувати та теоретично і експериментально підтвердити методологію реконструкції кінетики тріщин за допомогою маркерного навантаження та фрактографічних досліджень (рис. 8.17). На даних фрактограмах можна відновити кінетику росту тріщини з надзвичайно великою точністю, аж до кількох циклів, що має надзвичайно велике як теоретичне, так і практичне значення. Для забезпечення показників надійності конструкцій з тріщинами дуже важливу роль має методологія виявлення тріщин, і особливо – на ранніх стадіях.

Таблиця 8.2. Методи досліджень тріщин

Назва методу	Поле, що взаємодіє з тріщиною	Ідея методу	Мінімальні розміри тріщини, мм			Значення методу				Обмеження
			Ширина (розкриття)	Глибина	Довжина	Дефектоскопія, виявлення тріщини	Прогноз живучості	Аналіз аварій	Наукове моделювання РТВ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Оптичний, або візуальний	Видиме світло	Неозбросне око лінза мікроскоп техн. телебачення електронна фрактографія	0,01	0,0001	0,1  0,5	+	+	+	+	
Пружних хвиль	звуків та ультразвукових хвиль	Рєєстрація хвиль, що генеруються при підростанні тріщини (акустична емісія) Взаємодія тріщини з хвилями, що подаються ззовні	0,03	0,1 – 0,3	1 – 2	+	-	-	+	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Електроопору та різниці електропотенціалів	електричний струм	Рєєстрація $R(l)$ Рєєстрація різниці електропотенціалів від $l$	0,15	0,1-	02	-(+)	-	-	+	електропровідні матеріали
Магнітні	Магнітне поле	Феррографія Феррозондові датчики порошкова магнітоскопія	0,01 – 0,02	0,01 – 0,05	0,1 – 0,3	+	-	-	+	Феромагнітні матеріали
Рентгенівський	Рентгенівські $\gamma$ -промені, електронні пучки	Рентгенівська дефектоскопія $\gamma$ -дефектоскопія екзоелектронна емісія	0,1	0,1	0,02 – 0,06	+	-	+	-	
Вихрових струмів	електромагнітне поле вихрових струмів	Вихрострумова дефектоскопія Вихрострумографія Вихрострумові датчики	0,005 – 0,01	0,1	0,5	+	+	-	+	електропровідні матеріали, однорідна структура, ізотропія
Проникаючих рідин	капілярне проникнення рідини в тріщину	Газова проба Люмінесцентні фарби Кольорова дефектоскопія	0,001-0,003	0,01-0,05	0,1-0,3	+		-	+	Умови змочування
						+		+	+	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Активних покриттів	Тріщина взаємодіє з покриттям на поверхні зразка	Розривних сигнальних датчиків Фотопружних покриттів Крихких покриттів	0,1	1	1	+	+		+	
Пневматичні	Тріщина взаємодіє зі струменем газу	Газово-звукові Газово-кінетичні Газово-потенційні	0,01	0,1	0,5	+			+	
Теплового поля	Локальне підвищення температури в вершині тріщини	Томографія штучного нагрівання тріщини та температуропроводності через тріщину	0,1		0,5 – 1	+			+	
Динаміки пошкоджених конструкцій	зміна частот власних коливань тіл з тріщинами	Вібродіагностика Резонансна вібродіагностика	0,01	0,5 - 1	0,5 – 1	+			+	

В таблиці 8.2 наведена класифікація методів дослідження кінетики тріщин та їх виявлення (дефектоскопії). За основу класифікації взято вид різного поля чи речовини, що, взаємодіючи з тріщиною, дозволяє отримати корисний сигнал, що корелює з довжиною тріщини чи її швидкістю.

В теорії надійності, очевидно, найважливіша роль відводиться виявленню (дефектоскопії) тріщин, і особливо – на ранніх стадіях росту.

З цієї точки зору майже всі методи, можливо, крім №3, можуть дати хороші результати.

Найпоширеніший і найдавніше застосовується метод №1. Гарні результати в останні роки по ранній діагностиці та дефектоскопії тріщин отримані за допомогою методів №№4-8, значні перспективи обіцяє метод №11.

Найпоширенішими на даний час є в умовах масової експлуатації методи №№ 5-7, серед яких найдоступнішим, найекономічнішим та екологічно чистим є метод №7 – проникаючих рідин. Ідея методу полягає в капілярному проникненню в тріщину сигнальної рідини.

Гасова проба полягає в проникненні керосину (який має чудові властивості просочуватись в капіляри) через перешкоду (стінку), в якій є тріщина.

Люмінесцентна чи кольорова дефектоскопія полягає в тому, що на попередньо очищену від бруду і мастил поверхню, де очікується поява тріщин (найчастіше – біля концентраторів напруг), наноситься люмінесцентна чи кольорова фарба (Б), барвистих відтінків (наприклад, червона, малинова, бордова). Після цього фарба з поверхні змивається, поверхня протирається насухо чи підсушується, після цього наноситься фарба іншого

кольору (Е) – екран, що має гарний контраст з фарбою Б. Коли на поверхні є тріщини, в них залипилась кольорова фарба Б, що проникла в порожнину тріщини завдяки капілярним ефектам. Після нанесення фарби-екрану Е фарба-барвник Б просочується з тріщини та проявляється на контрастному екрані, що дозволяє виявити тріщини ~0,5...1 мм.

Разом з оптичними та вихрострумовими метод проникаючих рідин сьогодні є основним для ранньої дефектоскопії та діагностики поверхневих тріщин, не вимагає великих витрат коштів та спеціального обладнання, а також легко засвоюється персоналом без спеціальної підготовки.

Рання дефектоскопія тріщин має надзвичайно важливе значення в теорії надійності:

а) дозволяє запобігти раптовому руйнуванню (аварії) особливо відповідальних деталей та елементів конструкцій (диски та лопатки двигунів, силові елементи центроплана, площин та виконуючих механізмів літаючих апаратів; напівосей, пальців рульових тяг та гальмових елементів автомобілів; кронштейнів та редукторів шахтних підйомників; крюків, обойм та редукторів підйомних механізмів тощо);

б) дозволяє відслідкувати кінетику росту тріщини в умовах експлуатації (інколи – в умовах стендових досліджень натурних конструкцій).

Особливого значення набуває рання дефектоскопія тріщин, коли тріщина розвивається в умовах плоскої деформації. При цьому ріст тріщини йде в умовах максимального обмеження (стискування) пластичної деформації, що реалізується для товстих пластин, масивів, тривимірних суцільних конструкцій.

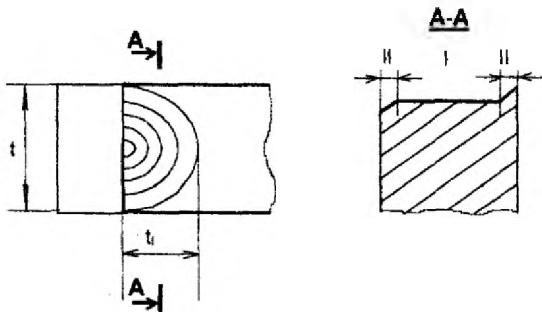


Рис. 8.20.

Умовно реалізацію плоскої деформації (ПД) можна вважати в зоні I (рис. 8.20), де площина тріщини нормальна до осі навантаження. В зонах II, де площина тріщини проходить під кутом  $45^\circ$  до осі навантаження, можна вважати реалізацію плоского напруженого стану (ПНС).

Як було відзначено в попередньому розділі, розмір пластичної зони за умов ПД та ПНС відповідно

$$r_{Т_{пд}} = \frac{(1-2\mu)^2}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2, \quad r_{Т_{пнс}} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2,$$

тобто в умовах ПНС пластична зона в 6 разів може мати більші розміри, ніж в умовах плоскої деформації. Відповідно, ймовірність раптового (крихкого) руйнування та аварії в умовах плоскої деформації значно зростає.

### Задача 8.1

*Визначити живучість конструкції з тріщиною  $l_0$ , якщо максимальні напруги в циклі  $\sigma_{\max} = 200 \text{ МПа}$ .*

Розв'язок.

Скористаємося діаграмою Періса (рис. 8.1). Через порогові точки А і В проведемо пряму, рівняння якої:



$$\frac{\lg V - \lg V_{th}}{\lg V_{fc} - \lg V_{th}} = \frac{\lg K - \lg K_{th}}{\lg K_{fc} - \lg K_{th}},$$

звідки:

$$V = \frac{dl}{dN} = V_{th} \left( \frac{K}{K_{th}} \right)^m, \quad \text{де } m = \frac{\lg \frac{V_{fc}}{V_{th}}}{\lg \frac{K_{fc}}{K_{th}}}.$$

Враховуючи, що  $K = \sigma \sqrt{\pi l}$ ,  $K_{th} = \sigma \sqrt{\pi l_{th}}$ , маємо:

$$V = V_{th} \left( \frac{l}{l_{th}} \right)^{\frac{m}{2}}.$$

Звідки визначаємо живучість:  $\Delta N = \frac{l_{th}^{m/2}}{V_{th}} \int_{l_0}^{l_{fc}} \frac{dl}{l^{m/2}}.$

Або, після інтегрування:

$$\Delta N = \frac{2}{m-2} \cdot \frac{l_{th}}{V_{th}} \left[ \left( \frac{l_{th}}{l_0} \right)^{\frac{m}{2}-1} - \left( \frac{l_{th}}{l_{fc}} \right)^{\frac{m}{2}-1} \right]$$

Так як  $\frac{l_{th}}{l_{fc}} = \left( \frac{K_{th}}{K_{fc}} \right)^2$ , а  $\frac{K_{fc}}{K_{th}} \cong 7 \dots 15$ ,  $m \cong 3 \dots 6$ , то з

похибкою не більше 5% можна спростити:

$$\Delta N \cong \frac{2}{m-2} \cdot \frac{l_{th}}{V_{th}} \left( \frac{l_{th}}{l_0} \right)^{\frac{m-2}{2}}.$$

Даний розв'язок має важливе теоретичне значення, тому що дозволяє оцінити живучість конструкції, в якій виявлена тріщина  $l_0$ .

Подальший аналіз можна провести кількома шляхами:

а) знайти в довідковій літературі з механіки руйнування значення  $K_{th}, K_{fc}, V_{th}, V_{fc}$ , що дозволить отримати живучість  $\Delta N$ . Чи буде це точним розв'язком? Ні, так як конструкція, яку ми будемо оцінювати на предмет життєздатності, буде однією із реалізацій випадкового процесу, і довідкові дані дозволять нам лише наближено оцінити залишковий ресурс  $\Delta N$  конструкції з тріщиною;

б) проводити натурний експеримент на предмет дослідження аналогічної конструкції з тріщиною, побудувати діаграми росту тріщини втомі та експериментально визначити залишковий ресурс  $\Delta N$ , який дасть наближене значення по причині п. а);

в) апріорно оцінити  $\Delta N$ , користуючись загальними міркуваннями.

Відомо, що  $V_{th} \sim 10^{-9} \text{ м/цикл}$ ,  $V_{fc} \sim 10^{-5} \text{ м/цикл}$ ,

$$K_{th} \sim (2...6) \text{ МПа} \sqrt{m}, \quad \frac{K_{fc}}{K_{th}} \sim 7...15.$$

Це дозволяє оцінити:

$$m \sim 3...6,$$

$$l_{th} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{th}}{\sigma_{\max}} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{200} \right)^2 = 1,27 \cdot 10^{-4} \text{ мм}.$$

Дані розрахунку  $\Delta N$  для  $m = \{3; 4; 6\}$  в залежності від стадії виявлення тріщини  $l_0$  зведено в таблицю 8.3.

**Таблиця 8.3.** Залежність залишкового ресурсу  $\Delta N$  від стадії виявлення тріщини  $l_0$ .

$l_0$	0,25	0,5	1	2	4
$m$					
3	181000	128000	90500	64000	45250
4	64500	32200	16100	8064	4032
6	16380	4090	1024	256	64

Як видно із таблиці, залишковий ресурс  $\Delta N$  суттєво залежить від  $m$  та довжини тріщини  $l_0$ , що виявлена наявними засобами діагностики. А значить, для підвищення надійності машин, що експлуатуються за технічним станом, особливого значення набуває якомога раннє виявлення тріщини. Найчастіше в практиці зустрічається значення  $m \sim 4$ . Для даного  $m$  в даній задачі  $\Delta N \cong \frac{16100}{l_0}$ .

Значення  $m = 4$  відповідає умовам самоподібного росту тріщини втоми. І для даного випадку залишковий ресурс визначається залежністю  $\Delta N \cong \frac{A_4}{l_0}$ .

Для  $m = 3$   $\Delta N \cong \frac{A_3}{\sqrt{l_0}}$ .

Для  $m = 6$   $\Delta N \cong \frac{A_6}{l_0^2}$ .

### Задача 8.2.

*Визначити залишковий ресурс конструкції із магнієвого сплаву М18 (рис. 8.14), що працює при*

$\sigma_{\max} = 80 \text{ МПа}$ , якщо тріщина була виявлена при довжині  $l_0 = 1,4 \text{ мм}$ .

Розв'язок.

Із рис.8.14  $K_{th} = 3 \text{ МПа} \sqrt{\text{м}}$ ;  $K_{fc} = 40 \text{ МПа} \sqrt{\text{м}}$ .

Продовження лінійної ділянки діаграми росту тріщини до перетину з вертикалями  $K_{th}$  і  $K_{fc}$  дає:  $V_{th} = 10^{-9} \text{ м/цикл}$ ;  $V_{fc} = 10^{-5} \text{ м/цикл}$ .

$$\text{Звідки: } m = \frac{\lg \frac{V_{fc}}{V_{th}}}{\lg \frac{K_{fc}}{K_{th}}} = \frac{4}{\lg \frac{40}{3}} = 3,55;$$

$$l_{th} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{th}}{\sigma_{\max}} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{3}{80} \right)^2 = 4,47 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,44 \text{ мм};$$

$$l_{fc} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{fc}}{\sigma_{\max}} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{40}{80} \right)^2 = 7,95 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 79,5 \text{ мм}.$$

Тоді:

$$\Delta N = \frac{2}{3,55 - 2} \cdot \frac{4,47 \cdot 10^{-4}}{10^{-9}} \left[ \left( \frac{4,47 \cdot 10^{-4}}{1,4 \cdot 10^{-3}} \right)^{\frac{3,55}{2} - 1} - \left( \frac{4,47 \cdot 10^{-4}}{7,95 \cdot 10^{-2}} \right)^{\frac{3,55}{2} - 1} \right] =$$

$$= 577578(0,413 - 0,018) = 228259 \text{ (циклів)}.$$

Якщо користуватись наближеною формулою, то  $\Delta N' = 238681 \text{ цикл}$ , тобто спрощення формули йде не в запас міцності і надійності, і з цим треба обережно поводитись, особливо в задачах оцінки залишкового ресурсу відповідальних конструкцій (авіаційні двигуни, осі коліс рухомого складу, елементи органів управління тощо).

### Задача 8.3

Для відомих  $K_{Ih} = 4,1 \text{ МПа} \sqrt{\text{м}}$  та  $K_{Ic} = 61 \text{ МПа} \sqrt{\text{м}}$ , а також рівня напруг  $\sigma_{\text{max}} = 400 \text{ МПа}$  ймовірність виявлення тріщини  $l_{0i}$  в заданих умовах мала вигляд:

$l_{0i}, \text{ мм}$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$P_i, \%$	0,01	0,04	0,12	0,25	0,52

тобто тріщина 0,1 мм була виявлена в одному випадку із ста; 0,3мм – в 4-х випадках із ста і т.д.

Визначити інтервал між оглядами (дефектоскопією) конструкції для заданого рівня ймовірності виявлення дефекту, а також довжину тріщини  $l_{0,0.5}$ , що відповідає даному рівню ймовірності виявлення дефекту  $P \in (0,99; 0,995; 0,999)$ .

