Міністерство освіти і науки України
Житомирський державний технологічний університет

Кафедра автомобілів
і механіки технічних систем

І.Г.ГРАБАР
О.І.ГРАБАР

ФРАКТАЛИ І ТЕНЗОРИ В НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Навчальний посібник

Житомир – 2007

Навчальний посібник „ФРАКТАЛИ І ТЕНЗОРИ В НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ” підготовлено для самостійної роботи магістрантів інженерних спеціальностей.

Автори: д.т.н., проф. .**Грабар Іван Григорович**,
викладач **Грабар Ольга Іванівна** – Житомир, ЖДТУ. – 69 с.

Рецензенти: д.ф.-м.н., проф.. Москвін П.П..
д.ф.-м.н.,проф.. Михайленко В.В.

Затверджено на засіданні кафедри АіМТС
Протокол № 7 від 04.01.2007 р.

Навчальне видання

І.Г.ГРАБАР
О.І.ГРАБАР

ФРАКТАЛИ І ТЕНЗОРИ В НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Навчальний посібник видано редакційно-видавничим відділом
Житомирського державного технологічного університету

Комп’ютерний набір і верстка: Армєєва Є.П.
Оригінал-макет виготовлено і віддруковано на кафедрі А і МТС ЖДТУ
10005, м.Житомир, вул.Черняховського, 103, кім.234

Передмова

Серйозною перешкодою у вивченні сучасних досягнень в області прикладних інженерних досліджень є недостатня математична підготовка випускників вищих навчальних закладів, і особливо - в розділах нелінійних диференційних рівнянь, статистичного моделювання, перетворення лінійних просторів, векторного і тензорного аналізу. З даних розділів у магістрантів, як правило – фрагментарні знання. В той же час аналіз напружено-деформованого стану, кінематики і динаміки руху твердого тіла в просторі, електротермічні, електромеханічні ефекти, п'єзо- та піроелектричний ефекти, кінематика сучасних роботів, так як і створення нових матеріалів (особливо - пористих) для забезпечення потреб машинобудування, будівельної індустрії, мікробіології, медицини тощо неможливе без елементарних знань тензорного аналізу та уявлень про фрактали.

Дана робота присвячена вивченню інтегральних та локальних польових характеристик мікро неоднорідних середовищ з позиції фракталів та тензорного аналізу. Особливо актуальна ця задача, коли до традиційних вимог міцності, тріщиностійкості, довговічності, стійкості проти зношування, корозії добавляється низка нових вимог, і перш за все – це формування пористості заданої структури.

Посібник розрахований на магістрантів інженерних спеціальностей ВНЗ та може бути корисним інженерам і науковцям, що вивчають суміжні проблеми.

Автори.

РОЗДІЛ 1. Вступ до скалярів, векторів і тензорів

Ненаправлені фізичні величини будемо називати скалярами. Такі величини характеризуються тільки одним числом, які будемо називати скалярною мірою.

Приклади: густина, температура, маса, кількість овець в отарі, кількість автомобілів на стоянці.

В даному розділі скаляри доцільно називати тензорами нульового рангу.

На відміну від скалярів існує інший тип фізичних величин – вектори, які характеризуються скалярною мірою (модулем) і напрямком.

Приклади: переміщення (куди і наскільки), швидкості, прискорення, сили тощо.

Таким чином, вектор $\vec{p}$ в n-мірному просторі $OX_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ можна задати

$$\left\{ Mod\left|\vec{p}\right|;\ \alpha_1;\ \alpha_2; \ldots \alpha_{n-1} \right\}, \tag{1}$$

де $Mod\left|\vec{p}\right|$ – модуль вектора, $\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ – кути, утворені вектором $\vec{p}$ з координатними осями Ox_1; $Ox_2 \ldots Ox_n$.

Іншим способом можна задати вектор $\vec{p}$ через n його координат:

$$\vec{p}\left\{ p_{x_1};\ p_{x_2}; \ldots p_{x_n} \right\}, \tag{2}$$

де $p_{x_1};\ p_{x_2}; \ldots p_{x_n}$ – проекції даного вектора $\vec{p}$ на відповідні координатні осі базиса $Ox_1x_2x_3 \ldots x_n$. (1) і (2) – 2 еквівалентних способи задання вектора $\vec{p}$, так як

$$\begin{cases} P_{x_1} = Mod\left|\vec{p}\right| \cdot \cos\left(\bar{p} \wedge Ox_1\right) \\ P_{x_2} = Mod\left|\vec{p}\right| \cdot \cos\left(\bar{p} \wedge Ox_2\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{x_n} = Mod\left|\vec{p}\right| \cdot \cos\left(\bar{p} \wedge Ox_n\right) \\ Mod\left|\vec{p}\right| = \sqrt{p_{x_1}^2 + p_{x_2}^2 + \ldots p_{xn}^2} \end{cases} \tag{3}$$

Алгебра векторів вивчається в векторному аналізі, окремими положеннями якого ми будемо користуватись в подальшому.

В даному розділі доцільно вектори називати тензорами першого рангу.

1.1. Картезіанські (ортогональні) системи координат

Для введення поняття тензора зручно скористатись картезіанськими (де–Картовими) системами відліку. Їх особливість в тому, що всі базисні вектори – одиничної довжини і попарно ортогональні. Базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ будемо називати ортами. Скалярний добуток будь-якого орта на себе дорівнює 1, а на будь-який інший орт – нулю, або

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} \tag{4}$$

де δ_{ik} – символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{5}$$

1.2. Лінійні перетворення

Нехай в просторі R^3 задано деякий ортонормований базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Розкладемо довільний вектор $\vec{X}$ по осям цього базису.

$$\vec{X} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i \tag{6}$$

Введемо в просторі R^3 лінійне перетворення A таке, що

$$\vec{U} = A\vec{x} \tag{7}$$

Розкладемо вектор $\vec{U}$ в базисі $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\vec{U} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\vec{e}_i \tag{8}$$

Спробуємо визначити залежність між координатними векторів $\vec{U}$ та $\vec{X}$.

Оскільки перетворення A – лінійне, то:

$$A\vec{x} = A\left(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3\right) = x_1\left(A\vec{e}_1\right) + x_2\left(A\vec{e}_2\right) + x_3\left(A\vec{e}_3\right) \tag{9}$$

Розклавши вектори $A\vec{e}_1;\ A\vec{e}_2;\ A\vec{e}_3$ по осям базиса $\left(\vec{e}_1\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3\right)$, будемо мати

$$\begin{aligned} A\vec{e}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3 \\ A\vec{e}_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3 \\ A\vec{e}_3 &= a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{10}$$

Після підстановки (10) в (9) отримаємо:

$$A\vec{x} = x_1\left(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3\right) + x_2\left(a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3\right) + \tag{11}$$

$$+x_3\left(a_{31}\vec{e}_1+a_{32}\vec{e}_2+a_{33}\vec{e}_3\right)=\left(a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3\right)\vec{e}_1+$$
$$+\left(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3\right)\vec{e}_2+\left(a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3\right)\vec{e}_3$$

Прирівнявши (8) і (11), маємо

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

(12) дає можливість визначити координати вектора $\vec{U}$, зв'язаного з вектором $\vec{X}$ лінійним перетворенням (7)

Тоді

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{13}$$

будемо називати матрицею (оператором) лінійного перетворення двох векторів, або тензором другого рангу. Як видно із (12), $rng\left(\vec{u}\right)=1$, $rng\left(\vec{x}\right)=1$, $rng\left(A\right)=2$, тобто ранги тензорів складаються: $rng\left(A\right)=rng\left(\vec{u}\right)+rng\left(\vec{x}\right)$.

Для n–вимірного простору R^n лінійне перетворення $\vec{U}=A\vec{x}$, коли задано базис $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n\right\}$ матиме вигляд

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Наведемо приклади лінійних перетворень:

а) тотожне перетворення

$$\vec{U}=E\vec{X}=\vec{X}\,. \tag{15}$$

Тоді в (12) – (14) матриця (оператор) тотожного перетворення повинна мати вид:

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0. & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

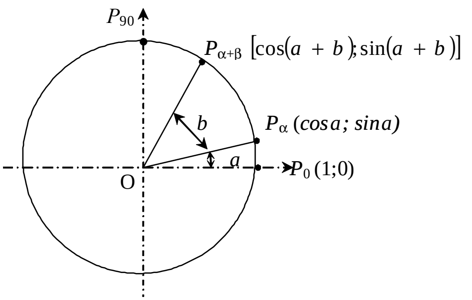
б) для подібного (пропорційного) перетворення

$$\vec{U} = A\vec{X} = \lambda\vec{X}\ . \tag{17}$$

Матриця перетворення повинна мати вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0. & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Для наших подальших викладок важливе місце матиме лінійне перетворення координат векторів (компонент тензорів) при повороті ортонормованогобазису.



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Наведені виклади дозволяють ввести поняття тензора, як лінійного перетворення $\vec{U} = A\vec{x}$ в ортонормованих базисах (12)–(14) в n – мірному просторі R^n.

В подальшому найчастіше ми будемо використовувати дії над тензорами для повороту ортонормованого базису в задачах про механічне деформування анізотропних середовищ (кристалів, фракталів, композитів), в задачах динаміки твердого тіла з однією закріпленою точкою (тензор інерції), в задачах про теплові і електричні ефекти в анізотропних середовищах тощо (див. рис. 1).

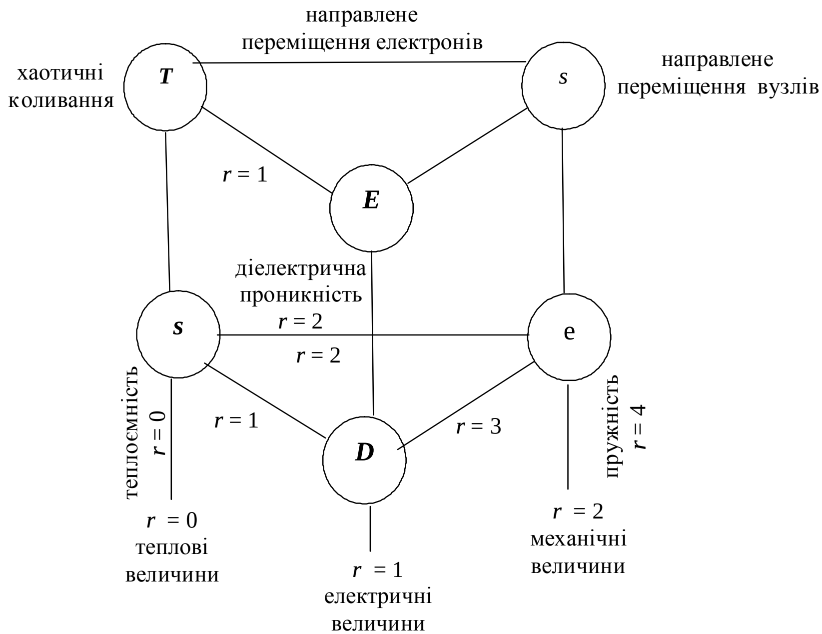
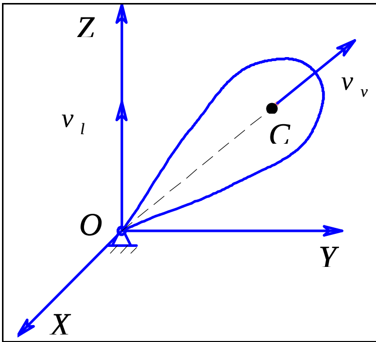


Рис. 1. Співвідношення між тензорами теплоти, електричних і механічних величин:
s – ентропія; T – температура; D – індукція; E – напруженість поля; ε – деформації;
s – механічні напруги.

Тензор інерції.



При вивченні руху твердого тіла з однією закріпленою точкою O в загальному виді зручно розкласти цей рух на два – відносний навколо миттєвої осі OC з кутовою швидкістю $\vec{W}_v$ та переносний разом з віссю OC навколо нерухомої осі OZ з кутовою швидкістю $\vec{W}_e$.

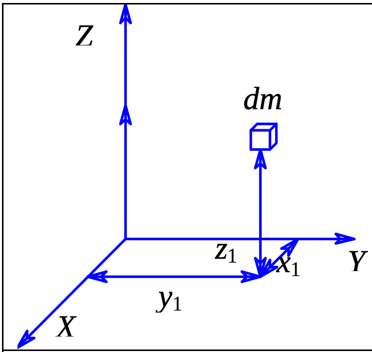


Рис.2.

Виділимо в даному тілі елемент dm з координатами $(x,\ y,\ z)$ і визначимо моменти інерції цього елемента відносно координатних осей.

$$I_{xx} = \int\limits_{(K)} \left(y^2 + z^2\right) dm$$

$$I_{yy} = \int\limits_{(K)} \left(x^2 + z^2\right) dm$$

$$I_{zz} = \int\limits_{(K)} \left(x^2 + y^2\right) dm$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int\limits_{(K)} xy\, dm$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\int\limits_{(K)} xz\, dm$$

$$I_{zy} = I_{yz} = -\int\limits_{(K)} zy\, dm$$

Тоді повний тензор інерції тіла можна записати:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Тоді кінетична енергія тіла з однією закріпленою точкою

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} I_{ij} W_i W_j$$

або в тензорному вигляді

$$T = \frac{1}{2}\vec{W}\, I\, \vec{W}\,.$$

Задачі для самостійної роботи:

1. Знайти компоненти тензора інерції вважаючи, що тіла однорідні, масою m і центр обертання співпадає з центром інерції:

1.1. Тонкого стержня довжиною l;

1.2. Тонкого диска радіуса R;

1.3. Прямокутної пластинки зі сторонами a і b;

1.4. Кулі радіуса R;

1.5. Круглого циліндра радіуса R і висоти h;

1.6. Прямокутного паралелепіпеда $a \times b \times c$

2. Знайти компоненти тензора інерції тіл масою m:

2.1. Стержня довжиною l, закріпленого за край;

2.2. Кулі R, закріпленої за точку на поверхні;

2.3. Циліндра радіуса R і висоти h, закріпленого в центрі однієї з основ;

2.4. Ломаного стержня (рис.3) $ABODC$, якщо $AB = BO = OD = DC$ $\alpha = \beta = 90^0$, $\left(\overrightarrow{AB},\hat{}\ \overrightarrow{DC}\right) = 90^0$.

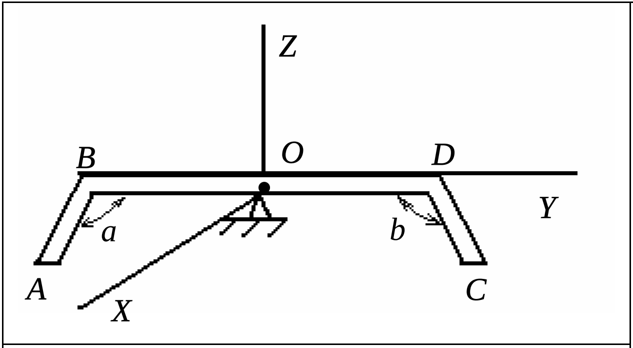


Рис.3.

РОЗДІЛ 2. Моделювання мікродеформацій перколяційно-фрактальних середовищ

2.1.Допущення моделі.

1.На макрорівні перколяційно-фрактальне середовище представляємо пружним квазіізотропним контініумом, що описується законом Гука.
2.Локальні об'єми будемо вважати пружними тілами Серпинського класу [111] різного рівня фрактальності.
3.Усереднене значення рівня фрактальності визначаємо із умови усередненої пористості та усереднених пружних характеристик.
4.На межі між сусідніми локальними об'ємами має місце ідеальне з'єднання та відсутня концентрація напруг і деформацій.

2.2.Класифікація тіл Серпинського та самоподібність в закономірностях жорсткості та пружності фрактальних та фрактально-перколящйних систем.

При моделюванні властивостей пористих матеріалів: керамік, ультрадисперсних, пористих та аморфних матеріалів спробуємо скористатись уявленнями структур з дробною (нецілою) метрикою. На наш погляд, саме використання фрактальних та квазіфрактальних структур в сучасних конструкціях (ТРГ, збурені бетони, кераміки, конструкційні матеріали з періодичними та квазіперіодичними пустотами, перколяційні дво- та багатокомпонентні суміші, метали на стадії передруйнування і т.д.) вимагає розвитку аналітичного та комп'ютерного моделювання характеристик жорсткості, пружності та міцності таких структур.

Фракталом будемо називати структуру з дробовою розмірністю простору $D(m_1 < D < m_2)$ такою, що об'єм даної структури в просторі R^{m_2} :

$V_{R_{m_2}} \Rightarrow 0, де\, R^{m_1}\, та\, R^{m_2}$ - метричні простори з цілою розмірністю.