Розв'язок.

Як показує аналіз таблиці, можна прийняти гіпотезу нормального розподілу змінної  $l_{0i}$  (довжини тріщини, яка виявляється при дефектації наявними засобами).

Для знаходження значень довжини тріщини, що відповідає заданому рівню виявлення дефекту  $P$ , скористаємося співвідношенням:  $l_{0p} = \bar{l}_0 + U_p \cdot S_l$ .

На жаль, нам невідомі  $\bar{l}_0$ - середнє значення довжини тріщини, що відповідає ймовірності  $P=50\%$ , а також середнє квадратичне відхилення даного розподілу.

Для знаходження  $l_{0/p=50\%}$  використаємо напівлогарифмічну апроксимацію залежності  $P(l_{0,p})$  в

інтервалі  $0,25 \leq P \leq 0,52$ . Тоді:  $I_0 / P=50\% = \bar{l}$  можна знайти із рівняння прямої в напівлогарифмічних координатах:

$$\frac{\bar{l} - 0,7}{0,9 - 0,7} = \frac{\ln 0,5 - \ln 0,25}{\ln 0,52 - \ln 0,25}$$

Звідки

$$\bar{l} = 0,7 + 0,2 \cdot \frac{\ln \frac{0,5}{0,25}}{\ln \frac{0,52}{0,25}} = 0,889 \text{ мм.}$$

Визначимо середньоквадратичне відхилення із наближеного співвідношення:

$$S_l \cong \frac{\bar{l} - l_{\min}}{U_{(p=0,91)} - U_{(p=0,5)}} = \frac{0,889 - 0,1}{2,326 - 0} = 0,382 \text{ мм.}$$

*Ймовірність невиявлення тріщини (дефекту)*

$$Q = 1 - P.$$

Відповідно:  $U_Q = -U_P$ .

Тоді

$$U_{(Q=0,91)} = 2,326; \quad U_{(Q=0,005)} = 2,576; \quad U_{(Q=0,001)} = 3,090.$$

Звідки знаходимо довжини тріщини, що відповідають заданим  $Q$ :

$$l_{0,\mu} / Q=0,91 = 0,889 + 2,326 \cdot 0,328 = 1,778 \text{ мм,}$$

$$l_{0,\mu} / Q=0,005 = 0,889 + 2,576 \cdot 0,328 = 1,874 \text{ мм,}$$

$$l_{0,\mu} / Q=0,001 = 0,889 + 3,090 \cdot 0,328 = 2,070 \text{ мм.}$$

Для визначення періоду між оглядами (діагностуваннями) конструкції визначимо число циклів  $\Delta N$ , що пройдуть з моменту виявлення тріщини до її закритичного росту.

Визначимо

$$m = \frac{lq \frac{V_{fc}}{V_{th}}}{\lg \frac{K_{fc}}{K_{th}}} = \frac{4}{\lg \frac{61}{4,1}} = 3,41,$$

$$l_{fc} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{61}{400} \right)^2 = 7,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7,4 \text{ мм},$$

$$l_{th} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{4,1}{400} \right)^2 = 3,34 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,0334 \text{ мм}.$$

Тоді:

$$\Delta N \cong \frac{2}{3,41 - 2} \cdot \frac{3,34 \cdot 10^{-5}}{10^{-9}} \cdot \left[ \left( \frac{3,34 \cdot 10^{-5}}{l_p} \right)^{\frac{3,41}{2} - 1} - \left( \frac{3,34 \cdot 10^{-5}}{7,4 \cdot 10^{-3}} \right)^{\frac{3,41}{2} - 1} \right]$$

Для  $l_p = l_{p=0,99} = 1,778 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , це дає:  $\Delta N = 1822$  циклів.

Для  $l_p = l_{p=0,999} = 2,070 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  отримуємо:  
 $\Delta N = 1530$  циклів.

Таким чином, для забезпечення ймовірності виявлення тріщини  $P=0,99$  періодичність оглядів повинна бути не рідше  $\frac{\Delta N}{2}$ , тобто через кожних 911 експлуатаційних циклів, а для забезпечення ймовірності виявлення тріщини  $P=0,999$  періодичність оглядів не повинна перевищувати  $\frac{\Delta N}{2} = 765$  експлуатаційних циклів.

Чому ми беремо половину визначеного інтервалу  $\Delta N$  ?

Якщо на попередньому огляді тріщина не була виявлена, то до послідуочого огляду через  $\Delta N$  конструкція може не “дожити”. Для чого  $\Delta N$  зменшується. В даному

випадку – по середньому значенні міжоглядового інтервалу.

#### Задача 8.4

При випробовуваннях партії зразків із сплаву В-95 в умовах консольного згину з обертанням при  $\sigma_{\max} = 300$  МПа тріщини небезпечного розміру були виявлені при значеннях довговічності (циклів):

$N \cdot 10^5$ : 0,53; 0,65; 0,76; 0,80; 0,87; 0,90; 0,90;  
 1,02; 1,07; 1,07; 1,09; 1,16; 1,22; 1,29;  
 1,40; 1,57; 1,59; 1,88; 2,07; 2,23; 2,23;  
 2,38; 2,79.

Визначити ймовірність безвідмовної роботи  $P(N)$  (без тріщин) в інтервалі  $(0 \dots 0,45) \cdot 10^5$  циклів та число циклів  $N_{0,01}$ , за яке 1% зразків буде мати тріщини небезпечного розміру.

Розв'язок.

Приймемо нормально-логіфімічний закон розподілу довговічностей  $X_i = \lg N_i$ .

Визначимо середнє значення та середнє квадратичне відхилення:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = 5,084, \quad S_x = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = 0,189.$$

Для  $N \leq 0,45 \cdot 10^5$  маємо:  $X_p = \lg 0,45 \cdot 10^5 = 4,653$ .

$$\text{Тоді: } U_p = \frac{X_p - \bar{X}}{S_x} = \frac{4,653 - 5,084}{0,189} = -2,280.$$

Звідки за таблицями квантилів знаходимо:

$$P(U_p = -2,280) = 0,987 = P(N \leq 0,45 \cdot 10^5).$$



Ймовірності руйнування  $Q = 0,01$  відповідає ймовірність неруйнування  $P = 1 - Q = 0,99$ .

Тоді:  $U_p = -2,326$ , звідки:

$$X_{U_p} = 5,084 - 2,326 \cdot 0,189 = 4,644$$

$$N_{0,01} = 10^{4,644} = 0,441 \cdot 10^5 \text{ циклів.}$$

### Задача 8.5

При дослідженні конструктивного елемента, виготовленого із сталі 45, тріщина виявлялась оптичним методом при довжині  $\bar{l} = 0,36$  мм при середньоквадратичному відхиленні  $S_l = 0,08$  мм. Визначити періодичність оглядів конструкції для  $P=0,99$ , якщо порогові значення коефіцієнта інтенсивності:  $K_{th} = 3,3$  МПа;  $K_{fc} = 38$  МПа, а рівень навантаження  $\sigma_{\max} = 250$  МПа.

Розв'язок.

1. Для забезпечення ймовірності виявлення тріщини  $P=0,99$  визначимо ймовірність невиявлення  $Q = 1 - P = 0,01$ . Відповідно  $U_Q = 2,326$ .
2. Визначасмо довжину тріщини, що відповідає невиявленню  $Q$ :  
$$l_Q = \bar{l} + U_Q \cdot S_l = 0,36 + 2,326 \cdot 0,08 = 0,546 \text{ мм.}$$
3. Визначасмо число циклів  $\Delta N$ , що пройдуть з моменту виявлення тріщини  $l_Q$  до її закритичного росту. Для цього

$$m = \frac{\lg \frac{V_{fc}}{V_{th}}}{\lg \frac{K_{fc}}{K_{th}}} = \frac{4}{\lg \frac{38}{3,3}} = 3,769;$$

$$l_{th} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{3,3}{250} \right)^2 = 5,54 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,055 \text{ мм};$$

$$l_{fc} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{38}{250} \right)^2 = 7,35 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7,35 \text{ мм}.$$

Тоді:

$$\Delta N = \frac{2}{m-2} \cdot \frac{l_{th}}{V_{th}} \left[ \left( \frac{l_{th}}{l_Q} \right)^{\frac{m-2}{2}} - \left( \frac{l_{th}}{l_{fc}} \right)^{\frac{m-2}{2}} \right] = 7462 \text{ цикли}.$$

Періодичність оглядів (для середини інтервалу) складає  $\frac{\Delta N}{2} = 3731$  експлуатаційних циклів.

8.4. Узагальнений алгоритм визначення періодичності оглядів елементів конструкцій, що можуть мати тріщини втоми.

На основі задач 8.1-8.5 побудуємо методологію оцінки періодичності інспекцій натурних елементів конструкцій, що можуть мати тріщини втоми. Якщо відомо:

$P$  – ймовірність виявлення тріщини при черговій інспекції заданими засобами, або  $Q = 1 - P$  – ймовірність невиявлення існуючої тріщини в конструкції, а також порогові значення коефіцієнта інтенсивності  $K_{th}$  та  $K_{fc}$  і рівень максимальних навантажень в циклі  $\sigma_{\max}$ ;  $\bar{l}, S_l$  – середня довжина і середнє квадратичне відхилення

виявлених тріщин, то будемо мати наступний алгоритм визначення періодичності оглядів:

1. Для ймовірності невиявлення тріщини  $Q=1-P$  визначаємо квантиль розподілу  $U_Q$ .

2. Визначаємо довжину тріщини, що відповідає ймовірності невиявлення:  $l_Q = \bar{l} + U_Q \cdot S_l$ .

3. Визначаємо число циклів  $\Delta N$ , що пройдуть з моменту виявлення тріщини  $l_Q$  до її закритичного росту. Для цього знаходимо

$$m = \frac{\lg \frac{V_{fc}}{V_{th}}}{\lg \frac{K_{fc}}{K_{th}}},$$

де  $V_{th}$  та  $V_{fc}$  - швидкості тріщини, що відповідають точкам перетину лінійної ділянки діаграми Періса з вертикалями в точках  $K_{th}$  та  $K_{fc}$ . З великою долею вірогідності можна прийняти  $V_{th} \cong 10^{-9}$  мм/цикл;  
 $V_{fc} \cong 10^{-5}$  мм/цикл.

Визначаємо порогові значення довжин тріщини:

$$l_{th} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{th}}{\sigma_{max}} \right)^2; \quad l_{fc} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{fc}}{\sigma_{max}} \right)^2$$

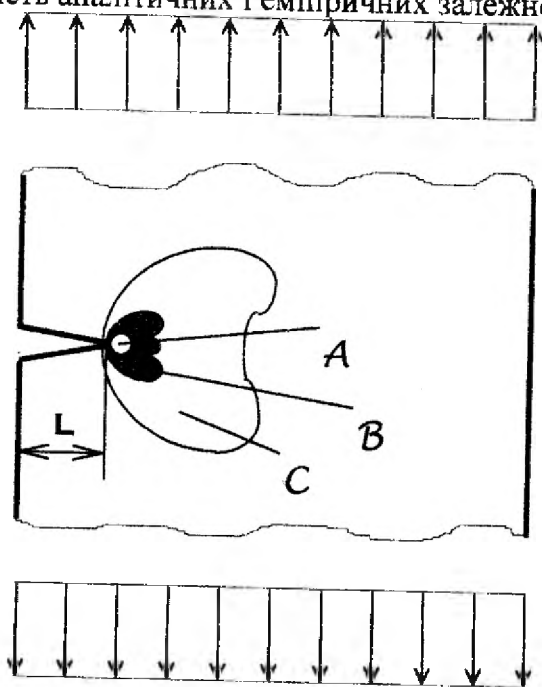
Це дає можливість визначити  $\Delta N$ :

$$\Delta N = \frac{2}{m-2} \cdot \frac{l_{th}}{V_{th}} \left[ \left( \frac{l_{th}}{l_Q} \right)^{\frac{m-2}{2}} - \left( \frac{l_{th}}{l_{fc}} \right)^{\frac{m-2}{2}} \right]$$

4. Маючи число циклів  $\Delta N$  від моменту виявлення тріщини до її закритичного росту, приймаємо рішення про призначення періодичності оглядів (інспекції)  $\Delta N_* \leq \Delta N$ .

В першому наближенні  $\Delta N_s = \frac{\Delta N}{2}$ .

Для визначення порогових значень статичної ( $K_{sc}$ ) та циклічної ( $K_{th}$ ) і ( $K_{fc}$ ) тріщиностійкості відома велика кількість аналітичних і емпіричних залежностей.



**Рис. 8.21.**

Так, В.С.Іванова та В.І.Бурба у результаті рентгенографічних досліджень пластичної зони в вершині тріщини виявили три області за рівнем граничних пошкоджень. Аналізуючи кінетику зони передруйнування – зони найбільших пошкоджень А – автори запропонували залежності для порогових значень характеристик тріщиностійкості (рис. 8.21):

$$K_{th} = \sigma_0 \sqrt{2\pi h_A},$$

$$K_{IC} = \sqrt{4,5 \cdot h_A \sigma_T E (1 - \mu^2)^{-1} \ln \frac{1}{1 - \psi}}.$$

Для  $\sigma_0 \cong 0,8\sigma_T$  це дало можливість отримати:

$$\frac{K_{IC}}{K_{th}} \cong \sqrt{\frac{E}{\sigma_T} \ln \frac{1}{1 - \psi}}$$

Для сталей в широкому діапазоні умов навантажень можна прийняти  $K_{fc} \cong (0,5...0,7)K_{IC}$ .

$$\text{Тоді: } \frac{K_{fc}}{K_{th}} \cong (0,5...0,7) \sqrt{\frac{E}{\sigma_T} \ln \frac{1}{1 - \psi}}.$$

Для сталей  $E \cong 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_T \cong (400...700)$  МПа,  $\psi \cong 0,6...0,7$ , що дає можливість орієнтовно оцінити діапазон зміни характеристик циклічної тріщиностійкості:

$$\frac{K_{fc}}{K_{th}} = (0,5...0,7) \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{(400...700)} \ln \frac{1}{1 - (0,6...0,7)}} = 8...17,$$

що знаходиться в гарній відповідності до експериментальних даних для сталей, сплавів магнію, алюмінію, титану.

## 9. Експлуатаційна надійність систем та вузлів машини.

Керування експлуатаційною надійністю передбачає оптимальне формування всіх її показників: довговічності, безвідмовності, ремонтпридатності та збереженості.

Важливе значення тут має підтримка основних показників в необхідних границях на протязі заданого часу. Особлива роль в даній задачі належить технічній діагностиці та прогнозуванню залишкового ресурсу.

За комплексні діагностичні показники можна прийняти, наприклад, зазор рухомого з'єднання, чи швидкість його зміни. Діагностувати зношування чи швидкості зношування можна такими методами:

- по вмісту характерних елементів зношування в оливі;
- по зміні температури в вузлах тертя;
- по рівню шумів та вібрацій;
- по аналізу відпрацьованих газів.

Це – методи оперативної діагностики, які не потребують великих затрат, і дозволяють наблизити значення основних показників роботи машини до їх номінальних значень. Наприклад, відсутність діагностичного контролю приводить до того, що середня потужність двигунів не перевищує 86 – 88%, тоді як при оперативному діагностичному контролю вдається досягти 95 – 98%.

Для двигунів внутрішнього згоряння ефективний діагностичний контроль можна виконати почерговим відключенням кожного з циліндрів на працюючому двигуні. По відхиленні від норми обертів судять про відхилення потужності від номінального значення. Даний метод не потребує спеціальних методів чи пристроїв.

Сучасні тенденції в світовому двигунобудуванні направлені на пристосування двигунів до діагностування. При цьому важливо, щоб діагностичні операції не проводили на основі їх роздроблення, а пов'язувались з комплексними діагностуваннями двигуна, зміною оливи, безрозборними профілактичними операціями та ін.