Тоді для квазіфрактала $(m_1 < D < m_2)$ $V_{R_{m_2}} \Rightarrow C$, де С - деяка константа.

Найчастіше із ідеальних фрактальних структур використовуєтьсямножина Кантора та його дво- (килим Серпинського) та тривимірна модифікація (рис.4).

Для всіх фракталів сімейства рис.4, якщо характерний розмір початкової (затравочної) множини дорівнює L (нульовий рівень фрактальності), то на першому рівні фрактальності тіло, що відкидається, має характерний розмір

$$L_* \le \frac{L}{3} \qquad (1)$$

Коли в (1) виконується рівняння, то маємо фрактал, коли нерівність - квазіфрактал. Хай найбільша із пустот в фракталі має розмір *Lmax,* найменша - *Lmin* і при цьому виконується умова самоподібності, $L_{i+1} = G \cdot L_i$, то

$$L_{\min} = G^{j-1} \cdot L_{\max} \qquad (2)$$

звідки рівень фрактальності можна знайти із співвідношення

$$j = 1 + \frac{\ln \frac{L_{\min}}{L_{\max}}}{\ln G} \qquad (3)$$

Для розрахунків жорсткості та пружності розглянемо фрактал Серпинського як багатоступеневий стержень (рис.5). Як видно із рис.5, еквівалентний багатоступеневий стержень миє одну границю (праву) фрактальну. При цьому затравочний фрактал у вигляді прямокутного імпульса (j=1) перетворюється не за класичними законами самоподібного росту фракталів, а має свої специфічні відмінності:

- нові елементи утворюються тільки на вертикальних відрізках затравочного фрактала;
- глибина новоутворень залежить від рівня фрактальності;
- в напрямку вертикальної осі

$$L_{jy} = L_{1y} (\frac{2}{3})^j$$

В цілому кінетика розвитку еквівалентного стержня, як функція рівня фрактальності (рис.5), схожа на розвиток окупаційної перколяції. Дослідимо детальніше її кінетику.

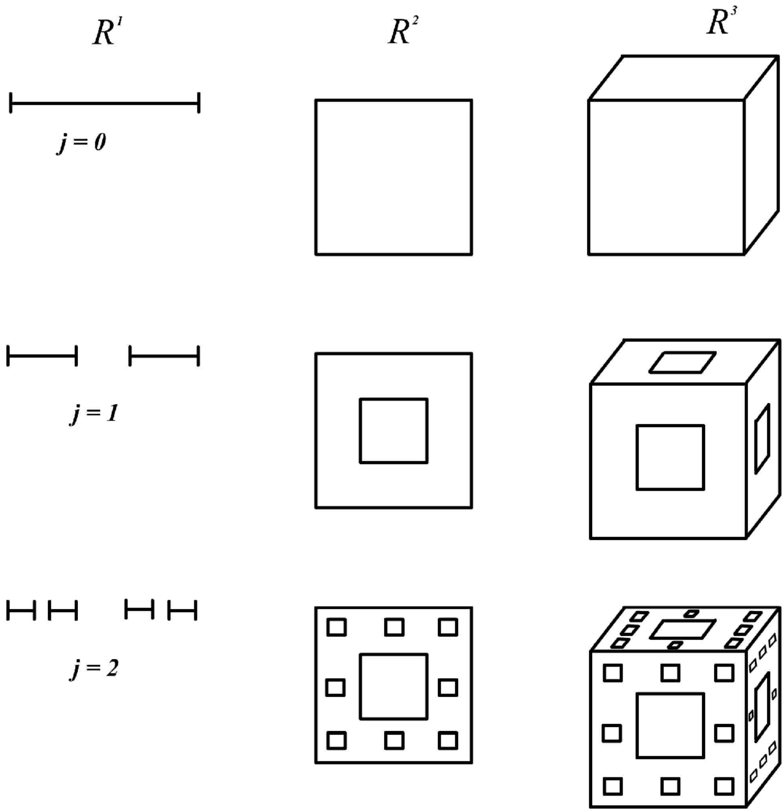


Рис.4. Одно- дво- та трьохмірні множини Серпинського

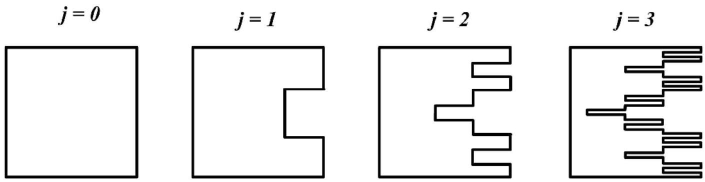


Рис.5. Заміна килима Серпинського ступінчастим стержнем.

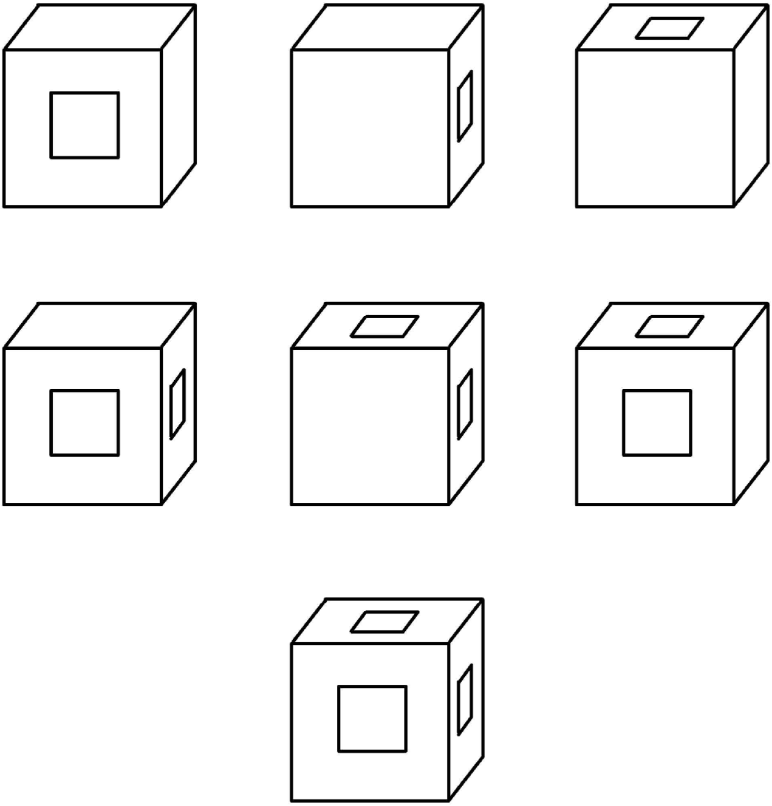


Рис.6. Класи тіл Серпинського та їх позначення:
а) [100] [010] [001];
б) [110] [011] [101];
в) [111]

Прослідкуємо за розподіленням довжин l_j по площах F_j еквівалентного стержня, що буде потрібно при оцінці характеристик жорсткості та пружності.

Нульовий рівень фрактальності (j = 0): $F_{00} = 1$; $l_{oo} = 1$

Перший рівень фрактальності (j = 1):

$$F_{10} = 1; \quad l_{1o} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$F_{11} = \frac{2}{3}; \; l_{11} = \frac{1}{3}$$

Другий рівень фрактальності (j = 2):

$$F_{20} = 1; \quad l_{20} = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

$$F_{21} = \frac{2}{3}; \; l_{21} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

$$F_{22} = \frac{4}{9}; \; l_{22} = \frac{1}{9}$$

Третій рівень фрактальності (j = 3)

$$F_{30} = 1; \quad l_{30} = \frac{1}{9} - \frac{4}{27} = \frac{8}{27}$$

$$F_{31} = \frac{2}{3}; \; l_{21} = \frac{4}{9} - \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{12}{27}$$

$$F_{32} = \frac{4}{9}; \; l_{32} = \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{4}{27} = \frac{6}{27}$$

$$F_{33} = \frac{8}{27}; \quad l_{33} = \frac{1}{27}$$

Це дозволяє сформулювати загальні принципи утворення залежності еквівалентного багатоступеневого стержня від рівня фрактальності j:

1) площі ступенів складають геометричну прогресію зі знаменником 2/3;

2) довжина може бути визначена по рекурентних співвідношеннях:

$$\begin{aligned} l_{j,0} &= \frac{2}{3} l_{j-1,0} \\ l_{j,0} &= \frac{2}{3} l_{j-1,i} + \frac{1}{3} l_{j-1,i-1} \end{aligned} \tag{4}$$

Отримані значення F_{ij} та l_{ij} заміни фрактала Серпинського еквівалентним багатоступеневим стержнем дозволяють записати співвідношення для визначення площі (об'єму) та деформації еквівалентного стержня після j-го рівня фрактальності:

$$S_j = \sum_{i=0}^{j} F_{ji} \cdot l_{ij}$$
$$\Delta j = \sum_{i=0}^{j} \frac{p \cdot l_{ji}}{E \cdot t \cdot F_{ji}} = \frac{p}{Et} \sum_{i=0}^{j} \frac{l_{ji}}{F_{ji}} \qquad (5)$$

Співідношення (5) з урахуванням (4) дозволяє в загальному вигляді отримати залежності площі та пружної деформації еквівалентного ступінчатого стержня (рис.5), як функції рівня фрактальності j:

$$\frac{S_j}{S_0} = \left(\frac{8}{9}\right)^j \qquad (6)$$

$$\frac{\Delta_j}{\Delta_0} = \left(\frac{7}{6}\right)^j \qquad (7)$$

Із (7) слідує співвідношення для приведеного модуля пружності:

$$\frac{E_j}{E_0} = \left(\frac{6}{7}\right)^j \qquad (8)$$

Підставимо в (6) $S_j = S_0 - S'$, де .S' - площа пустот (в загальному випадку - доля примісної компоненти). Тоді:

$$\frac{E}{E_0} = (1-q)^{\nu E} \qquad (9)$$

Де $q = \dfrac{S'}{S_0}$ - питома доля примісної компоненти (пустот),

$$\nu_E = \frac{\ln\frac{7}{6}}{\ln\frac{9}{8}} \approx 1{,}3087\ldots$$

(9) в повній мірі відповідає співвідношенням для критичних явищ, що досить добре вивчені в перколяційних моделях, в тому числі - і при дослідженні пружних властивостей .

В повній відповідності з випадком R^2 отримані співвідношення (6) - (9) для простору R^3 (рис.6). Для всіх цих випадків отримано:

$$\frac{E_j}{E_0} = (n_{\ln k})^j \tag{10}$$

Зобразимо значення $n_{\ln k}$ у вигляді матриці:

$$\begin{bmatrix} n_{100} & n_{011} & n_{111} \\ n_{010} & n_{101} & n_{111} \\ n_{001} & n_{110} & n_{111} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{4}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{6}{7} & \frac{4}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{9} & \frac{12}{17} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Нами пропонується спроба побудувати матричну механіку фракталів для випадку довільної орієнтації фрактала, що дозволяє побудувати точні кількісні співвідношення між константами (11), як для часткових випадків загальної задачі.

Для всіх випадків (11), як і в випадку R^2, побудованізалежності модуля пружності від долі пустот (включень). Дані залежності також мають вигляд, характерний для критичних явищ:

$$\frac{E}{E_0} = (1 - q_v)^{v \ln k} \tag{12}$$

де $v_E = \dfrac{\ln G_{\ln k}}{\ln V_{\ln k}}$

Наприклад, для $n_{111} = \dfrac{2}{3}$ *та* $V_{111} = \dfrac{20}{27}$

$$\frac{E}{E_0} = (1 - q_v)^{1,35107} \tag{13}$$

2.3. Мікронапружений стан анізотропного локального об'єму перкераміки в квазізотропному макрооб'ємі (наближення для тіла Серпинського класу [111]).

Як вказано в допущеннях моделі, мікронапружений стан анізотропного локального об'єму (тіла Серпинського класу [111]) будемо розглядати, як елемент в квазіізотропного макрообєму ГАП-перкераміки

.

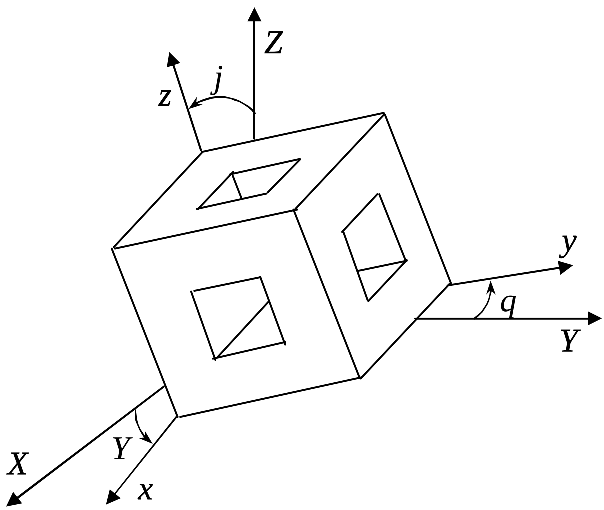


Рис. 7 Об'ємний фрактал Серпинського [111], починаючи з j = 1, є анізотропним.

Оскільки для фрактала Серпинського класу [111] є три рівнозначних площини пружної симетрії, то в даному випадку можна говорити про ортотропну анізотропію.

У випадку, коли площини пружної симетрії співпадають з координатними площинами нерухомого базису *OXУZ*, співвідношення між пружними деформаціями на напругами можна записати у вигляді:

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -m_{yx}/E_y & -m_{zx}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -m_{xy}/E_x & 1/E_y & -m_{zy}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -m_{xz}/E_x & -m_{yz}/E_y & 1/Ez & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zx} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ t_{yz} \\ t_{xz} \\ t_{xy} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

у випадку кубічної симетрії (фрактала Серпинського) [111] маємо:

$$\begin{array}{l} C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} \\ C_{1122} = C_{2323} = C_{3311} \\ C_{1212} = C_{2323} = C_{3131} \end{array}. \tag{15}$$

Що дозволяє записати

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{E_x} = \frac{1}{E_y} = \frac{1}{E_c} = S_{11} \\ -\frac{m_{xy}}{E_x} = -\frac{m_{yz}}{E_y} = -\frac{m_{zx}}{E_z} = S_{12} \\ \frac{1}{G_{xy}} = \frac{1}{G_{yz}} = \frac{1}{G_{zx}} = S_{44} \end{array}\right\}. \tag{16}$$

Тоді

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{xz} \\ e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{44} & 0 \\ & & & & & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ t_{yz} \\ t_{xz} \\ t_{xy} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Ще раз підкреслимо, що (17) справедливо лише для фракталу Серпинського класу [111] (рис. 7), для якого в кожному з напрямків [*hkl*] рівні фрактальності співпадають:

$$j_h = j_k = j_l\ . \tag{18}$$

В інших випадках, коли фрактал Серпинського класу [100]; [010]; [001]; [110]; [101]; [011], чи рівні фрактальності

$$j_h \neq j_k \neq j_l \,,$$

співвідношення між деформаціями і напругами у випадку, коли площини пружної симетрії співпадають з площинами нерухомого базису *OXYZ*, має вигляд (14).

Для випадку, коли рухомий базис *OXYZ*, зв'язаний з площинами пружної симетрії ортотропного тіла Серпинського, повернутий відносно нерухомого базису *OXYZ* на кути Ейлера, скористаємось відповідними перетвореннями тензорів.

2.4. Оцінка неоднорідності напруженого стану локальних об'ємів мікро анізотропного середовища

Існуючі методи розрахунку використовуються, як правило, для ідеальних середовищ: ізотропного чи анізотропного, реальна ж ГАП-перкераміка має мікроструктуру. Пружні властивості локального об'єму , завдяки впорядкованій будові, мають виражену анізотропію.

2.4.1.Перетворення тензора пружних констант для ортотропних тіл.

Будемо вважати, що локальні об'єми в квазіізотропному макрооб'ємі орієнтовані хаотично і усереднені значення мікронапруг співпадають з макронапругами тільки в тому випадку, коли мікронапруги задані не в випадковій системі координат локального об'єму, а приведені до єдиного нерухомого базису макрооб'єму.