Прилади оперативного діагностичного контролю, що використовується для управління надійністю двигунів, повинні оцінювати узагальнені показники:

- потужність;
- паливну ефективність;
- швидкісний режим;
- загальний рівень вібрацій;
- компресію;
- температуру в вузлах тертя та фрикційних з'єднаннях;
- токсичність відпрацьованих газів;
- кількість газів, що прориваються в картер тощо.

Особливу ефективність дає аналіз цієї інформації в реальному масштабі часу на сучасних ЕОМ з ціллю збереження, аналізу, обробки та вироблення стратегії технічного обслуговування, ремонту чи оцінки залишкового ресурсу.

## 9.1 Накопичення інформації про надійність машин

Надійність машин та обладнання визначають на їх відповідність вимогам показників довговічності, безвідмовності, ремонтпридатності та зберігання дослідного виробу в порівнянні з аналогічними показниками еталонного виробу. В результаті цих порівнянь розробляють заходи по вдосконаленню

конструкції, технології виготовлення та технічної експлуатації машини.

Головна ціль накопичення інформації – це своєчасне забезпечення повних, об'єктивних та достовірних даних про надійність машин та її елементів в експлуатації. Для цього необхідна чітка система збору та обробки інформації про надійність, яка повинна об'єднувати проєктантів, підприємства-виробники та споживачів.

В ринкових умовах особливо зростає роль системи накопичення та обробки інформації про надійність виробів. Дана система повинна забезпечити своєчасне отримання повних та об'єктивних даних про надійність машин, їх оперативну обробку та визначення і впровадження заходів проєктантів, виробників та експлуатаційників по підвищенню надійності.

***Хто і де повинен накопичувати інформацію про відмови машин ?***

Очевидно, найкраще це робити в експлуатації. Для цього необхідні висококваліфіковані спеціалісти, знайомі з основами теорії надійності, математичної статистики, конструкцією та технологією виготовлення даних машин, їх технічною експлуатацією.

Накопичення та обробка інформації про надійність машин та обладнання дасть можливість:

- виявити причини відмов та неполадок;
- виявити деталі, вузли та агрегати, що обмежують надійність машини;
- обґрунтувати норми використання запасних частин та періодичність технічного обслуговування та ремонту машини;
- виявити вплив умов та режимів експлуатації на надійність машини;



- визначити економічно доцільні заходи по підвищенню надійності машин та їх елементів.

Надзвичайно важливе значення при визначенні заходів на підвищення показників надійності повинно надаватись економічним показникам, наприклад відношенню “ корисні властивості - ціна ”.

Наприклад, зернозбиральні комбайни виробництва США та Німеччини (Джон Дір, Домінатор та інші), що мають покращені характеристики надійності, довговічності, продуктивності, дизайну та ергономічності, більш зручніші та комфортніші в експлуатації коштують  $\approx$  \$250 000, що за сьогоднішніми закупівельними цінами відповідає 2000 т. зерна, або врожаю 1000 га посівів (для умов Полісся), і практично недоступні переважній більшості селян, кооперативів та КСП. В той же час менш надійні та менш комфортні зернозбиральні комбайни СК (СК – 4 ... СК – 6 )коштували 5...50 т. зерна, і навіть в “ветеранському” віці (15 – 20 років експлуатації) продовжують нести левову долю навантаження при збиранні врожаю, т.я навіть сезонні витрати в розмірі 15...50 % від вартості машини на ремонт та її обслуговування десь в 20 разів знижують собівартість операції збирання врожаю в порівнянні зі згаданими вище “Джон Дірами” та “Домінаторами”.

Стратегія підвищення характеристики надійності, комфортності та високих експлуатаційних характеристик наприклад, автомобілів, має приблизно таку ідеологію:

**Таблиця 9.1.**

Рівень доходів груп населення		Вимоги до автомобіля	Функції
I	Надвисокий Високий	Нові, наддорогі, надкомфотні, з високими експлуатаційними характеристиками, престижні \$35 000...100 000	Транспортна, соціального статусу, комфорту
II	Вище середнього Середній	Нові або до 3-5 років, з високими експлуатаційними характеристиками з середнім комфортом \$5 000 ...10 000	Транспортна, соціального статусу
III	Нижче середнього Низький	Після 5...15 років експлуатації \$1 000...3 000	Транспортна
IV	Наднизький	До \$ 1 000	Транспортна (можливість пересуватись)

Ясно, що ідеологія підвищення надійності машин для соціальних груп I та IV повинна бути докорінно різною. В першому випадку – автомобіль, крім транспортної місії несе відбиток соціального статусу, престижу та комфорту його володаря, начинений різноманітними аксесуарами (інколи абсолютно непотрібними), тоді як для групи IV – це можливість хоча б як-небудь пересуватись.

Головними джерелами інформації про надійність машин в експлуатації є спеціально організована

підконтрольна експлуатація чи випробування в умовах, максимально наближених до умов експлуатації.

Підконтрольною називають експлуатацію заданої кількості машин в строгій відповідності до вимог технічної документації, що супроводжується ретельним контролем технічного стану основних елементів кожної машини спеціально підготовленим персоналом.

Основні джерела інформації про надійність машин наведені в таблиці 9.2.

В таблиці 9.3 наведено первинну інформацію про облік напрацювань, пошкоджень та відмов вітчизняного автомобіля ЗАЗ-968М за перший рік експлуатації. І хоча за даний час автомобіль мав шість серйозних відмов причому усунення двох з них (№4 та №5) було пов'язане з демонтажем двигуна, для значної частини громадян України (категорії III – IV табл.1) даний автомобіль залишається досить привабливим якраз із-за надзвичайно високого відношення “корисні властивості / ціна”.

Як видно з таблиці 9.3, необхідна інформація містить марку, завод-виробник, заводський номер, час виготовлення, напрацювання до початку нагляду, а також необхідні дані про відмову: дату напрацювання, місце відмови, вид пошкодження та ймовірна причина відмови.

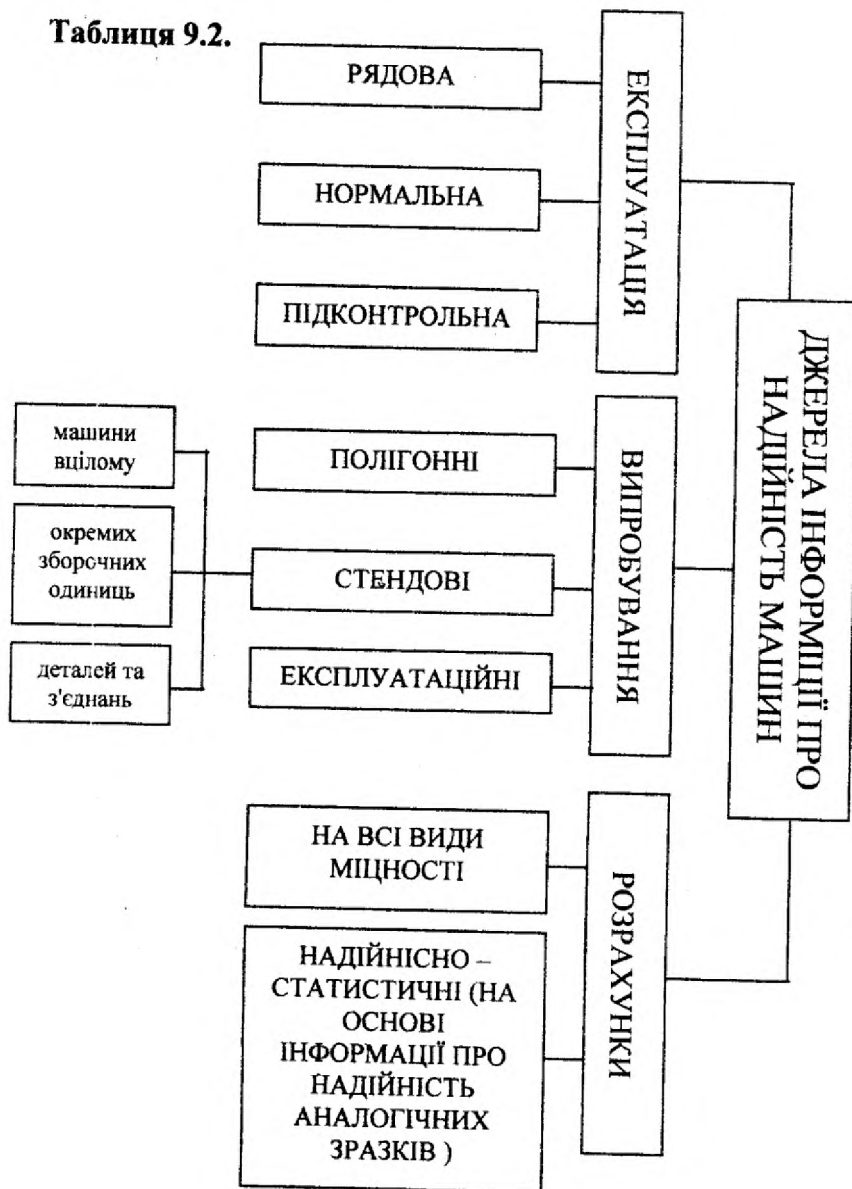
Первинними документами є журнали обліку напрацювань, відмов та неполадок машин, зразок якого і наведено в таблиці 3.

- Результати статистичної обробки та аналізу первинної інформації про надійність машини заносять в звітну відомість переліку показників надійності.

Облік трудомісткості та вартості технічного обслуговування та ремонту машин, витрат палива та мастил, запасних частин ведуть в спеціальних звітних відомостях по кожному типу машин.

Форми звітної документації потрібно складати в відповідності до комп'ютерних технологій створення та обробки баз даних.

Таблиця 9.2.



Таблиця 9.3

1. Назва - <i>автомобіль</i>		2. Марка - <i>343-968M</i>		3. Підприємство-виробник <i>Запорізький автозавод</i>		4. Заводський номер: <i>1875771</i>				
5. Двигун: <i>№981346</i>		6. Рік і місяць відправки: <i>- з підприємства - виробника: 1994, квітень; - з ремонтного підприємства:</i>		7. Дата початку роботи: <i>- після відправки чи ремонту: травень 1994 - в даній організації: травень 1994</i>		8. Загальне напруження з початку експлуатації: <i>48 місяців</i>				
9. Назва організації - споживача - <i>приватне підприємство Іванов і К°</i>										
№ відмови	Дата відмови	Напряповання до відмови			Місце відмови			Вид пошкодження	Ймовірна причина пошкодження	Усування відмови
		Час експлуатації (місяці)	Пробіг, тис.км	Агрегат, система	Вузол	Деталь	Елемент деталі			
1.	15.06.1994	1,5	0,44	Задня підвіска	Амортизатор	Манжета нижня		Руйнування	Неякісне виготовлення	Заміна амортизатора
2.	30.09.1994	4.	2,35	Стартер	Втягуюче реле	Шток	поверхня штока	Заїдання	Неякісне виготовлення	Заміна вузла
3.	10.11.1994	6	4,10	Генератор	Випрямляч	Діод		Пробой	Неякісне виготовлення	Заміна випрямляча
4.	15.12.1994	7,5	5,35	Двигун	Механізм газорозподілу	Штовхач випускного клапана 3-го циліндра	Контактна поверхня торця	Розплюскування	Відсутність закалки	Заміна штовхача
5.	15.04.1995	11,5	7,25	Зчеплення	Диск зчеплення	Фрикційна накладка		Зношування	Перегрів диска, неякісний матеріал накладок	Заміна фрикційних накладок
6.	25.04.1995	12	8,10	Напіввісь заднього колеса	Хрестовина	Розки підшипників		Руйнування тіл кочення	Відсутність мастил	Заміна хрестовини

### 9.1.1. Накопичення інформації про надійність в умовах експлуатації

Є кілька методів накопичення інформації про надійність машини в умовах експлуатації:

- інструментальний метод;
- метод хронометражу;
- метод періодичних спостережень;
- аналіз документації про експлуатацію і ремонт та інші.

Інструментальний метод дозволяє отримати об'єктивну інформацію в повному об'ємі. Як засіб здобуття інформації використовують контрольно-вимірювальну техніку та сучасні засоби її реєстрації (як правило, на базі бистродіючої персональної комп'ютерної техніки), що встановлюються безпосередньо на випробовуваній машині. Надійність елементів машини оцінюють в даному випадку за зміною їх технічного стану. Основний недолік даного методу – це необхідність в дорогій контрольно-вимірювальній техніці та засобах реєстрації і обробки інформації, а також висока вартість самих досліджень, обмежений об'єм вибірки машин, що знаходяться під наглядом.

Метод хронометражу використовують для визначення чистого часу роботи окремих елементів машини в робочому циклі, а також для оцінки інтенсивності використання машини за робочу зміну (чи аналогічний період часу). Крім цього, таким методом зручно визначати показники безвідмовності, напрацювання на відмову, середнє напрацювання на відмову, витрати часу на ТО та ремонт. Сутність методу хронометражу – в тому, що спеціаліст-хронометрист за допомогою секундоміра (чи - в більш сучасному

виконанні – система “датчики-крейд – комп’ютер” з реєстрацією в реальному масштабі часу) фіксують моменти початку та закінчення роботи машини чи її елементів.

Метод періодичних спостережень використовують в випадках, коли два перших методи використати неможливо. Збирають інформацію в даному випадку на основі опитування операторів та за результатами технічної експертизи. При плануванні періодичних спостережень важливо, щоб інтервал між двома спостереженнями не перевищував середнього напрацювання на відмову. Основний недолік даного методу – низька достовірність інформації.

Метод накопичення інформації на основі аналізу документації про експлуатацію та ремонт. Використовується досить широко, і дає гарні результати за умови якісного та своєчасного заповнення технічної документації. Даний метод дає можливість оцінити напрацювання на відмову, технічний ресурс чи термін експлуатації до капітального ремонту. Основний недолік, як і в попередньому випадку – низька достовірність інформації.

Для підвищення достовірності інформації про основні показники надійності варто комбінувати наведені методи, що дозволяє зменшити терміни та збільшити об’єм інформації.

Об’єднання та обробку інформації, отриманої з різних джерел та різними методами, необхідно проводити методами математичної статистики.

Математична статистика є основою методів прийняття обґрунтованих рішень в умовах невизначеності. Як стверджує професор Дж.Геннант-Сміт, спочатку статистикою називають вивчення державних справ, а термін *stats* використовувався виключно державними

діячами, добре обізнаних і тому здатних робити обґрунтовані політичні висновки.

Пізніше під словом "статистика" стали розуміти числові дані, на основі яких державні діячі робили свої державні висновки. А ще пізніше черга дійшла до числових даних взагалі. Як бачимо, методи математичної статистики пройшли важкий шлях, перш ніж потрапити в підручники з основ надійності машин.

### 9.1.2. Експертні оцінки надійності машин.

Експертні оцінки використовують для оцінки надійності машин та їх елементів за умов:

коли застосування інших методів неможливо чи економічно недоцільно;

для ранжування випадкових величин (показників надійності) по їх значимості.

Експертні оцінки є ймовірними, і базуються на здатності спеціаліста давати корисну інформацію в умовах невизначеності.

Невідому кількісну характеристику надійності потрібно розглядати в таких випадках, як випадкову величину, відображенням закону розподілу якої є суб'єктивна оцінка достовірності чи значимості тої чи іншої події. Коли такі оцінки отримані від групи експертів, то допускають, що "істинне" значення характеристики, що досліджується, знаходиться в інтервалі діапазону оцінок, і що "узагальнена" колективна думка є більш достовірною.