Нехай кристалографічний базис **Oxyz** повернуто відносно нерухомого базису **OXYZ** (рис.4) на кути q, j, y . При чому q - кут повороту відносно осі 0X, y - відносно осі 0У, j - відносно осі 0Z. Для даних поворотів використані оператори:

$$B_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q & -\sin q \\ 0 & \sin q & \cos q \end{bmatrix} \qquad (19)$$

$$B_y = \begin{bmatrix} \cos y & 0 & -\sin y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin y & 0 & \cos y \end{bmatrix} \qquad (20)$$

$$B_z = \begin{bmatrix} \cos j & -\sin j & 0 \\ \sin j & \cos j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

Послідовне використання лінійних операторів (15) – (17) дозволяє отримати загальний оператор перетворення координат:

$$B = B_x \cdot B_y \cdot B_z = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

де:

$$l_1 = \cos(x \wedge X) = \cos y \ \cos j$$

$$l_2 = \cos(x \wedge Y) = \cos q \sin j - \sin q \cos j \ \sin y$$

$$l_3 = \cos(x \wedge Z) = \sin q \sin j + \cos q \cos j \ \sin y$$

$$m_1 = \cos(y \wedge X) = -\cos y \ \sin j$$

$$m_2 = \cos(y \wedge Y) = \cos q \cos j + \sin q \cos y \ \sin j$$

$$m_3 = \cos(y \wedge Z) = \sin q \cos j - \cos q \sin y \ \sin j$$

$$n_1 = \cos(\mathrm{z} \wedge X) = -\sin y$$

$$n_2 = \cos(\mathrm{z} \wedge Y) = -\sin q \cos y$$

$$n_3 = \cos(z \wedge Z) = \cos y \ \cos q$$

коли один з кутів, наприклад $j = 0$, то:

$$l_1 = \cos y$$

$$l_2 = -\sin q \sin y$$

$$l_3 = \cos q \sin y$$

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = \cos q$$

$$m_3 = \sin q$$

$$n_1 = -\sin y$$

$$n_2 = -\sin q \cos y$$

$$n_3 = \cos y \cos q$$

Зв’язок між мікро напругами та мікро деформаціями в рухомому базисі можна задати у вигляді:

$$s_{ij} = c_{ij} \cdot e_{ij} \tag{23}$$

Співвідношення між тензорами мікронапруг в рухомому і нерухомомубазисі можна задати:

$$s_{ij} = L_{lk} \cdot x_{ij} \tag{24}$$

а між тензорами мікро деформацій:

$$e_{ij} = F_{lk} \cdot e_{ij} \tag{25}$$

Спільне рішення (23) – (25) дозволяє отримати:

$$x_{ij} = (L_{lk}^{-1} \cdot C_{ij} \cdot F_{lk}) \cdot e_{ij} \tag{26}$$

або:

$$x_{ij} = A_{ijlk} \cdot e_{ij} \tag{27}$$

де:

$$A_{ijlk} = L_{lk}^{-1} \cdot C_{ij} \cdot F_{lk} \qquad (28)$$

а L_{lk}^{-1} i F_{lk} відповідно дорівнюють (30) і (31).

(28) є перетворенням подібності. . Результати перетворень компонент (28) представлені залежностями (32) та (33).

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{44} \end{bmatrix} \qquad (29)$$

$$L_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2m_1n_1 & 2l_1n_1 & 2l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2m_2n_2 & 2l_2n_2 & 2l_2m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2m_3n_3 & 2l_3n_3 & 2l_3m_3 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & m_3n_2 + m_2n_3 & l_3n_2 + l_2n_3 & l_2m_2 + l_2m_3 \\ l_1l_3 & m_1m_3 & n_1n_3 & m_1n_3 + m_3n_1 & l_1n_3 + l_3n_1 & l_1m_3 + l_3m_1 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & m_1n_2 + m_2n_1 & l_1n_2 + l_2n_1 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix} (30)$$

$$F_{lk} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_2l_3 & l_1l_3 & l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & m_2m_3 & m_1m_3 & m_1m_2 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & n_2n_3 & n_1n_3 & n_1n_2 \\ 2m_1n_1 & 2m_2n_2 & 2m_3n_3 & m_3n_2 + m_2n_3 & m_1n_3 + m_3n_1 & m_1n_2 + m_2n_1 \\ 2l_1n_1 & 2l_2n_2 & 2l_3n_3 & l_2n_3 + l_3n_2 & l_1n_3 + l_3n_1 & l_1n_2 + l_2n_1 \\ 2l_1m_1 & 2l_2m_2 & 2l_3m_3 & l_3m_2 + l_2m_3 & l_1m_3 + l_3m_1 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix} (31)$$

$$A_{1111}=(l_1^2c_{11}+m_1^2c_{12}+n_1^2c_{12})l_1^2+(l_1^2c_{12}+m_1^2c_{11}+n_1^2c_{12})m_1^2+$$
$$+(l_1^2c_{12}+m_1^2c_{12}+n_1^2c_{11})n_1^2+$$
$$(2m_1n_1c_{44}\cdot 2m_1n_1+2l_1n_1c_{44}\cdot 2l_1n_1+2l_1m_1c_{44}\cdot 2l_1m_1)= \quad (32)$$
$$=(c_{12}+2c_{44})+(c_{11}-c_{12}-2c_{44})(l_1^4+m_1^4+n_1^4)$$

Аналогічно:

$$A_{1122}=c_{12}+(c_{11}-c_{12}-2c_{44})(l_1^2l_2^2+m_1^2m_2^2+n_1^2n_2^2)$$
$$A_{1133}=c_{12}+(c_{11}-c_{12}-2c_{44})(l_1^2l_3^2+m_1^2m_3^2+n_1^2n_3^2)$$
$$A_{1123}=A_{3112}=(c_{11}-c_{12}-2c_{44})(l_1^2l_2l_3+m_1^2m_2m_3+n_1^2n_2n_3)$$
$$A_{1131}=(c_{11}-c_{12}-2c_{44})(l_1^3l_3+m_1^3m_3+n_1^3n_3)$$
$$A_{1112}=(c_{11}-c_{12}-2c_{44})(l_1^3l_2+m_1^3m_2+n_1^3n_2) \quad (33)$$
$$A_{2223}=(c_{11}-c_{12}-2c_{44})(l_2^3l_3+m_2^3m_3+n_2^3n_3)$$
$$A_{2222}=(c_{12}+2c_{44})+(c_{11}-c_{12}-2c_{44})(l_2^4+m_2^4+n_2^4)$$
$$A_{2231}=A_{2312}=(c_{11}-c_{12}-2c_{44})(l_1l_2^2l_3+m_1m_2^2m_3+n_1n_2^2n_3)$$
$$A_{3312}=A_{2331}=(c_{11}-c_{12}-2c_{44})(l_1l_2l_3^2+m_1m_2m_3^2+n_1n_2n_3^2)$$
$$A_{2323}=c_{44}+(c_{11}-c_{12}-2c_{44})(l_2^2l_3^2+m_2^2m_3^2+n_2^2n_3^2)$$

Представлення (32) та (33) в тензорному вигляді з врахуванням правил перетворення тензорів дозволяє записати:

$$A_{ijlk}=Q_{ijlk}+r(P_{ijkl}^X+P_{ijlk}^Y+P_{ijlk}^Z) \quad (34)$$

де $r=c_{11}-c_{12}-2c_{44}$ - коефіцієнт анізотропії, а Q_{ijlk} та $P_{ijlk}^{X,Y,Z}$ відповідно дорівнюють (35) – (35). Аналіз даних залежностей показує, що тензор пружних постійних (34) складається не з 21, а з 18 незалежних пружних постійних, тому що:

$$A_{1123}=A_{3112};\ A_{3312}=A_{2331};\ A_{2231}=A_{2312}$$

Співвідношення (27) з врахуванням (34) – (38) дозволяє визначити компоненти тензора мікронапруг в i-ому локальному об'ємі, якщо задано тензор мікродеформацій і кути зміщення рухомого базису відносно нерухомого. Дане співвідношення показує, що напружений стан локальної області завжди буде об'ємним, навіть у випадку одноосного навантаження всього макрооб'єму . З допомогою (27) будуть проаналізовані деякі ідеалізовані середовища з ціллю оцінки неоднорідності мікро напруженого і мікро деформованого стану.