До речі, метод експертних оцінок широко використовується в навчальному процесі, спорті, різноманітних конкурсах тощо. Так, при захисті курсових чи дипломних проектів на основі опитування членів відповідних екзаменаційних комісій виводяться середні оцінки. Аналогічно в гімнастиці, стрибках у воду,



фігурному катанні, зустрічах КВК, конкурсах красунь середні кількісні оцінки виводяться в результаті відповідної обробки оцінок всіх членів журі.

Різниця в тому, що в даному випадку журі (комісія) оцінює подію, що відбулася, тоді як оцінка показників надійності найчастіше проводиться апіорі, в просторі ймовірностей.

Для аналізу думок групи експертів використовують середні величини:

$$\text{середнє арифметичне } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\text{середнє зважене арифметичне } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$$

де  $v_i$  – вага (доля) оцінки  $x_i$ ;  $n$  – число експертів.

Для аналізу експертних оцінок особливе значення надається варіації  $i$ -их значень оцінок в околі середньої оцінки. При цьому чим менше відхилення, тим, як правило, достовірніша оцінка групи експертів. Для цього необхідно визначити амплітуду відхилень:

$$A = X_{\max} - X_{\min}$$

Існує кілька способів опитування експертів:

*Метод погодження* – коли кожен експерт дає незалежну оцінку, а потім всі оцінки експертів об'єднуються в загальну (узгоджену) за допомогою методів математичної статистики.

*Груповий метод* – коли група експертів працює разом (консиліум) і формує сумарну оцінку групи в цілому.

*Метод Дельф* – коли узгодження індивідуальних оцінок поєднується з послідовним ознайомленням кожного експерта з іншими оцінками.

Найбільш поширений – метод погодження.

Узагальнена оцінка при цьому:

$$\rho_{зв} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i \rho_i}{\sum_{i=1}^n r_i}$$

де  $r_i$  – вага думки  $i$ -го експерта.

Вага думки кожного експерта визначається на основі оцінок його попередньої діяльності, кваліфікації, ерудиції, посади чи академічного звання.

Коли в експертній групі експерти приблизно одного рівня, маємо:  $r_1 = r_2 \dots = r_n = 1$  що дає:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i}{n}$$

Опитують експертів заочно (коли відсутній контакт експертів з аналітиками) чи очно, коли експерти заповнюють листи опитування в присутності аналітиків. Заочне опитування відносно просте та економічно доцільне, хоча тут можливі помилки при заповненні анкет. При очному опитуванні цей недолік виключається, хоча потрібні значні кошти на приїзд експертів, та, крім того, аналітик при очному опитуванні може свідомо чи підсвідомо впливати на відповіді експерта.

На нашу думку, сучасні засоби зв'язку (сотовий телефонний зв'язок, електронна пошта, факс, комп'ютерні мережі тощо) дають значні переваги для розвитку заочних методів опитування експертів.

## 9.2. Віброакустична діагностика і надійність машин.

На щастя, в багатьох випадках діагностування машин можна отримати кількісну чи якісну інформацію

про технічний стан машини без опитування експертів. Один із альтернативних методів, за яким велике майбутнє, будується на основі аналізу віброакустичних сигналів машини, що працює чи приводиться в рух в режимі холостого ходу.

Тоді для оцінки величини зношування використовуються наступні показники вібрацій:

- амплітуда прискорення вібрації –  $a_a$ ;
- фаза віброімпульса відносно реперної точки
- загальний рівень вібрацій;
- комплексні показники вібрацій.

За допомогою спеціального датчика механічний сигнал вібрації, що виникає при ударній взаємодії деталей в зазорі, перетворюється в електричний сигнал. Схема датчика, що встановлюється за допомогою спеціального магнітного кріплення, зображена на *рис. 9.1*.

П'єзоелемент розміщують між корпусом та нормованою інерційною масою. Зі збільшенням вібрацій зростає прискорення маси та збільшується сила інерції, що діє на п'єзоелемент. Величина електричного сигналу, що знімається з п'єзоелементу, пропорційна прискоренню вібрацій.

Для підвищення ефективності діагностування важлива роль належить місцю установки датчика, а також режиму діагностування (ручне прокручування, холостий хід, робота з частиною відключених механізмів, режим навантаження, нестационарний режим). Отримання та реєстрація даної віброграми на комп'ютері з подальшою комп'ютерною обробкою дозволяє за лічені секунди визначити стан зношування рухомих з'єднань та їх залишковий ресурс.

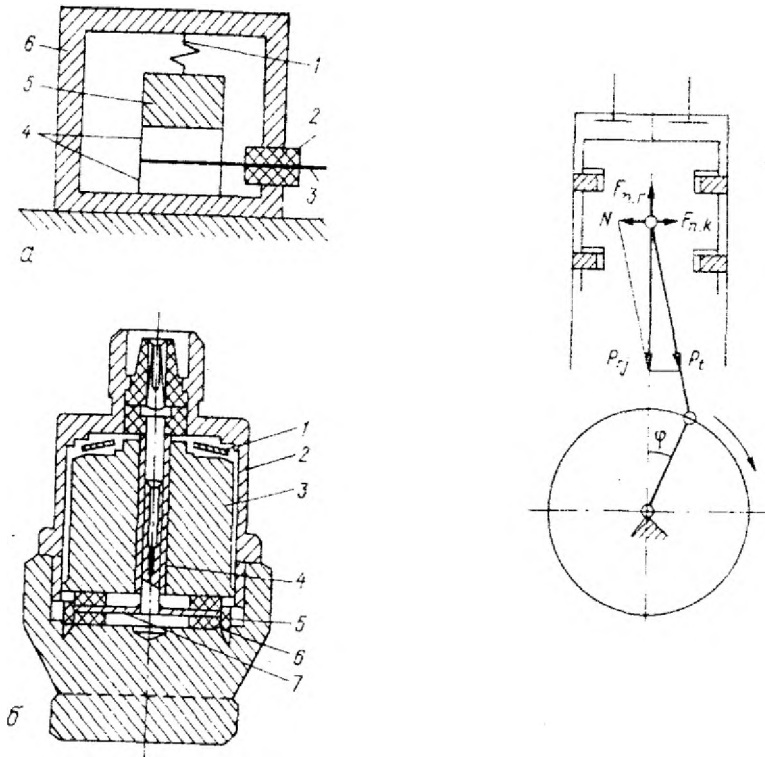


Рис. 9.1. Датчик вібрацій: а) схема: 1- пружина; 2- ізоляція; 3- провідник; 4- пьезоселемент; 5- інерційна маса; 6- корпус;

б) конструкція: 1- пружина; 2- корпус; 3- інерційна маса; 4- фторопластова втулка; 5- ізоляційне кільце; 6- пьезоелементи; 7- контактна шайба.

Рис. 9.2. Схема сил, що діють на поршень в момент його перекладки на початку такту розширення:

$P_{\eta}$  - результуюча сил тиску газів та сил інерції мас, що рухаються поступально;  $N$  - горизонтальна (бокова) складова  $P_{\eta}$ ;  $P_i$  - складова  $P_{\eta}$  вздовж осі шатуна;  $F_{\Pi r}$  - продовжня компонента сили тертя;  $F_{\Pi k}$  - поперечна результуюча сили тертя.

Наприклад, для двигунів одним із головних критеріїв працездатності та залишкового ресурсу є стан циліндро-поршньової групи, визначення зазорів в парі “поршень-гільза” – найважливіша задача діагностування двигуна.

Розглянемо діагностичні основи формування віброакустичного сигналу для оцінки зазору в парі “поршень-гільза”.

Виходячи з того, що перекидка поршня в зоні верхньої мертвої точки (ВМТ) складає  $10..28^{\circ}$  кута повороту колінчатого вала, отримано рівняння для визначення тривалості перекидки  $t_n$  та поперечної швидкості поршня  $V_n$  в момент перекидки:

$$t_n \approx 8.3 \sqrt{\frac{S \cdot m}{n \cdot P_{\Gamma} \cdot \lambda_k}} \quad (9.1)$$

$$V_n \approx 3.6 \sqrt[3]{\frac{S^2 \cdot n \cdot P_{\Gamma} \cdot \lambda_k}{m}} \quad (9.2)$$

де  $S$  – зазор між поршнем та гільзою циліндра;

$m$  – маса поршня з шатуном;

$n$  – частота обертання колінчастого вала;

$P_{\Gamma}$  – результуюча всіх сил, що діють на поршень;

$\lambda_k$  – відношення радіуса кривошипа до довжини шатуна.

Імпульс бокової сили при ударі поршня об стінку гільзи може бути приблизно виражений

$$R \approx \int_t^{t+\tau} P dt = m V_n (1+k) = 3.6(1+k) \sqrt[3]{S^2 n m P_{\Gamma} \lambda_k} \quad (9.3)$$

де  $k \approx 0,7$  – коефіцієнт відновлення при ударі.

Так як величина максимальної амплітуди віброімпульсу пропорційна величині імпульсу бокової сили  $R$ , то для даного типу двигуна і заданого режиму роботи для  $k, n, m, P_{\Gamma}, \lambda \approx \text{const}$  (наприклад,  $n = \text{const}$  в

режимі холостого ходу) маємо:

$$a_a \approx C_s * S^{2/3} \quad (9.4)$$

де  $C_s$  – константа для заданого режиму роботи.

Суттєво впливати на константу  $C_s$  будуть теплові умови. Особливо це відноситься до циліндро-поршньової групи. На робочих режимах в умовах високих температур граничні зазори та зазори в початковому стані будуть значно менші, ніж на холодному двигуні:

$$S_T = S_{T_0} - \Delta S_T \quad (9.5)$$

де  $S_T$  – зазор між поршнем та гільзою на прогрітому двигуні,  $S_{T_0}$  – зазор, заміряний при зборці з'єднання при кімнатній температурі. Зміну теплового зазору можна розрахувати за формулою:

$$\Delta S_T = D_p \alpha_p \Delta t_p - D_r \alpha_r \Delta t_r,$$

де  $D_p, D_r$  – діаметри поршня та гільзи;

$\alpha_p, \alpha_r$  – коефіцієнти лінійного розширення матеріалів поршня та гільзи;

$\Delta t_p, \Delta t_r$  – приріст температур поршня та гільзи.

Так, наприклад, для двигуна СМД-62 зазори, заміряні при  $20^0\text{C}$ , становили  $S_{\text{поч}}=0,22\text{мм}$ ;  $S_{\text{lim}}=0,60\text{мм}$ , тоді як на прогрітому двигуні  $S_{\text{поч.г}}=0,05\text{мм}$ ;  $S_{\text{lim.г}}=0,48\text{мм}$ .

На *рис.9.2 – 9.3* наведені відповідно схема сил, що діють на поршень в момент його перекладки на початку такту розширення та значення ударного імпульсу  $R$ , поперечної швидкості поршня  $V_p$ , кута повороту колінчастого вала від ВТМ до удару з гільзою в працюючому циліндрі двигуна СМД-62 в залежності від величини зазору  $S$ . На *рис.9.4* наведені графіки зміни амплітуди  $A$  та фази  $\Delta\phi$  віброімпульсів, що генеруються в діагностичній зоні циліндро-поршньової групи в залежності від величини зазору  $S$  для дизельного двигуна ЯМЗ-238НБ. Прискорене зношування циліндро-поршньової групи досяглося введенням кварцового пилу.

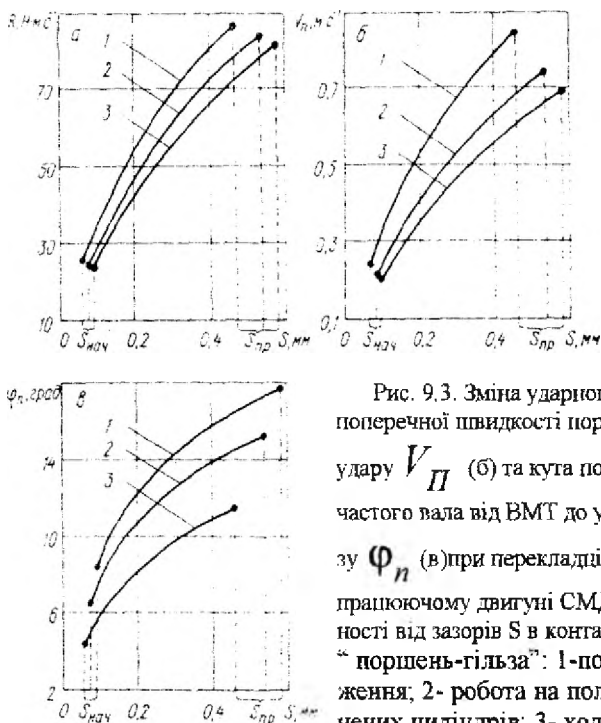


Рис. 9.3. Зміна ударного імпульсу (а), поперечної швидкості поршня в момент удару  $V_{II}$  (б) та кута повороту колінчастого вала від ВМТ до удара об гільзу  $\Phi_n$  (в) при перекладці поршня в працюючому двигуні СМД-62 в залежності від зазорів  $S$  в контакті "поршень-гільза": 1-повне навантаження; 2- робота на половині виключених циліндрів; 3- холостий хід (рис. 9.3. в – зворот ній порядок).

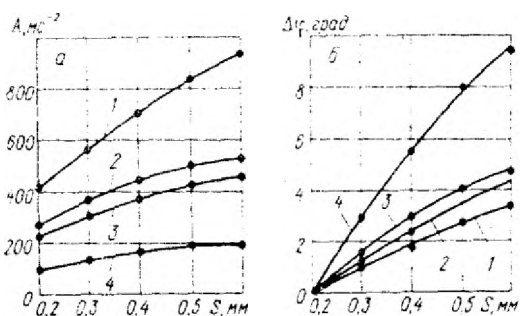


Рис. 9.4. Зміна амплітуди  $A(s)$  та фази  $\Delta\varphi(s)$  віброімпульсів від зазорів  $S$  в контакті "поршень-гільза" двигуна ЯМЗ-238Б: 1-повне навантаження ( $\omega=170\text{с}^{-1}$ ); 2- холостий хід ( $\omega=100\text{с}^{-1}$ ); 3 - прокручування з компресією ( $\omega=100\text{с}^{-1}$ ); 4- прокручування без компресії ( $\omega=100\text{с}^{-1}$ ).

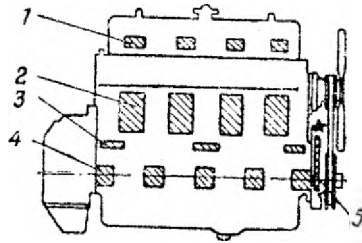


Рис. 9.5. Зони встановлення вібрдатчиків для діагностування: 1- клапанів; 2- поршнів; 3- штовхачів; 4- підшипників; 5- розподільних шестерень.

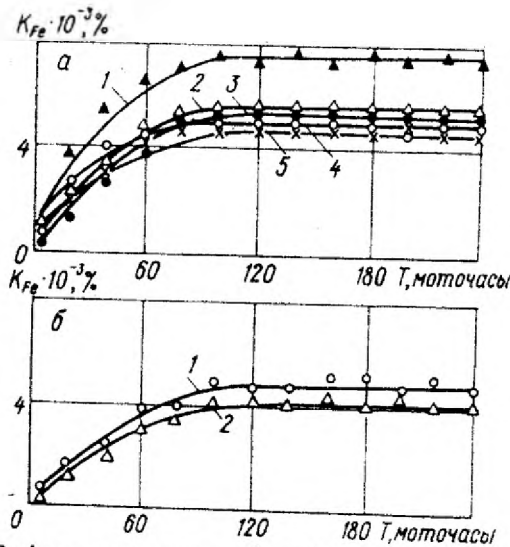


Рис. 9.6. Зміна концентрації мікрочастинок заліза в картерній оліві в залежності від напрацьовання  $T$  для двигунів ЯМЗ-238 АБ(а) та ЯМЗ-240Б(б).



Як слідує із *рис.9.4*, величина амплітуди віброімпульсів добре апроксимується поліномом другого порядку, і в залежності від режиму, може бути записана:

- 1)  $A = 17 + 2046S - 857S^2, \omega = 170 \text{ c}^{-1}$
- 2)  $A = 94 + 956S - 357S^2, \omega = 100 \text{ c}^{-1}$
- 3)  $A = 62 + 923S - 429S^2, \omega = 100 \text{ c}^{-1}$
- 4)  $A = 46 + 270S - 22S^2, \omega = 100 \text{ c}^{-1}$

Віброакустичну діагностику шатунних підшипників краще проводити на режимах розгону, т.я. на даних режимах віброімпульси проявляють себе більш активно.

В таблиці 9.4 наведені результати експериментальних досліджень віброакустичної діагностики шатунних підшипників двигуна ЯМЗ-238 НБ, де  $A_{\text{lim}}$ - амплітуда віброімпульсів за умов граничного зазору  $S_{\text{lim}} = 0,45 \text{ мм}$ ;  $A_{\text{ном.}}$ - амплітуда віброімпульсів при номінальному зазорі  $S_{\text{ном.}} = 0,15 \text{ мм}$ .

Інформативність параметра можна оцінювати відношенням  $K_A = A_{\text{lim}}/A_{\text{ном.}}$ .

Як видно з табл.9.4, найбільша чутливість та стабільність сигналів при діагностуванні шатунних підшипників характерна для режиму вільного розгону, причому зв'язок між амплітудою та величиною зазору лінійний.

Віброакустична діагностика газорозподільного механізму цього двигуна показує, що між амплітудою віброімпульса  $A$  та величиною зазорів в газорозподільному механізмі  $S$  існує тісний зв'язок:

$$A = 1077 S, \quad r_{\text{тл}} = 0,949 \quad (9.7)$$

(9.7) дозволяє оцінити величину зазору з похибкою 0,02...0,04 мм.

На *рис.9.5*. показані схематично зони установки вібрдатчиків для діагностування зазорів в циліндро-

поршньовій групі (1), шатунних підшипниках (2), газорозподільному механізмі (3).

**Таблиця 9.4.** Віброакустичні показники шатунних підшипників двигуна ЯМЗ-238 НБ

Режим	$A_{\text{поч.}}$ м·с <sup>-2</sup>	$A_{\text{лім.}}$ м·с <sup>-2</sup>	$K_A$
1. Холостий хід:			
n=1000 об/хв.	30	63	2,1
n=1700 об/хв.	36	75	2,1
2. Робота на половині циліндрів			
n=1000 об/хв	60	134	2,2
n=1700 об/хв	78	175	2,2
3. Вільний розгін.	180	550	5,0

### 9.3. Діагностичний контроль зношування на основі спектрального аналізу оливи.

Оперативний діагностичний контроль механізмів та вузлів автомобілів і двигунів можна побудувати на основі спектрального аналізу оливи. Цей аналіз дозволяє:

- визначити технічний стан двигуна;
- своєчасно попередити інтенсивне зношування;
- більш оперативно керувати довговічністю та надійністю машин.

Експериментально встановлено, що швидкість поступання продуктів зношування в оливу залежить від навантаження машини.

За показник навантаження можна взяти витрати палива  $G_p$ . Існує тісний кореляційний зв'язок між швидкістю поступання заліза в оливу  $q^{Fe}$  та  $G_p$ . В таблиці 9.5 наведені рівняння регресії для вузлів і агрегатів

тракторів К-700 та К-701. Як видно з таблиці, дана залежність є лінійною функцією виду:

$$q^{Fe} = a \cdot G_{II} - b \quad (9.8)$$

Нами встановлено, що параметри  $a$  і  $b$  корелюють між собою:

$$b = 6,74 \cdot a - 27,30; \quad r_{II} = 0,997 \quad (9.9)$$

**Таблиця 9.5.** Кореляційні залежності поступання заліза в оливу від витрат пального

Марка	Агрегат, вузол	Рівняння регресії
ЯМЗ-238 НБ	Картер	$q^{Fe} = 9.31 \cdot G_{II} - 38.86$
ЯМЗ-240 Б	Картер	$q^{Fe} = 6.46 \cdot G_{II} - 14.32$
К-700	Коробка передач	$q^{Fe} = 14.33 \cdot G_{II} - 71.68$
К-700	Передній міст	$q^{Fe} = 14.77 \cdot G_{II} - 69.35$
К-701	Коробка передач	$q^{Fe} = 17.03 \cdot G_{II} - 87.05$
К-701	Передній міст	$q^{Fe} = 7.43 \cdot G_{II} - 22.28$

А це означає, що кореляційні залежності табл. 9.5 належать до автомодельного підпростору. Існування автомодельності (9.9) суттєво спрощує використання даного підходу для контролю зношування вузлів та механізмів в експлуатації.

На *рис. 9.6 та 9.7* показані залежності концентрації заліза в оливі вузлів і агрегатів тракторів К-700 та К-701 від напрацювань. Як видно з даних малюнків, концентрацію заліза можна використовувати як діагностичний параметр.

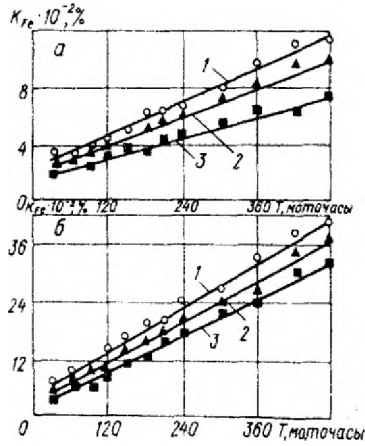


Рис. 9.7. Зміна концентрації мікрочастинок заліза в оливі коробки передач (а) та передніх мостів (б) трактора К-700.

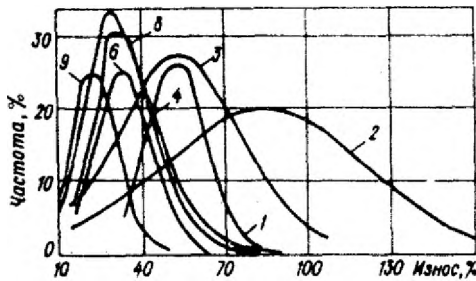


Рис. 9.8. Розподіл зазорів (зношувань) в контакті деталей циліндро-поршневої групи дизельних двигунів, відправлених в капітальний ремонт: 1-зазор "поршень-гільза", 2- зазор і компресійне кільце – канавка поршня; 3 – овальність гільзи; 4- стик і компресійного кільця; 5- пружність і компресійного кільця; 7- пружність оливо-з'ємного кільця; 8- стик оливо-з'ємного кільця; 9- зношування гільзи.

#### 9.4 Вплив регулювань на показники надійності двигунів в умовах експлуатації.

В експлуатаційних випробовуваннях двигунів Д-50 з порушеним регулюванням паливної апаратури вивчався облік відмов, обумовлених погіршенням робочих процесів.

Показники надійності визначались за таких порушень регулювання паливної апаратури:

- збільшенням кута випередження початку подачі палива на 21%;
- зменшенням кута випередження початку подачі палива на 29%;
- завищеною цикловою подачею палива на 22.5%;
- заниженою тиском початку підйому голки форсунки на 40%;
- комплексне порушення регулювань (п.1+п.3+п.4);
- комплексне порушення регулювань (п.2+п.3+п.4).

В таблиці 9.6 наведені порівняльні розподіли відмов деталей циліндро-поршньової групи та кривошипно-шатунного механізму в умовах експлуатації.

Як видно із таблиці, порушення регулювань паливної апаратури суттєво впливає на показники надійності двигунів: потік відмов зростає в два і більше разів, напрацювання на відмову зменшується в 2.1 рази, час діагностування, відновлення та простоїв збільшується в 2.4 ...2.5 рази.

Відхилення регулювань паливної апаратури призводить до росту динамічних і температурних показників робочого циклу, що впливають на вібрацію, динамічну деформацію та теплонавантаження деталей двигуна.

**Таблиця.9.6.** Кількість відмов двигуна Д-50 в умовах експлуатації при нормальних та порушених регулюваннях паливної апаратури.

Назва відмови	Кількість відмов			
	Нормальні регулювання	Порушені регулювання	$\Sigma$	%
1. Розпилювачі форсунок	18	46	64	47,4
2. Прокладки головки блока циліндрів	5	14	19	14,1
3. Паливна магістраль високого тиску	6	11	17	12,6
4. Клапани	3	5	8	5,9
5. Головка блока	3	5	8	5,9
6. Підшипники	2	3	5	3,7
7. Поршньові кільця	3	4	7	5,2
8. Гільзи циліндрів	2	3	5	3,7
9. Поршні	1	1	2	1,5
$\Sigma$	43	92	135	100
%	31,8	68,2	100	-

Підвищення закоксованості форсунок і клапанів пояснюється їх високою теплонавантаженістю, відмови паливних магістралей - підвищеними вібраціями.

### 9.5. Прогнозування залишкового ресурсу.

Під залишковим ресурсом механізму чи вузла будемо називати напрацювання від моменту оцінки технічного стану до моменту, коли основні з'єднання досягають граничних значень.

Прогнозування залишкового ресурсу за середньостатистичними даними для даного конкретного вузла є малонадійними. Більш надійні оцінки дають значення діагностичних параметрів, що заміряються в процесі напрацювань.

Прогнозування залишкового ресурсу – одна із найважливіших задач теорії надійності машин. Дане прогнозування застосовується для оцінки досягнення практичного стану. В таблиці 9.7 та на *рис.9.8* наведені статистичні характеристики 9 параметрів стану деталей циліндро-поршньової групи 29 двигунів СМД-14, які мали середнє напрацювання біля 3000 мотогодин.

Найпростіше залишковий ресурс можна визначити на основі лінійної моделі (*рис.9.9*):

$$\tau_{\text{залиш}} = \tau \left( \frac{P_{\text{lim}} - P_{\tau}}{P_{\tau} - P_{\text{поч}}} \right)$$

$$\text{звідки } \frac{\tau_{\text{зал}}}{\tau} = \frac{P_{\text{lim}} - P_{\tau}}{P_{\tau} - P_{\text{поч}}} \quad (9.10)$$

де  $\tau_{\text{залиш}}$  - залишковий ресурс (в мотогодинах чи кілометрах пробігу),  $\tau$  - напрацювання з початку експлуатації до моменту визначення стану;  $P_{\text{поч}}$ ,  $P_{\text{lim}}$  ... початкове та граничне значення параметру,  $P_{\tau}$  - значення параметру після напрацювання  $\tau$ .

При відсутності показників напрацювання з початку експлуатації залишковий ресурс можна оцінити за двома замірами параметрів:

$$\frac{\tau_{\text{зал}}}{\tau_{1,2}} = \frac{P_{\text{lim}} - P_2}{P_2 - P_1} \quad (9.11)$$

де  $\tau_{1,2}$  – напрацювання між замірами,  $P_1$ ,  $P_2$  – значення параметрів в першому та другому замірах;  $P_{\text{lim}}$  – граничне значення параметра та технічними умовами.

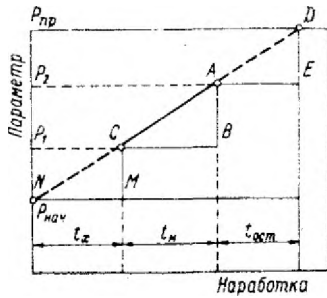


Рис. 9.9 Прогнозування залишкового ресурсу  $t_{\text{зал}}$  та напрацювання від початку експлуатації  $t_k$  при мінімальній залежності  $P(t)$ .

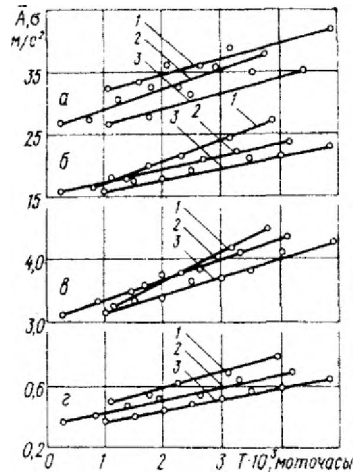


Рис. 9.10. Залежність віброакустичних параметрів двигуна Д-50 від напрацювання а) - рівень вібрацій в зоні циліндро-поршньової групи ( $n=1000$  об/хв,  $x/x$ ); б) - середнє значення максимальної амплітуди вібрацій

та рівень вібрацій (в) в зоні прокручування декомпресованих (крім досліджуваного) циліндрів (фазова селекція,  $n=300$  об/хв); г) -

середнє значення максимальної амплітуди вібрацій в зоні шатунних підшипників при прокручуванні декомпресованого двигуна ( $n=180$  об/хв).

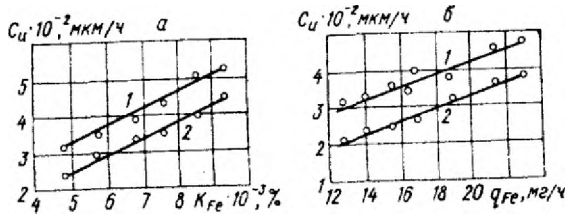


Рис. 9.11. Залежність швидкості  $C_u$  зростання зазорів в контакті "поршень-гльза" (1) та "шатунна шайка-підшипник" (2) двигуна Д-50 від концентрації мікрочастинок заліза в оливі  $K_{Fe}$  (а) та швидкості їх поступання в оливу (б).



**Таблиця 9.7.** Статистичні характеристики параметрів циліндро-поршньової групи двигунів СМД-14, направлених на капітальний ремонт.

Параметр стану	Середньо-арифметичне значення	Середньо-квадратичне відхилення
1. Зазор “поршень- гільза”, мм	0,31	0,062
2. Зазор “перше компресійне кільце – канавка поршня”, мм	0,42	0,18
3. Овальність гільзи, мм	0,068	0,040
4. Зазор по першому компресійному кільцю, мм	1,48	0,63
5. Пружність першого компресійного кільця, Н	52,30	7,10
6. Зазор “маслоз’ємне кільце – канавка поршня”, мм	0,10	0,032
7. Пружність маслоз’ємного кільця, Н	71,0	7,40
8. Зазор по маслоз’ємному кільцю, мм	0,96	0,31
9. Зношення гільзи, мм	0,095	0,032

Кращі прогнозуючі оцінки можна отримати, якщо використати нелінійні залежності  $P\tau$  ( $\tau$ ).

Наприклад:

$$P = P_{\text{поч}} + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \dots = P_{\text{поч}} + \sum a_i\tau^i \quad (9.12)$$

де  $P$  - параметр технічного стану механізму чи вузла (зношування, зазор, витрати мастил, прорив газів тощо),  $a_1, a_2, \dots, a_n$  - експериментальні коефіцієнти,  $\tau$  - напрацювання.

Задавши  $P\tau = P_{\text{lim}}$ , можна визначити  $\tau_{\text{lim}}$ , звідки залишковий ресурс

$$\tau_{\text{залиш.}} = \tau_{\text{lim}} - \tau \quad (9.13)$$

Однак велика кількість експериментальних коефіцієнтів та складність їх визначення ускладнюють використання (9.12). Тому в прогнозуванні залишкового ресурсу значно частіше, разом з лінійними (9.10)-(9.11), використовуються нелінійні моделі типу

$$P\tau = P_{\text{поч}} + b \cdot \tau^\alpha \quad (9.14)$$

Де  $b$ ,  $\alpha$  – експериментальні коефіцієнти. Тоді залишковий ресурс може бути визначений:

$$\tau_{\text{зал}} = \tau \left[ \left( \frac{P_{\text{lim}} - P_{\text{поч}}}{P_{\tau} - P_{\text{поч}}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right] \quad (9.15)$$

Значення показника  $\alpha$  для дизельних двигунів можна в першому наближенні прийняти згідно з рекомендаціями:

**Таблиця 9.8.**

Параметр стану	Значення $\alpha$
1. Циліндро-поршньова група – по прориву газів в картер;	
а) до заміни поршньових кілець	1,3
б) після заміни поршньових кілець.	1,5
2. По зазору в кривошипно-шатунному механізмові.	1,4
3. По зношуванню опорної поверхні тарілки клапана газорозподільного механізму (втоплення клапана).	1,6
4. По зношуванню кулачків розподільчого вала.	1,1
5. По зношуванню плунжерних пар паливного насоса.	1,1

Звичайно, прогнозування залишкового ресурсу має ймовірну природу, основу на середньостатистичних даних.