$$Q_{ijlk} = \begin{bmatrix} c_{12}+2c_{44} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{12}+2c_{44} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{12}+2c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{44} \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$P^{x}_{iklj} = \begin{bmatrix} l_1^4 & l_1^2 l_2^2 & l_1^2 l_3^2 & l_1^2 l_2 l_3 & l_1^3 l_3 & l_1^3 l_2 \\ & l_2^4 & l_2^2 l_3^2 & l_2^3 l_3 & l_1 l_2^2 l_3 & l_1 l_2^3 \\ & & l_3^4 & l_2 l_3^3 & l_1 l_3^3 & l_1 l_2 l_3^2 \\ & & & l_2^2 l_3^2 & l_1 l_2 l_3^2 & l_1 l_2^2 l_3 \\ & & & & l_1^2 l_3^2 & l_1^2 l_2 l_3 \\ & & & & & l_1^2 l_2^2 \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$P^{y}_{iklj} = \begin{bmatrix} m_1^4 & m_1^2 m_2^2 & m_1^2 m_3^2 & m_1^2 m_2 m_3 & m_1^3 m_3 & m_1^3 m_2 \\ & m_2^4 & m_2^2 m_3^2 & m_2^3 m_3 & m_1 m_2^2 m_3 & m_1 m_2^3 \\ & & m_3^4 & m_2 m_3^3 & m_1 m_3^3 & m_1 m_2 m_3^2 \\ & & & m_2^2 m_3^2 & m_1 m_2 m_3^2 & m_1 m_2^2 m_3 \\ & & & & m_1^2 m_3^2 & m_1^2 m_2 m_3 \\ & & & & & m_1^2 m_2^2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$P^{z}_{iklj} = \begin{bmatrix} n_1^4 & n_1^2 n_2^2 & n_1^2 n_3^2 & n_1^2 n_2 n_3 & n_1^3 n_3 & n_1^3 n_2 \\ & n_2^4 & n_2^2 n_3^2 & n_2^3 n_3 & n_1 n_2^2 n_3 & n_1 n_2^3 \\ & & n_3^4 & n_2 n_3^3 & n_1 n_3^3 & n_1 n_2 n_3^2 \\ & & & n_2^2 n_3^2 & n_1 n_2 n_3^2 & n_1 n_2^2 n_3 \\ & & & & n_1^2 n_3^2 & n_1^2 n_2 n_3 \\ & & & & & n_1^2 n_2^2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

2.4.2. Оцінка мікронеоднорідного напруженого і деформованого стану в деяких ідеалізованих перколяційно-фрактальних середовищах.

2.4.2.1. Пружний стержень, текстурований по площині куба

Розглядається стержень одиничного перетину, що складається з окремих локальних об’ємів рис.7, довільно орієнтованих. Нехай площини {100} кожного локального об’єму суміщені з координатною площиною Y0Z нерухомого базису. Тоді:

$$y = 0;\ j = 0;\ q \in [0; 2p]$$

Нехай функція орієнтації $f(q)$ підкорюється рівноймовірному розподілу. Тоді мікродеформований стан *i*-го локального об’єму даного стержня можна визначити з співвідношення:

$$e_{ij} = A^{-1}_{ijlk} \cdot s_{ij} \quad (39)$$

де:

$$A^{-1}_{ijlk} = Q^{-1}_{ijlk} + r^{-1}(P^{X^{-1}}_{ijlk} + P^{Y^{-1}}_{ijlk} + P^{Z^{-1}}_{ijlk})$$

$$r^{-1} = S_{11} - S_{12} - 2S_{44}$$

$$Q_{ijlk}^{-1} = \begin{bmatrix} S_{12}+\frac{1}{2}S_{44} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{12}+\frac{1}{2}S_{44} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{12}+\frac{1}{2}S_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{44} & 0 \\ & & & & & S_{44} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$P_{ijlk}^{X^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$P_{ijlk}^{Y^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cos^4 q & \cos^2 q \sin^2 q & \cos^3 q \sin^3 q & 0 & 0 \\ & & \sin^4 q & \cos q \sin^3 q & 0 & 0 \\ & & & \cos^2 q \sin^2 q & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$P_{ijlk}^{Z^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \sin^4 q & \sin^2 q\cos^2 q & -\sin^3 q\cos q & 0 & 0 \\ & & \cos^4 q & -\sin q\cos^3 q & 0 & 0 \\ & & & \sin^2 q\cos^2 q & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Мікродеформація в напряму осі 0Z в *i*-му локальному об’ємі дорівнює:

$$e_{zz} = A_{333}^{-1} s_z = [(S_{12} + \frac{1}{2}S_{44}) + (S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44})(\sin^4 q + \cos^4 q)]s_z \quad (44)$$

Середнє значення деформації дорівнює:

$$\bar{e}_{zz} = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} e_{zz}\,dq \quad (45)$$

Після інтегрування (43) з врахуванням (42) отримано:

$$\bar{e}_{zz} = [(S_{12} + \frac{1}{2}S_{44}) + \frac{3}{4}(S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44})] \cdot s_z \quad (46)$$

Оцінимо граничні значення коефіцієнта варіації мікродеформацій в неструктурованомуматеріалі.

2.4.2.2. Нетекстурований пружний стержень одиничного перерізу

Даний приклад, як і попередній, є ідеалізованим. Але в цьому прикладі обмеження текстурування відсутні. Умови навантаження аналогічні – одновісний розтяг в напрямку осі 0Z. Тоді:

$$e_{zz} = [(S_{12} + \frac{1}{2}S_{44}) + (S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44})(l_3^4 + m_3^4 + n_3^4)] \cdot s_z \quad (47)$$

з врахуванням (25):

$$e_{zz} = [(S_{12} + \frac{1}{2}S_{44}) + (S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44})(\cos^4 q\sin^4 y + \sin^4 q + \cos^4 q\cos^4 y)] \cdot s_z \quad (48)$$

Усередненезначення деформації для даного випадку рівне:

$$\tilde{\varepsilon}_{zz} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon_{zz}\,d\theta\,d\psi \tag{49}$$

Виконавши інтегрування в даному випадку з врахуванням (47), отримано:

$$\tilde{\varepsilon}_{zz} = [(S_{12} + \frac{1}{2}S_{44}) + (S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44})\cdot\frac{21}{32}]\cdot\sigma_z \tag{50}$$

Дані результати можуть слугувати для оцінки граничних відхилень мікро деформацій від середніх при розтягненні полікристалічних зразків.

Для визначення пружних податливостей скористаємось даними для апатиту
E = 153 ГПа; G = 63,8 ГПа; $\mu = 0{,}199$.
Це дозволяє для рівня фрактальності ϑ = 0 визначити:

$S_{11} = \frac{1}{E} = 6{,}54\cdot 10^{-12}$ Па $^{-1}$;

$S_{12} = -\frac{\mu}{E} = -1{,}300\cdot 10^{-12}$ Па $^{-1}$;

$S_{44} = \frac{1}{G} = 1{,}56\cdot 10^{-11}$ Па $^{-1}$.

Для фракталу Серпинського класу [111] рівня фрактальності ϑ, враховуючи, що

$$\frac{E_\varphi}{E_0} = (\nu_{111})^\varphi = \left(\frac{2}{3}\right)^\varphi.$$

2.5. Вплив рівня фрактальності на коефіцієнт Пуассона фрактала Серпинського. Лінійне наближення

Як слідує із перетворення тензора пружних податливостей (44) – (50), для стержня ГАП-перкераміки одиничного перетину, зібраного із тіл Серпинського класу [111] і текстурованих по площині куба можна оцінити діапазон мікродеформацій як функцію рівня фрактальності та кутів орієнтації мікрооб'єму.
Далі необхідно в співвідношеннях (44) і (48) визначити екстремальні значення функції орієнтації, щоб визначити $\varepsilon_{zz}^{\min}$ і $\varepsilon_{zz}^{\max}$.

Для (44) функцію орієнтації:

$$f = \sin^4\theta + \cos^4\theta\ , \tag{51}$$

дослідимо на екстремум

$$\frac{df}{dq} = 4\sin^3 q \cos q - 4\cos^3 q \sin q = 4\sin q \cos q \left(\sin^2 q - \cos^2 q\right) = \quad (52)$$
$$= 2\sin 2q \left(-\cos 2q\right) = -\sin 4q = 0$$

Звідки

$$\begin{cases} 4q = p \\ 4q = 0 \end{cases}. \quad (53)$$

Або:

$$q_1 = 0$$
$$q_2 = \frac{p}{4}. \quad (54)$$

Знайдемо екстремальні значення f:

$$f\left(q_1\right) = 0^4 + 1^4 = 1$$
$$f\left(q_2\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}. \quad (55)$$

Підставивши (55) в (44), легко бачити, що для текстурованогостержня

$$\frac{e_{zz}^{\min/\max}}{s_z} = \left(S_{12} + \frac{1}{2}S_{44}\right) + \left(S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Для нетекстурованогостержня дослідження на екстремум функції

$$f_1 = \cos^4 q \sin^4 y + \sin^4 q + \cos^4 q \cos^4 y. \quad (57)$$

Дає із розв'язку системи

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} = 0;$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0. \quad (58)$$

Точки екстремумів

$$q_1 = 0;\ y_1 = 0;$$
$$q_2 = 45;\ y_1 = 35{,}26^{\mathbf{o}}; \quad (59)$$
$$q_2 = 90^{\mathbf{o}};\ y_1 = 90^{\mathbf{o}}.$$