Для підвищення точності прогнозування необхідно періодично заміряти діагностичні параметри, що по мірі збільшення напрацювання дозволить слідкувати за динамікою зношування та більш точно прогнозувати залишковий ресурс.

На *рис. 9.10* наведена кінетика зміни рівня вібрацій двигунів Д-50 в залежності від напрацювань, а на *рис. 9.11* – швидкість зростання зазорів в з'єднаннях “поршень – гільза” та “шатунна шийка - підшипник” від концентрації заліза в оливі для цих же двигунів.

Для середньої швидкості збільшення зазорів це дало можливість отримати емпіричні залежності:

для з'єднання “поршень – гільза”

$$C_{\text{пг}} = 0,006 + 5K_{\text{пр}}$$

для з'єднання “ шийка колінчастого вала – шатунний підшипник”

$$C_{\text{шп}} = 0,015 + 4,2K_{\text{пр}}$$

де  $K_{\text{пр}}$  – приведена концентрація заліза в оливі.

Розглянуті вище підходи дозволяють розв'язати ряд практичних задач теорії надійності машин.

### Задача 9.1.

*Ймовірність зношування щітки генератора до небезпечних розмірів від пробігу на автомобілі ЗАЗ 968-*

*М має  $\bar{L}=28000$  км.;  $S=8000$  км.*

*Визначити по зношенню щітки пробіг для заданого рівня надійності генератора.*

Розв'язок.

Приймаємо гіпотезу про нормальний закон розподілу зношування.

Для трьох років надійності –  $P \in (0,9; 0,99; 0,999)$  знаходимо  $L_p$  за формулою:

$$L_p = \bar{L} + U_p \cdot S_L$$

де  $U_p$  для заданого рівня знаходимо за таблицями квантів.

Результати розрахунків зводимо в таблицю:

P	0.5	0.9	0.99	0.999
$U_p$	0	-1.282	-2.326	-3.090
$L_p$ , тис.км.	28	17.7	9.4	3.3

### Задача 9.2.

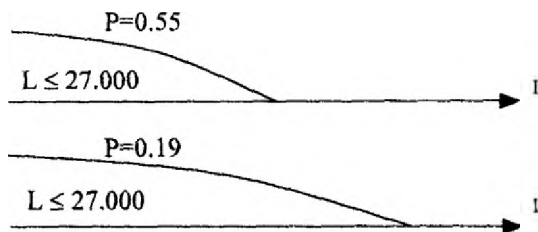
Для умови попередньої задачі визначити ймовірність відмови генератора в діапазоні пробігів  $L \in [27.. 35]$  тис.км.

Розв'язок.

Для знаходження  $P(L \geq 27.000)$  знайдемо  $U_p$ :

$$U_p = \frac{L_p - \bar{L}}{S_L} = \frac{27.000 - 28.000}{8000} = -0.125$$

$$P \approx 0.19$$



**Рис.9.12**

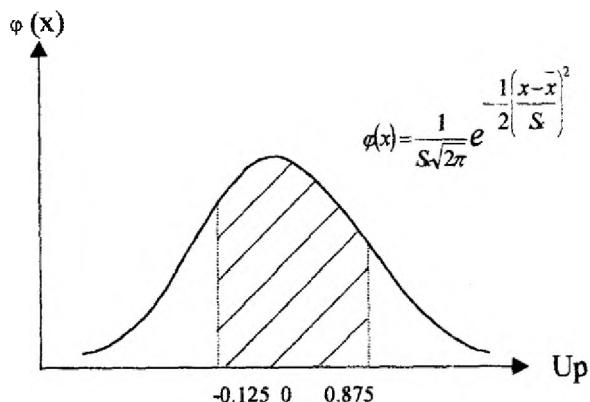
Знайдемо

$$P(27.000 \leq L < 35.000) = P(L \leq 27.000) - P(L \leq 35.000) = 0.55 - 0.19 = 0.36$$

Таким чином, ймовірність безвідмовної роботи генератора в діапазоні пробігів  $27.000 \leq L < 35.000$  складає 0.36. Тоді ймовірність відмови генератора в заданому діапазоні  $Q = 1 - P = 0.64$

### Спосіб II.

Необхідно визначити ймовірність того, що задана величина потрапляє в діапазон  $-0.125 \leq U_p \leq 0.875$ . Це означає, що необхідно знайти площу криволінійної трапеції



**Рис. 9.13**

Для  $\frac{x - \bar{x}}{S_x} = U_p$  маємо  $\varphi(x) = \frac{1}{S_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U_p^2}{2S_x^2}}$

Тоді

$$P(-0.125 \leq U_p \leq 0.875) = \int_{-0.125}^{0.875} e^{-\frac{U_p^2}{2S_x^2}} = \Phi \left| \begin{matrix} 0.125 \\ 0 \end{matrix} \right| + \Phi \left| \begin{matrix} 0.875 \\ 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= 0.0501 + 0.3089 = 0.36$$

### Задача 9.3

**Визначити параметри розподілу газорозподільного механізму автомобіля ЗАЗ-968М ,**

якщо при середньому пробігу  $\bar{L} = 45.000$  км. настуила відмова за пробігу  $L_p = 650$  км.

Розв'язок.

Заданося трьома рівнями безвідмовної роботи та визначимо їх квантилі.

P	0.9	0.99	0.999
$U_p$	-1.282	-2.326	-3.090
$S_L$	34.6	19.11	14.4

де  $S_L$  визначали за формулою:  $S_L = \frac{L_p - \bar{L}}{U_p}$

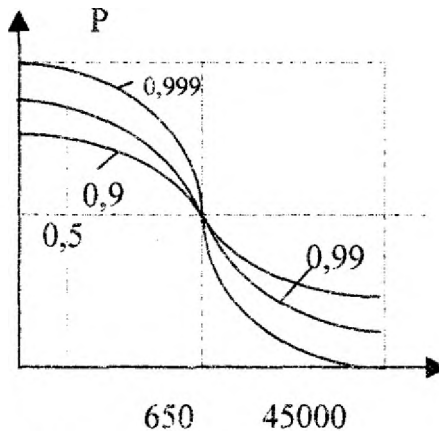


Рис. 9.14

Як видно з таблиці, найменше середньоквадратичне відхилення дає  $P=0.999$ . Дійсно, як слідує із графіка, для  $L_p = \text{const}$  вищий рівень надійності відповідає меншій дисперсії. Це означає, що при  $L_p = 650$  км. і  $P=0.999$  тільки один із тисячі газорозподільних механізмів вийдуть з ладу, а при  $P=0.99$  – десять. Взагалі в даній задачі випадки  $P=0.99$

і  $P=0.9$  не мають фізичного сенсу, так як  $\bar{L} < 3 S_L$ , і перша відмова повинна настати при від'ємному напрацюванні.

#### Задача 9.4.

*Визначити середній пробіг та середньоквадратичне відхилення паливної апаратури двигуна КаМАЗ-5410, якщо в парку із 143 автомобілів за пробігу 33000 км. відмовило два агрегати, а за пробігу 37000 км. ще три агрегати. Прийняти нормальній закон розподілу відмов.*

Розв'язок.

Визначимо ймовірність відмов:

$$Q_1 = 2/143 = 0.014; Q_2 = 5/143 = 0.035;$$

Звідки ймовірність безвідмовної роботи

$$P_1 = 1 - Q_1 = 0.986; P_2 = 1 - Q_2 = 0.965;$$

$$\text{Тоді: } \begin{cases} L_{p1} = \bar{L} + U_{p1} * S_L \\ L_{p2} = \bar{L} + U_{p2} * S_L \end{cases}$$

За таблицями квантилів:  $U_{p1} = -2.20; U_{p2} = -1.81;$

$$\text{Тоді: } S_L = \frac{37000 - 33000}{-1.81 - (-2.20)} = \frac{4000}{0.39} = 10250(\text{км})$$

$$\bar{L} = L_{p1} - U_{p1} * S_L = 33000 - (-2.20) * 10250 = 55500(\text{км})$$

#### Задача 9.4.<sup>1</sup>

*Для забезпечення ймовірності безвідмовної роботи  $P=0,95$  автомобілів ЗІЛ-130 періодичність технічних оглядів ТО-1 не повинна перевищувати 4000 км пробігу. Для АТП, в якому із-за нехватки ремонтників періодичність ТО-1 складала 6500 км пробігу, ймовірність безвідмовної роботи зменшилася до 0,70. Визначити середній пробіг  $\bar{L}$  до відмови та його середньоквадратичне відхилення  $S_L$ .*

Розв'язок.

Визначити квантили нормального розподілу:

$$U_{P1} = -1.645, U_{P2} = -0.524$$

Тоді із системи рівнянь:

$$\begin{cases} U_{P1} = \frac{L_1 - \bar{L}}{S_L} \\ U_{P2} = \frac{L_2 - \bar{L}}{S_L} \end{cases}$$

визначаємо  $\bar{L}$  та  $S_L$ :

$$\bar{L} = \frac{L_1 - L_2 \left( \frac{U_{P1}}{U_{P2}} \right)}{1 - \left( \frac{U_{P1}}{U_{P2}} \right)} = \frac{4000 - 6500 \left( \frac{-1.645}{-0.524} \right)}{1 - \left( \frac{-1.645}{-0.524} \right)} = 7670 \text{ (км)}$$

$$S_L = \frac{L_1 - \bar{L}}{U_{P1}} = \frac{4000 - 7670}{-1.645} = 2230 \text{ (км)}$$

### Задача 9.5.

*Партія нових автомобілів ГАЗ-3102 (n=190) знаходиться на підконтрольній експлуатації в таксопарку. При пробігові  $L_1=57000$  км відмовив стартер на одному автомобілі, при  $L_2=64000$  км – ще на одному. Визначити, при якому пробігові наступить відмова стартера на третьому автомобілі, а також середньо очікуваний пробіг в партії. Прийняти нормальний закон розподілу відмов.*

Розв'язок.

Ймовірності відмов

$$Q_1 = 1/190 = 0.00526; P_1 = 1 - Q_1 = 0.9947; U_{P1} = -2.576$$

$$Q_2 = 2/190 = 0.01053; P_2 = 1 - Q_2 = 0.9895; U_{P2} = -2.3$$

По аналогії з попередньою задачею:



$$S_L = \frac{64000 - 57000}{-2.3 - (-2.576)} = 25400(\text{км})$$

$$\bar{L} = 57000 - (-2.576) * 25400 = 122430$$

Для ймовірності

$$Q_3 = 3/190 = 0.01579; P_3 = Q_3 - 1 = 0.9842; U_{P_3} = -2.14;$$

Тоді

$$L_{P_3} = \bar{L} + U_{P_3} * S_L = 122430 - 2.14 * 25400 = 68070(\text{км})$$

### Задача 9.6.

*Визначити середній пробіг та його дисперсію, а також  $L_{0,9}, L_{0,95}, L_{0,99}$  напівосі автомобіля, якщо для заданого спектра навантажень при стендових випробуваннях було отримано (при нормально-логарифмічному законі)*

$$\overline{LgL} = 6.382; \quad S_{LgL} = 0.253$$

Розв'язати самостійно.

### Задача 9.7.

*Розрахунковий ресурс дизельного чотирьох-циліндрового двигуна з робочим об'ємом 2,45 л складає 150 тис.км. пробігу автомобіля. Визначити показники надійності для цього пробігу, якщо допустиме зношування гільз циліндрів складає 150... 350 мкм, а інтенсивність зношування  $i = 1.58 \pm 0.64$  мкм/1000 км.*

Розв'язок.

Допустимі значення зношування ототожнимо з несумою здатністю машини (по зношуванню).

$$R_{\min} = 150 \text{ мкм}; R_{\max} = 350 \text{ мкм}.$$

Очікувані значення зношування на заданому пробігові ототожнимо з параметром навантаження.

$$F_{\min} = \frac{L}{1000} \cdot i_{\min} = \frac{150000}{1000} * (1.58 - 0.64) = 141 (\text{мкм})$$

$$F_{\max} = \frac{L}{1000} \cdot i_{\max} = \frac{350000}{1000} * (1.58 - 0.64) = 333 (\text{мкм})$$

Визначимо середні очікувані та середньо-квadraticні відхилення параметрів R та F:

$$m_R = \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2} = \frac{350 + 150}{2} = 250 (\text{мкм})$$

$$S_R = \frac{350 - 150}{6} = 33.3 (\text{мкм})$$

$$m_F = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2} = \frac{333 + 141}{2} = 237 (\text{мкм})$$

$$S_F = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} = \frac{333 - 141}{2} = 32 (\text{мкм})$$

Знаходимо середнє очікуване та середньоквadraticне відхилення величини  $Z=R-F$

$$m_Z = m_R - m_F = 250 - 237 = 13 (\text{мкм})$$

$$S_Z = \sqrt{S_R^2 + S_F^2} = \sqrt{(33.3)^2 + 32^2} = 46.2 (\text{мкм})$$

Ймовірність безвідмовної роботи (ймовірність того, що зношування буде лише допустимої величини) визначимо, як  $P(Z>0)$ . Для цього знайдемо густину розподілу

$$f(z) = \frac{1}{S_z \cdot 2\pi} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2S_z^2}}$$

Звідки функція розподілу

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz = \Phi_0(U_p)$$

Значення квантиля нормального розподілу знайдемо за формулою  $U_p = \frac{z - m_z}{S_z}$

$$\text{Для } Z=0 \text{ маємо: } U_p = \frac{m_z}{S_z} = \frac{m_k - m_f}{\sqrt{S_k^2 + S_f^2}} = \frac{13}{46.2} = -0.281$$

Визначимо ймовірність безвідмовної роботи  $P(Z>0)=\Phi_0(U_p)=0.61$

**Висновок:** за умовами даної задачі ймовірність безвідмовної роботи двигуна по критерію зношування циліндрів для пробігу  $L=150000$ (км) складає 61%, тобто 61 із 100 двигунів досягнуть пробігу 150000 км.

### Задача 9.8

*Визначити 50%, 80%, 90% та 95% ресурс ДВЗ (в тис.км. пробігу автомобіля), якщо допустиме зношування циліндрів за даними дефектування при капітальному ремонті знаходились в діапазоні 150...350 мкм., інтенсивність зношування складала 1...2мкм/1000 км. пробігу, прийняти нормальний закон розподілу зношування та інтенсивності зношування.*

Розв'язок.