Аналіз (57-59) показує, що екстремуми f_1 в точках 1 і 3 та 2 і 4 співпадають. Тоді

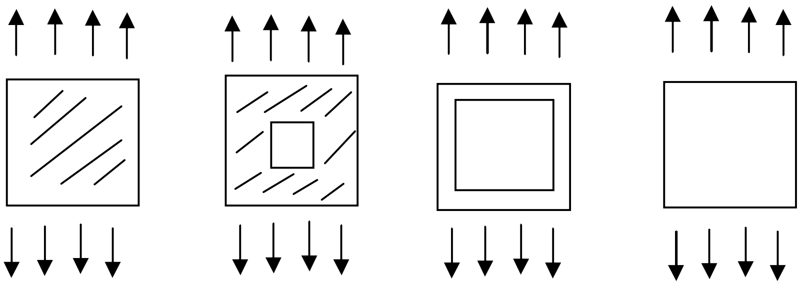
$$f_1(q_1; y_1) = 1$$
$$f_1(q_2; y_2) = 1/3 . \qquad (60)$$

Звідки для нетекстурованого стержня одиничного перетину

$$\frac{e_{zz}^{max/min}}{s_z} = \left(S_{12} + \frac{1}{2}S_{44}\right) + \left(S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}. \qquad (61)$$

Співставлення (56) і (61) показують, що діапазон неоднорідності локальних деформацій у випадку нетекстурованого стержня більший, ніж у текстурованого.

Однак, щоб знайти числові значення $\dfrac{e_{zz}^{max}}{e_{zz}^{min}}$ як у випадку текстурованого, так і в випадку нетекстурованого стержня, необхідно визначити значення S_{11}; S_{12}; S_{44} для $J \neq 0$. Для $J = 0$ тіла Серпинського вироджуються в ізотропне тіло. І тільки поява системи пор приводить до появи фрактально-геометричної анізотропії.



а) б) в) г)

Рис.8

Для визначення впливу фрактально-геометричної анізотропії на пружні податливості S_{11}; S_{12}; S_{44} скористуємось співвідношеннями

$$E_{hkl}^{j} = E_0 \left(n_{hkl}^{E}\right)^{j};$$
$$G_{hkl}^{j} = G_0 \left(n_{hkl}^{G}\right)^{j}. \qquad (62)$$

а для визначення впливу фрактальної геометрії на коефіцієнта Пуассона скористаємось наступною моделлю (рис. 8). Для суцільного тіла (рис. 8, а)

$$m = \left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right| = m_0 \quad (j = 0) \qquad \Delta y = \frac{Pa}{Ead}; \qquad \Delta x = -\frac{Pam}{Ead}. \tag{63}$$

Для тіл з центральними отворами (рис. 8, б), в), г) спробуємо пов'язати значення коефіцієнта Пуассона з об'ємом тіла. Наприклад, для пружної контура-рами рис.8. в пружний розв'язок для тричі статично невизначеного контура дає:

$$\Delta y = \frac{5}{192} \cdot \frac{Dl^3}{Ey} \tag{64}$$

$$\Delta X = -\frac{1}{64} \cdot \frac{Dl^3}{Ey} \tag{65}$$

де, $y = \frac{dh^3}{12}$

Тоді, $$m_* = \left|\frac{\Delta X}{\Delta y}\right| = \frac{1}{64} : \frac{5}{192} = 0{,}6 \tag{66}$$

Спрямувавши товщину стержнів рами. *рис. 1, в* до $h \to 0$, будемо мати

$\Delta y = 2a - a = a$

$\Delta x = 0 - a = -a$

Звідки для абсолютно тонкої рами-контура *(рис.8, г)* маємо

$$m_{**}\Big|_{h \to 0} = \left|\frac{-a}{a}\right| = 1 \tag{67}$$

Для даного випадку доцільно говорити, що при h→0; V→0, тобто граничне наближення, коли об'єм фрактала V→0, коефіцієнт Пуассона

$$m_{**} \Rightarrow m_{\max} = 1$$

Розглянемо найпростіший варіант – лінійне наближення залежності *μ (V)* чи *μ(ρ)*

При $\rho = \rho_{max}$ маємо $\mu = \mu_{min} = \mu_o$

При $\rho \Longrightarrow 0$ відповідно $\mu = \mu_{max} \Longrightarrow 1$

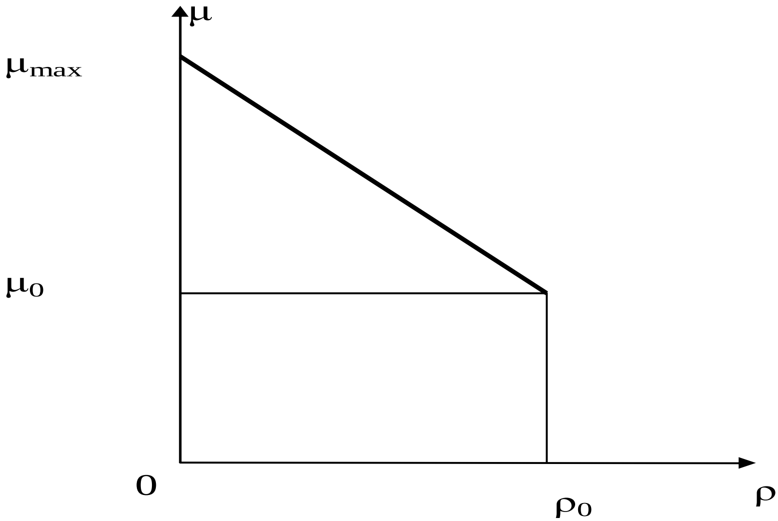


Рис.9. Зміна коефіцієнта Пуассона як функція густини фрактала. Лінійне наближення

Тоді $m(r) = m_o + \frac{r_o - r}{r_o - r_{\min}}(m_{\max} - m_o)$ (68)

Для $\rho_{min} \to 0$; $\mu_{max} \to 1$ будемомати

$$m(r) = m_0 + \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)(1 - m_0) \qquad (69)$$

Скористаємось для тіл Серпинськогозалежністю густини

$$r(j) = r_0 (n_{hkl}{}^r)^j$$

Тоді:

$$m(r, j) = m_0 + \left[1 - (n_{hkl}{}^r)^j\right](1 - m_0) \qquad (70)$$

Або, після розкриття дужок:

$$m(r, j) = 1 - (1 - m_0) \cdot (n_{hkl}{}^r)^j \qquad (71)$$

Із (71) маємо залежність коефіцієнта Пуасона, як функції рівня фрактальності тіл Серпинського класу [hkl] в загальному вигляді. Звідки для

$j=0 \quad m_0 = 1 - (1 - m_0) = m_0$

$j=1 \quad m_1 = 1 - (1 - m_0) n^r$

$j=2 \quad m_2 = 1 - (1 - m_0)(n^r)^2 \qquad (72)$

$j \to \infty \quad \mu_\infty \Longrightarrow \mu_{max}=1$

Тоді для гідроксилопатитупри μ_0 = 0,199 для тіл Серпинськогокласу [111]

$$n_{111}{}^r = \frac{20}{27} \qquad (73)$$

В таблиці 1 наведені залежності коефіцієнта Пуасона, пористості q та відношення $e_{zz}^{\max}/e_{zz}^{\min}$ для тіл Серпинського класу [111] від рівня фрактальності, отриманих з лінійного наближення μ (ρ) :

Таблиця 1

Рівень фрактальності j	0	1	2	3	4	5
Коефіцієнт Пуасона μ_j	0,199	0,406	0,560	0,674	0,759	0,821
$e_{zz}^{\max}/e_{zz}^{\min}$	1	1,160	1,318	1,462	1,596	1,708
Пористість q , %	0	25,9 %	45,1 %	59,3 %	69,9 %	77,7 %

Дамо деякі пояснення до таблиці 1:

Враховуючи, що

$$S_{11j} = \frac{1}{\left(n_{III}^{E}\right)^{j}}$$

$$S_{12j} = -\frac{1-(1-m_0)\left(n_{III}^{r}\right)^{j}}{E_0\left(n_{III}^{E}\right)j}$$

$$S_{44j} = \frac{1}{G_0(n_{III}^{G})^{j}}$$

а також скориставшись масштабними константами для тіл Серпинського класу [111]:

$$n_{III}^{E} = n^{r}{}_{III} = \frac{2}{3}$$

$$n^{r}{}_{III} = \frac{20}{27}$$

і скориставшись для гідроксилопатиту E_0 = *153 ГПа*; G_0 = 63,8 ГПа.