1. Знаходимо квантилі розподілу:

$$U_{p=95}=-1.645; \quad U_{p=90}=-1.282; \quad U_{p=80}=-0.842; \quad U_{p=50}=0;$$

2. Позначимо:

$$R_{\max}=350 \text{ мкм};$$

$$R_{\min}=150 \text{ мкм};$$

$$F_{\max}=\frac{L}{1000} * i_{\max}$$

$$F_{\min}=\frac{L}{1000} * i_{\min}$$

Тоді:

$$m_R = \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2}; \quad S_R = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{6};$$

$$m_F = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2} = \frac{L}{1000} * m_i,$$

$$S_F = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{6} = \frac{L}{1000} * \left( \frac{i_{\max} - i_{\min}}{6} \right) = \frac{L}{1000} * S_i,$$

$$U_P = \frac{m_R - m_F}{\sqrt{S_R^2 + S_F^2}} = \frac{m_R - \frac{L}{1000} m_i}{\sqrt{S_R^2 + \left( \frac{L}{1000} \right) S_i^2}}$$

Щоб знайти пробіг L, що відповідає заданому рівню надійності, необхідно дане рівняння розв'язати відповідно L. Це дає:

$$L = \frac{\sqrt{(m_i m_R)^2 - (S_i^2 U_P^2 - m_i^2)(S_R^2 U_P^2 - m_R^2)} - m_i m_R}{S_i^2 U_P^2 - m_i^2} * 1000$$

Для  $m_R=250$  мкм;  $S_R=33.33$  мкм

$m_i=1.5$  мкм;  $S_i=0.166$  мкм

результати розрахунків зведемо у таблицю

P	$U_P$	$L, \text{км}$
95%	-1.645	123600
90%	-1.282	132500
80%	-0.842	143600
50%	0	166600

До речі, 50% ресурсу відповідає значення

$$L_{50} = \frac{m_R}{m_i} * 1000$$

### Задача 9.8.

Для двигуна ЯМЗ-238Б швидкість поступання заліза в систему мащення підлягає залежності:

$$G_{Fe} = 9,13 * G - 38,86 \left( \frac{\text{Мг}}{\text{мотогодина}} \right),$$

де  $G$  – витрати палива, г/с ( як комплексний показник завантаженості). Для  $G \in [G_{\min}; G_{\max}]$ , де  $G_{\min}=6$  г/с;  $G_{\max}=10$  г/с та їх нормального розподілу визначити ресурс (в мотогодинах) даного двигуна по зношуванню циліндрів, якщо 44% поступання заліза в систему мащення припадає на зношування циліндрів, а гранично допустимі зношування циліндрів складають 240...360 мкм.

Розв'язати самостійно.

### Задача 9.9.

В умовах попередньої задачі відомо , що напрацювання двигуна  $\tau_{\Sigma} = 1000$  мотогодин, та сумарні витрати дизпалива за цей час  $Q_{\Sigma}=28800$  кг. Визначити зношування циліндрів та залишковий ресурс по зношуванню.

Розв'язати самостійно.

### Задача 9.10.

Визначити показники безвідмовної роботи деталі із сталі 45 на базі  $\tau_1=4000$  годин;  $\tau_2=20000$  годин, що працює за умов  $T \in [550...610]$  К,  $\sigma \in [380...400]$  МПа, якщо короткочасні випробування при температурі  $T=580$  К та швидкості навантаження  $\dot{\varepsilon} \approx 10^3$  с<sup>-1</sup> дали:  $\sigma_B = 460$  МПа;  $\delta=21\%$ .

Розв'язок.

Використаємо зв'язок між напругами, температурою та довговічністю (часом до руйнування ) у вигляді рівняння Журнова:  $\tau = \tau_{\text{exp}} \frac{U_0 - \gamma \sigma}{kt}$

Активаційний об'єм  $\gamma$  та енергію активації визначимо за співвідношеннями Грабара (4.4) та (4.17):

$$\gamma \cong (1,02 \dots 1,05) * \frac{U_0(1 - T/T_S)}{\sigma_B(1 + \delta)}$$

$$U_0 = RT_S \cdot \ln \frac{1}{\tau_0}$$

Для сталі 45 приймаємо  $T_S \cong 1808 \text{ K}$

$$U_0 = 8,31 * 10^{-3} * 1808 * \ln \frac{1}{10^{-13}} = 449,7 \frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$$

$$\gamma \cong 1,03 \frac{449,7(1 - 580/1808)}{460(1 + 0,21)} = 0,549 \frac{\text{кДж}}{\text{моль} * \text{МПа}}$$

Тоді:

$$\tau_{\min} = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma * \sigma_{\max}}{RT_{\max}} = 10^{-13} \exp \frac{449,7 - 0,549 * 400}{8,31 * 10^{-3} * 610} =$$

$$= 5173500 \text{ c} = 1437 \text{ год}$$

$$\tau_{\max} = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma * \sigma_{\min}}{RT_{\min}} = 10^{-13} \exp \frac{449,7 - 0,549 * 380}{8,31 * 10^{-3} * 550} = 8,1 * 10^6 \text{ c} =$$

$$= 2,2 * 10^6 \text{ год}$$

Прийнявши нормально-логіфімічний закон розподілу часу до руйнування, знайдемо:

$$\bar{\lg \tau} = \frac{\lg \tau_{\max} + \lg \tau_{\min}}{2} = 4,750; S_{\lg \tau} = \frac{\lg \tau_{\max} - \lg \tau_{\min}}{6} = 0,530$$

Для заданих значень  $\tau_1 = 400 \text{ год.}$  та  $\tau_2 = 20000 \text{ год.}$  знайдемо ймовірність неруйнування, користуючись залежністю:

$$U_{\rho 1} = \frac{\lg \tau_1 - \bar{\lg \tau}}{S_{\lg \tau}} = \frac{3,602 - 4,750}{0,530} = -2,166$$

$$U_{p2} = \frac{\lg \tau_2 - \lg \bar{\tau}}{S_{\lg \tau}} = \frac{4.301 - 4.750}{0.530} = -0.847$$

Тоді  $Q_1=0,985$ ;  $Q_2=0,80$ . Таким чином, на базі  $\tau_1=4000$  год. ймовірність відмови конструкції складає  $P_1=1-Q=1,5\%$ , а на базі 20000 год. –  $Q_2=20\%$ .

### Задача 9.11.

*Визначити ймовірність безвідмовної роботи на протязі  $\tau_1=1000$ год.;  $\tau_2=2000$ год.;  $\tau_3=3000$ год. шарикопідшипника, якщо ресурс його по зношуванню підлягає нормальному закону з параметрами  $\bar{\tau} = 3800$  год.;  $S_{\tau}=800$  год.*

Розв'язок.

Знаходимо квантілі розподілу.

$$U_{p1} = \frac{\tau_1 - \bar{\tau}}{S_{\tau}} = \frac{1000 - 3800}{800} = -3,5$$

$$U_{p2} = \frac{\tau_2 - \bar{\tau}}{S_{\tau}} = \frac{2000 - 3800}{800} = -2,25$$

$$U_{p3} = \frac{\tau_3 - \bar{\tau}}{S_{\tau}} = \frac{3000 - 3800}{800} = -1$$

По таблиці квантилів знаходимо:

$$P(\tau_1)=0,9998; P(\tau_2)=0,987; P(\tau_3)=0,841$$

**Висновок:** при одночасній експлуатації 100 шарикопідшипників в заданих умовах ( $\bar{\tau}=3800$  год.;  $\sigma=800$  год.) прогноз відмов після 1000 год. експлуатації дає 0,02 підшипника, після 2000 год. – 1,3 підшипника, після 3000 год. – 15,9 підшипників.

### Задача 9.12.

Нехай границя плинності сталі 40, визначена для деякої партії зразків, підлягає нормальному закону з середнім значенням  $\bar{x} = \sigma_{0,2} = 450 \text{ МПа}$  та середнім квадратичним відхиленням  $S_{\sigma} = 60 \text{ МПа}$ .

Знайти ймовірність того, що значення границі плинності потрапить в інтервал:  $420 < x_i < 480 \text{ МПа}$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} P(420 \leq X \leq 480) &= \Phi\left(\frac{480 - 450}{60}\right) - \Phi\left(\frac{420 - 450}{60}\right) = \\ &= \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) = \Phi(0,5) - [1 - \Phi(0,5)] = \\ &= \Phi(0,5) - [1 - \Phi(0,5)] = 2\Phi(0,5) - 1 = 2 * 0,691 - 1 = 0,382. \end{aligned}$$

Таким чином, 38% випробуваних зразків будуть мати границю плинності, що потрапляє в інтервал

$$\bar{X} \pm \frac{1}{2} S_x$$

Аналогічно, для  $\bar{X} \pm S_x$  будемо мати:  $P(390 < x < 510) =$

$$= \Phi\left(\frac{510 - 450}{60}\right) - \Phi\left(\frac{390 - 450}{60}\right) = 2\Phi(1) - 1 = 2 * 0,85 - 1 = 0,7$$

тобто 70%.

Для  $\bar{X} \pm 2S_x$  будемо мати:  $P(330 \leq x \leq 570) =$

$$= \Phi\left(\frac{570 - 450}{60}\right) - \Phi\left(\frac{330 - 450}{60}\right) = 2\Phi(2) - 1 = 2 * 0,9 - 1 = 0,96$$

тобто 96%.

### Задача 9.13.

Оцінити ймовірність безвідмовної роботи коробки передач, якщо відомі умовні запаси міцності по



середнім значенням несучої здатності та навантаженості:

$$\frac{m_r}{m_F} = \bar{n} \text{ та варіації } v_{Ri}; v_{Fi};$$

зубчастих передач –  $\bar{n}_1=1,4$ ;  $\bar{n}_2=1,4$ ;  $\bar{n}_3=1,5$ ;  $\bar{n}_4=1,6$ ;

підшипників первинного вала  $\bar{n}_5 = \bar{n}_6=1,6$ ;

підшипників вторинного вала  $\bar{n}_7 = \bar{n}_8=1,6$ ;

первинного і вторинного валів  $\bar{n}_9 = \bar{n}_{10}=2,1$ ;  $\frac{m_r}{m_F} = \bar{n}$

Несучі здатності всіх елементів розподілені з однаковим коефіцієнтом варіації:  $v_{R1}=v_{R2}=\dots=v_{R10}=0,1$ , а навантаження має  $v_F=0,1$ , де  $v_{Ri} = \frac{S_{Ri}}{m_{Ri}}$ ;  $v_F = \frac{S_F}{m_F}$ .

Відомо, що коробка працює :

2% часу – на першій передачі; 6% - на другій передачі ;

9% - на третій передачі, решту часу – 83% - на четвертій передачі.

Розв'язати самостійно.

#### Задача 9.14.

Визначити еквівалентний запас міцності по несучій здатності конструкції, робочий цикл якої складається з чотирьох ділянок для трьох режимів експлуатації, якщо

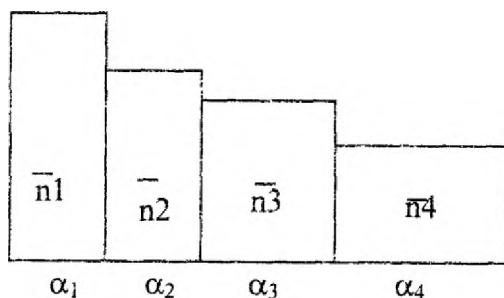


Рис.9.15

$\bar{n}_1 = 1,4$ ;  $\bar{n}_2 = 1,5$ ;  $\bar{n}_3 = 1,6$ ;  $\bar{n}_4 = 1,7$  для всіх трьох режимів, а відносні долі кожної із ділянок задані в таблиці.

Режим	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
I	0,02	0,05	0,15	0,78
II	0,05	0,10	0,20	0,65
III	0,25	0,25	0,25	0,25

Конструкція працює при температурі  $T=600\text{K}$ ; для матеріалу конструкції при цій температурі  $\sigma_B=800\text{МПа}$ ;  $\delta=20\%$ . Матеріал – сталь 45, високо температурна прокатка.

Розв'язок.

Для знаходження еквівалентного запасу міцності  $\bar{n}_i$  скористаємося лінійним законом додавання пошкоджень:

$$\frac{t_1}{\tau_1} + \frac{t}{\tau_2} + \frac{t_3}{\tau_3} + \frac{t_4}{\tau_4} = 1 \quad (1)$$

$$\text{де } \tau_1 = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \frac{\sigma_B}{\bar{n}_1}}{RT}; \quad \tau_2 = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \frac{\sigma_B}{\bar{n}_2}}{RT} \quad (2)$$

$$\tau_3 = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \frac{\sigma_3}{\bar{n}_3}}{RT}; \quad \tau_4 = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \frac{\sigma_B}{\bar{n}_4}}{RT}$$

Це ті довговічності, які мала б конструкція, якби режим навантаження складався б тільки з однієї відповідної ділянки.

$$t_1 = \alpha_1 * \tau_1; t_2 = \alpha_2 * \tau_1; \quad t_3 = \alpha_3 * \tau_1; t_4 = \alpha_4 * \tau_1; \quad (3)$$

$$\tau_e = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \frac{\sigma_B}{\bar{n}_e}}{RT} \quad (4)$$

Поставивши (2) – (4) в (1), маємо:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i \tau_o e^{\frac{U_o}{kT}} e^{\frac{\beta}{\lambda_i}}}{\tau_o e^{\frac{U_o}{kT}} e^{\frac{\beta}{\lambda_i}}} = 1 \quad (5)$$

де  $\beta = \frac{\gamma \sigma}{RT}$ . Після скорочень

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i e^{-\frac{\beta}{n_i}}}{e^{-\frac{\beta}{n_e}}} = 1 \quad (6)$$

звідки

$$e^{-\frac{\beta}{n_e}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{e^{-\frac{\beta}{n_i}}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-\frac{\beta}{n_i}}} \quad (7)$$

Це дозволяє записати

$$-\frac{\beta}{n_e} = \ln \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-\frac{\beta}{n_i}}} \quad (8)$$

Або, після логарифмування

$$-\frac{\beta}{n_e} = -\ln \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-\frac{\beta}{n_i}} \quad (9)$$

(9) дозволяє знайти  $n_e$ :

$$n_e = \frac{\beta}{\ln \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-\frac{\beta}{n_i}}} \quad (10)$$

В умовах даної задачі безрозмірний множник  $\beta$  можна знайти за наближеннями проф. Грабара:

$$\beta = \frac{\gamma \sigma_B}{kT}; \gamma \approx (1.02 \dots 1.05) \frac{U_o \left(1 - \frac{T}{T_s}\right)}{\sigma_B (1 + \delta)}$$

$$U_o \approx RT_s \ln \frac{1}{\tau_o} = 8.31 \cdot 10^{-3} \cdot 1800 \ln \frac{1}{10^{-13}} \approx 450 \quad \left(\frac{\text{кДж}}{\text{моль}}\right)$$

$$\gamma \approx 1.03 \frac{450 \left(1 - \frac{600}{1800}\right)}{800 \cdot 1.2} = 0.3125$$

$$\beta \approx \frac{\gamma \sigma_B}{RT} = \frac{0.3125 \cdot 800}{8.31 \cdot 10^{-3} \cdot 600} = 50.1$$

Тоді для I режиму:

$$n_I = \frac{50,1}{\ln \left[ 0,02 * l \frac{50,1}{1,4} + 0,05 * l \frac{50ml}{1,5} + 0,78 * l \frac{50,1}{1,7} \right]} = 1,56$$

Для режиму II та III розрахунки аналогічні.

$$n_{II} = \frac{50,1}{\ln \left[ 0,05 * l \frac{50,1}{1,4} + 0,10 l \frac{50,1}{1,5} + 0,20 l \frac{50,1}{1,6} + 0,65 * l \frac{50,1}{1,7} \right]} = 1,52$$

$$n_{III} = \frac{50,1}{\ln \left[ 0,25 \left( l \frac{50,1}{1,4} + l \frac{50,1}{1,5} + l \frac{50,1}{1,6} + l \frac{50,1}{1,7} \right) \right]} = 1,45$$

Таким чином, приведений коефіцієнт запасу міцності по несучій здатності конструкції має найбільше значення для режиму I, де доля перенавантаженої ділянки найменша.

### Задача 9.15.

*В умовах задачі 9.10. визначити ймовірність безвідмовної роботи конструкції, якщо варіація несучої здатності  $v_R=0,1$ , а варіація навантаження на всіх ділянках  $v_{F1}=v_{F2}=v_{F3}=v_{F4}=0,15$*

Розв'язок.

Ймовірність безвідмовної роботи ( $P \geq F$ ) для випадку нормального розподілу навантаження  $F$  та несучої здатності  $R$  знайдемо звичним способом, визначивши квантиль нормального розподілу:

$$U_p = -\frac{\bar{n}_i - 1}{\sqrt{(\bar{n}_i V_R)^2 + V_F^2}};$$

$$U_{P1} = -\frac{1,56 - 1}{\sqrt{(1,56 * 0,1)^2 + 0,15^2}} = -2,587 \quad P_1 = 0,995$$

$$U_{P2} = -\frac{1,52 - 1}{\sqrt{(1,52 * 0,1)^2 + 0,15^2}} = -2,435 \quad P_2 = 0,993$$

$$U_{P3} = -\frac{1,45 - 1}{\sqrt{(1,45 * 0,1)^2 + 0,15^2}} = -2,156 \quad P_3 = 0,984$$

### Задача 9.16.

*Робочий цикл конструкції складається з трьох ділянок:*

$$T_1 = 500^\circ\text{C} \quad \alpha_1 = 0,05$$

$$T_2 = 300^\circ\text{C} \quad \alpha_2 = 0,15$$

$$T_3 = 20^\circ\text{C} \quad \alpha_3 = 0,30$$



**Рис. 9.16**

**Робоче навантаження  $\sigma_0=340$ (МПа).  
Випробовування матеріалу конструкції дали:**

$$\sigma_{B1}=350 \text{ МПа}; \quad \delta_1=27\%$$

$$\sigma_{B2}=650 \text{ МПа}; \quad \delta_2=25\%$$

$$\sigma_{B3}=670 \text{ МПа}; \quad \delta_3=24\%$$

**Визначити еквівалентний запас міцності та ймовірності безвідмовної роботи для  $V_{R1}=v_{R2}=V_{R3}=0,15$ ;  $V_F=0,1$**

*Розв'язати самостійно.*

**Задача 9.17.**

**Визначити ймовірність безвідмовної шпильки колектора, якщо тепловий режим її роботи зображено на малюнку, причому**

$$T_1=500 \text{ }^\circ\text{C} \quad L_1=0,05$$

$$T_2=400 \text{ }^\circ\text{C} \quad L_2=0,15$$

$$T_3=300 \text{ }^\circ\text{C} \quad L_3=0,80$$

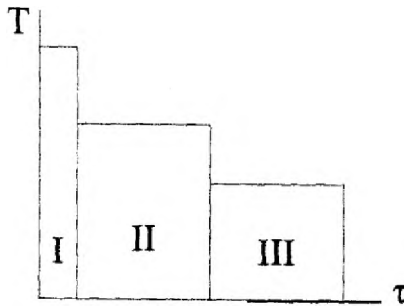


Рис. 9.17

$$\sigma_B / T_1 = 350 \text{ МПа} \quad \delta_1 = 27\%$$

$$\sigma_B / T_3 = 650 \text{ МПа} \quad \delta_3 = 25\%$$

**Робоче навантаження разом з натяжкою  $\sigma_0 = 340$  МПа**

*Для  $T \in [T_1 \dots T_3]$  прийняти лінійний закон  $\sigma_B(T)$ .*

$$v_{R1} = v_{R2} = v_{R3} = 0,1; \quad v_F = 0,15.$$

Розв'язок.

Приведемо нестационарний режим температур до еквівалентного стаціонарного. Для цього використаємо лінійне правило додавання пошкоджень:

$$\frac{t_1}{\tau_1} + \frac{t_2}{\tau_2} + \frac{t_3}{\tau_3} = 1$$

де

$$\tau_1 = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \sigma_0}{RT_1}; \quad \tau_2 = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \sigma_0}{RT_2}; \quad \tau_3 = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \sigma_0}{RT_3}$$

$$t_1 = \alpha_1 \cdot \tau_e; \quad t_2 = \alpha_2 \cdot \tau_e; \quad t_3 = \alpha_3 \cdot \tau_e$$

В свою чергу:  $\tau_e = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma\sigma_0}{RT_e}$

$\tau_e, T_e$  – час до руйнування та температура стаціонарного еквівалентного режиму.

Після підстановки:

$$\left( \exp \frac{U_0 - \gamma\sigma_0}{RT_e} \right)^* \left( \frac{\alpha_1}{\exp \frac{U_0 - \gamma\sigma_0}{RT_1}} + \frac{\alpha_2}{\exp \frac{U_0 - \gamma\sigma_0}{RT_2}} + \frac{\alpha}{\exp \frac{U_0 - \gamma\sigma_0}{RT_3}} \right) = 1$$

Звідки:

$$T_e = - \frac{U_0 - \gamma\sigma_0}{R \ln \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\exp \frac{U_0 - \gamma\sigma_0}{RT_i}}}$$

де

$$U_0 \cong RT_S \ln \frac{1}{\tau_0} \cong 8,31 * 10^{-3} * 1800 \ln \frac{1}{10^{-13}} = 448,8 \frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$$

$$\gamma \cong 1,03 \frac{U_0(1 - T/T_1)}{\sigma_B(1 + \sigma)} = 1,03 * \frac{448,8 \left( 1 - \frac{500 + 273}{1800} \right)}{350 * (1 + 0,27)} = 0,593$$

$$U_0 - \gamma\sigma_0 = 448,8 - 0,593 * 340 = 247,1 \text{кДж / моль}$$

Тоді:

$$T_{ei} = - \frac{247,1}{0,00831 * \ln \left[ \frac{0,05}{\exp \frac{247,1}{8,31 * 10^{-3} * 773}} + \frac{0,15}{\exp \frac{247,1}{8,31 * 10^{-3} * 673}} + \frac{0,80}{\exp \frac{247,1}{8,31 * 10^{-3} * 573}} \right]}$$

$$= 717,7 \text{ К } (444,3 \text{ } ^\circ\text{C})$$



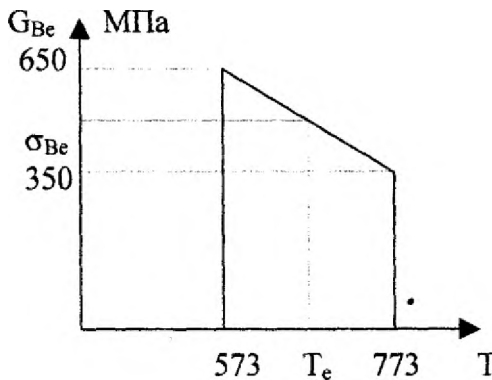


Рис. 9.18

Знайдемо  $\sigma_B$  для  $T_e$  із лінійного наближення:

$$\frac{650 - 350}{773 - 573} = \frac{\sigma_{Be} - 350}{773 - T_e}$$

Звідки:

$$\sigma_{Be} = 350 + \frac{650 * 350}{773 - 573} * (773 - 717,3) = 433,6 \text{ МПа}$$

Знаходимо коефіцієнти запасу міцності по несучій

здатності:  $\bar{n} = \frac{433,6}{340} = 1,275$

Тоді:

$$U_p = -\frac{\bar{n} - 1}{\sqrt{(\bar{n} * V_R)^2 + V_F^2}} = -\frac{1,275 - 1}{\sqrt{(1,275 * 0,1)^2 + 0,15^2}} = -1,396$$

За таблицями квантилів знаходимо:  $P(R \geq F) = 0,919$

### Задача 9.18.

*Швидкість зношування тормозних накладок автомобіля ЗАЗ-968М складає для лінійної ділянки  $0,2 \pm 0,02 \text{ мм/1000 км}$ . Визначити ймовірність відмови*

гальм для пробігу 25000 км, якщо критичним вважати зношування  $H_{\max}=4$  мм.

*Розв'язати самостійно.*

**Задача 9.19.**

Для відстані  $L=1100$  км визначити 99-процентний запас пального для автомобіля, який витрачає  $G=18\pm 1,5$ л пального на 100 км пробігу, якщо відстань  $L=1100$ км автомобіль проходить без заправки.

*Розв'язати самостійно.*

### *Литература:*

1. Решетов Д.Н., Иванов А.С., Фадеев В.З. *Надежность машин.* – М.: Высшая школа. – 1988 – 238 с.
2. Труханов В.М. *Методы обеспечения надежности изделий машиностроения.* – М.: Машиностроение. – 1995 – 304 с.
3. Кос И.И., Зорин В.А. *Основы надежности дорожных машин.* – М.: Машиностроение. – 1978. – 165 с.
4. Лукинский В.С., Зайцев Е.И. *Прогнозирование надежности автомобилей.* – Л.: Политехника. – 1991. – 224 с.
5. Костецкий Б.И. *Надежность и долговечность машин.* – Киев.: Техника. – 1975. – 408 с.
6. Барашиков А.Я., Сирота М.Д. *Надійнісь будівель і споруд.* – Київ.: ІСДО. – 1993. – 204 с.
7. Ротенберг Р.В. *Основы надежности системы "Водитель – автомобиль – дорога – среда".* – М.: Машиностроение. – 1986. – 216 с.
8. Мишуринов В.М., Романов А.Н. *Надежность водителя и безопасность движения.* – Москва: Транспорт. – 1990. – 167 с.
9. Фадеев Л.Л., Албагачиев А.Ю. *Повышение надежности деталей машин.* – М.: Машиностроение. – 1993. – 96 с.
10. Румшинский Л.З. *Элементы теории вероятностей.* – М.: Наука. – 1976. – 240 с.
11. Кузнецов Н.Д., Цейтлин В.И., Волков В.И. *Технологические методы повышения надежности деталей машин.* – М.: Машиностроение. – 1993. – 304 с.
12. Емелин М.И., Герасименко А.А. *Защита машин от коррозии в условиях эксплуатации.* – М.: Машиностроение. – 1980. – 224 с.

13. *Сопротивление материалов деформированию и разрушению* // Под редакцией В.Т.Троценко. – К.: Наук. думка – 1994. -702 с.
14. Трикозюк В.А. *Повышение надежности автомобиля*. – М.: Транспорт. – 1980. – 88 с.
15. *Прочность и долговечность автомобиля* // Под ред. Б.В.Гольда. – М.: Машиностроение. – 1974. – 328 с.
16. Иванова В.С., Шанявский А.А. *Количественная фрактография. Усталостное разрушение*. – М.:Металлургия. – 1988. – 400 с.
17. Иванова В.С., Терентьев В.Ф. *Природа усталости металлов*. – М.: Металлургия. – 1975. – 456 с.
18. Троценко В.Т., Покровский В.В., Прокопенко А.В. *Трещиностойкость металлов при циклическом нагружении*. – К.: Наук. думка. – 1987. – 256 с.
19. Остробловский В.А. *Многофакторные испытания на надёжность*. – М.: Энергия. – 1978. – 152 с.
20. Ждановский Н.С., Николаенко А.В. *Надежность и долговечность автотракторных двигателей*.- Л.: Колос.-1981.- 295 с.
21. Косточкин В.В. *Надежность авиационных двигателей и силовых установок*.- М.: Машиностроение.- 1988.- 272 с.
22. Надежность и эффективность в технике. *Справочник. В 10 т. /Ред.совет: В.С.Авдудевский (пред.) и др.*- М.:Машиностроение.-1986-1987.

## Зміст

1. Вступ до надійності . Основні поняття, визначення та характеристики.	5
1.1. Вступ до надійності.	5
1.2. Визначення показників надійності.	8
1.3. Оцінки показників надійності.	13
1.4. Класифікація відмов.	19
2. Випадкові величини та процеси в теорії надійності та закони їх розподілу.	23
2.1. Випадкові події та процеси.	23
2.2. Основні властивості ймовірностей.	26
2.3. Елементи комбінаторики.	32
2.4. Дискретні випадкові величини.	38
2.5. Елементи загальної теорії статистичних випробовувань.	41
2.6. Закони розподілу випадкових величин в теорії надійності .	58
2.6.1. Нормальний розподіл .	58
2.6.2. Експоненційний розподіл.	61
2.6.3. Нормально-логарифмічний розподіл.	63
2.6.4. Розподіл Вейбулла.	65
2.6.5. Розподіл Пуассона.	67
2.6.6. Біноміальний розподіл.	67
3. Забезпечення надійності технічних систем.	69
3.1. Поняття надійності технічної системи.	69
3.2. Методи прогнозування надійності технічних систем.	73
3.3. Ймовірність безвідмовної роботи за заданим критерієм.	76
3.3.1. Ймовірність безвідмовної роботи за критерієм міцності.	83
3.3.2. Ймовірність безвідмовної роботи при механічному зношуванні.	84
3.3.3. Випадок кількох параметрів.	84
3.4. Визначення показників надійності послідовної системи при нормальному розподілі навантаження.	89
3.5. Забезпечення надійності на стадії проектування машини.	95
4. Термоактиваційний аналіз руйнування в теорії надійності.	98
4.1. Теоретичне визначення енергії активації.	100
4.2. Стійкість енергії активації та явище автотемпературності.	103
4.3. Аналітичні оцінки активаційного об'єму.	107
4.4. Прогнозування довготривалої міцності та показників надійності в умовах складного температурно-силового навантаження натурних конструкцій.	114
4.5. Про єдині криві довготривалої міцності.	117
4.6. Термоактивний аналіз руйнування в умовах циклічного навантаження.	120

5. Забезпечення надійності машин при наявності корозії.	124
5.1. Кінетика росту товщини плівки.	129
5.2. Оцінка небезпечних наслідків корозійних ефектів.	135
5.3. Кінетика електродімічної корозії.	141
5.4. Чинники, що впливають на корозію.	144
5.5 Сучасні методи боротьби з корозією в умовах конструювання, експлуатації та ремонту машин.	151
6. Забезпечення надійності машин при зношуванні.	157
6.1. Стан поверхні деталей та надійність машин.	157
6.2. Види зношування при терті.	164
6.3. Кількісні оцінки зношування та підвищення надійності машин.	169
6.4 Методи експериментального вимірювання зношування.	173
6.5. Шляхи підвищення стійкості проти зношування.	175
7. Забезпечення надійності машин в умовах циклічних навантажень.	177
7.1. Основні терміни та визначення.	180
7.2. Методи визначення характеристик втоми.	181
7.3. Інженерні методи визначення характеристики втоми.	182
7.4. Вплив концентрації напруг та виду навантаження.	187
7.5. Шляхи підвищення надійності машин при циклічних навантаженнях.	197
8. Надійність машин за наявності тріщин.	199
8.1. Вступ до кінетики тріщин.	199
8.2. Пружно-деформований стан в вершині тріщини.	206
8.3. Експериментальні методи дослідження та дефектоскопії тріщин в задачах надійності машин.	213
8.4. Узагальнений алгоритм визначення періодичності оглядів елементів конструкцій, що можуть мати тріщини втоми.	238
9. Експлуатаційна надійність систем та вузлів машини.	242
9.1 Накопичення інформації про надійність машин	243
9.2. Вібраакустична діагностика і надійність машин.	254
9.3. Діагностичний контроль зношування на основі спектрального аналізу оливи.	262
9.4. Вплив регулювань на показники надійності двигунів в умовах експлуатації.	265
9.5. Прогнозування залишкового ресурсу.	266
Література.	295

**Іван Григорович Грабар**

## **Основи надійності машин**

Навчальний посібник

Редактор  
Технічний редактор  
Комп'ютерний набір та верстка  
Макетування

*Кравченко М.А.  
Лисогор О.І.  
Одікадзе Л.О.  
Андрейчиков В.Л.  
Глушенко Т.П.  
Кондратенко В.В.*

---

Підписано до друку 25.12.98 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.  
Гарнітура Петербург. Ум. друк. арк. 18,7. Ум. відб. арк. 18,7.  
Тираж 200 прим. Зам. 694.

---

Редакційно-видавничий відділ  
Житомирського інженерно-технологічного інституту  
262005, м. Житомир, вул. Черняхівського, 103