μ_0 = 0,199, оцінимо $e_{zz}^{\max} / e_{zz}^{\min}$ від рівня фрактальності для нетекстурованогостержня одиничного перетину, зібраного з хаотично орієнтованих тіл Серпинського класу [111].

Оскільки для *j=0* маємо ізотропне тіло, то

$$r_{j=0} = S_{11_0} - S_{12_0} - \frac{1}{2} S_{44_0} = \frac{1}{E_0} + \frac{m_0}{E_0} - \frac{1}{2}\frac{1}{G_0} = \frac{1}{153} + \frac{0{,}199}{153} - \frac{1}{2}\frac{1}{63{,}8} \approx 0$$

Для *j=1*

$$E_1 = E_0 \cdot \frac{2}{3}; \quad G_1 = G_0 \cdot \frac{2}{3};$$

$$m_1 = 1 - (1 - m_0) \cdot \frac{20}{27} = 0{,}406$$

Тоді

$$r_{j=1} = S_{II_1} - \left(S_{12_1} + \frac{1}{2} S_{44_1}\right) = \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot 153} - \left(\frac{-0{,}406}{\frac{2}{3} \cdot 153} + \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 63{,}8}\right) = 0{,}00980 - 0{,}00777$$
$$= 0{,}00203$$

Тоді

$$e_{zz}^{\max} = 0{,}00777 + 0{,}00203 \bullet 1 = 0{,}00980$$

$$e_{zz}^{\min} = 0{,}00777 + 0{,}00203 \bullet \frac{1}{3} = 0{,}00844$$

Звідки

$$\frac{e_{zz^{\max}}}{e_{zz^{\min}}} = \frac{0{,}00980}{0{,}00844} = 1{,}160$$

Аналогічно, для *j = 2*

$$E_2 = \tfrac{4}{9}E_0; \quad G_2 = \tfrac{4}{9}G_0;$$

$$m_2 = 1 - (1 - m_0)\left(\tfrac{20}{27}\right)^2 = 0{,}560$$

Звідки

$$r_{j=2} = S_{11_2} - \left(S_{12_2} + S_{44_2}\right) = 0{,}0147 - \left(-\frac{0{,}560}{\frac{4}{9}\cdot 153} + \frac{1}{2\cdot\frac{4}{9}\cdot 63{,}8}\right) = 0{,}0147 - 0{,}00939$$

$= 0{,}00530$

Звідки

$$e_{zz}^{\max} \Big/ j = 2 = 0{,}00939 + 0{,}00530 \bullet 1 = 0{,}0147$$

$$e_{zz}^{\min} \Big/ j = 2 = 0{,}00939 + 0{,}00530 \bullet \frac{1}{3} = 0{,}011156$$

Тоді

$$\left(\frac{e_{zz}^{\max}}{e_{zz}^{\min}}\right) \Big/ j = 2 = 1{,}318$$

Аналогічні обчислення проведені для $j = 3$; j = 4; $j = 5$. Дані обчислень зведені в таблиці 1.

Результати таблиці 1 дозволяють стверджувати, що за лінійним наближенням μ (ρ) при переході від $j = 0$ до $j = 1$ фрактала Серпинського класу [111], що відповідає переходу від пористості q_0 = 0 до пористості q_1 = 25,9 % коефіцієнт Пуассона зростає для ГАП-перкераміки від 0,199 до 0,406 або в 2,04 раза.

Перехід від j = 1 до j = 2, що відповідає переходу від жорсткості q_1 = 25,9 % до

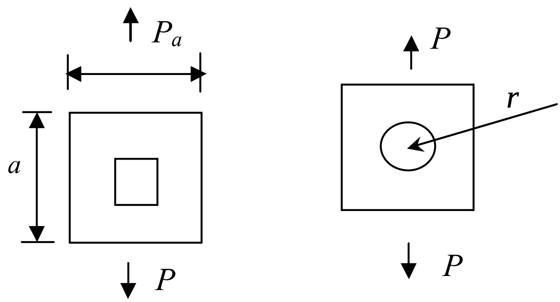
q_2 = 45,1 % коефіцієнт Пуассона зростає від 0,406 до 0,560, або 2,81 μ_0.

2.6. Еквівалентне тіло Серпинського з циліндричними порами

Пористі тіла і квазіфрактали і з природними порами, і зі штучними більш звичні і технологічно доцільні з будовою пор в вигляді циліндричних, еліптичних, сферичних, еліпсоїдних форм та їх комбінацій.

В той же час аналіз характеристик самоподібності фракталів Серпинського з квадратними призматичними пустотами значно простіший, що продемонстровано і в даній роботі.

Покажемо, що для класичного фракталу Серпинського з призматичними квадратними пустотами можна побудувати еквівалентне тіло з циліндричними пустотами. Обмежимось аналізом тіл класу [100], (рис. 10).



а) б)

Рис.10

В пружній постановці для фрактала Серпинського класу [100] для $j = 1$ за умови, що розмір сторони квадрата $b = a/3$, маємо:

$$\Delta кв_1 = \frac{7}{6}\frac{Pa}{Eat}, \qquad (69)$$

а для циліндричного отвору

$$\Delta_{цил1} = \frac{P(a-r)}{eat} + \frac{P}{Et}\int_0^r \frac{dx}{a-\sqrt{r^2-x^2}}\,. \qquad (70)$$

Виконавши інтегрування в (70) і прирівнявши з пружними деформаціями (69) маємо:

$$\frac{2}{\sqrt{1-b^2}}arctg\frac{\sqrt{1+b}}{1-b} - b = \frac{p}{2}+\frac{1}{6}, \qquad (71)$$

де $b = \frac{r}{a}$.

Числовий аналіз (71) дає розв'язок

$$b_{*} \approx 0{,}378. \qquad (72)$$

Таким чином, із умови рівності пружних деформацій для тіла Серпинського з центральним квадратним отвором $в = a/3$ можна поставити у відповідність тіло із центральним циліндричним отвором з $d \approx 0{,}378a$.

Із рівності умови плащ основ квадратного і циліндричного отворів

$$(a/3)^2 = \frac{pb^2a^2}{4}. \qquad (73)$$

Звідки

$$b_{**} = \frac{2}{3\sqrt{p}} \approx 0{,}376. \qquad (74)$$

Таким чином, різниця між b_{*} і b_{**} складає ~ 0,5 %, і в подальшому можна при побудові еквівалентних тіл користуватись рівністю площ основ отворів.

Для випадку $в \angle \frac{a}{3}$ розглянемо загальну постановку задачі. Так, для $в = aa$ умова рівності пружних деформацій дає:

$$\frac{2}{\sqrt{1-b^2}} \arcsin\sqrt{\frac{1+b^2}{1-b^2}} - b = \frac{p}{6} + \frac{a^2}{1-a}. \qquad (75)$$

Для заданого a із (75) легко знайти відносний діаметр b циліндричного отвору.

Для умови рівності площ основ:

$$b = \frac{2a}{\sqrt{p}}. \qquad (76)$$

Висновки.

1. Розвинуто теоретико-ймовірнісні методи моделювання деформованих перколяційно-фрактальних систем.
2. Отримано оцінки для локальних об'ємів значення $e_{zz\max}$, $e_{zz\min}$ та $\tilde{e}_{zz}$ для наближень одиничного стержня

Серпинського класу [111] як для випадку текстурування по площині куба. Так і для випадку нетекстурованого

3. В лінійному наближенні отримано залежність коефіцієнта Пуассона як від рівня пористості, так і від рівня фрактальності при моделюванні пористої ГАП-перкераміки тілами Серпинського класу [111]. В загальному вигляді лінійне наближення дає:

$$m \approx m_0 + \frac{r_0 - r}{r_0 - r_{\min}}\left(m_{\max} - m_o\right),$$

що при заміні пористої ГАП-перкераміки тілами Серпинського класу [111] дає:

$$m_{111}(j) \approx 1 - (1 - m_0)\cdot\left(n_{'''}^{r}\right)^{j},$$

де m_0 – коефіцієнт Пуассона для ГАП-контініума;

$m_{\max}$ – коефіцієнт Пуассона для ГАП-перкераміки при $r \to 0$;

r_0 – густина для контініума r_0 ~3,16 ^{5} /см^3;

$\left(n_{'''}^{r}\right)$ – масштабна константа зміни густини в фракталі Серпинського класу [111] $\left(n_{'''}^{r}\right) = \frac{20}{27}$.

6. Показано, що значення максимальних і мінімальних деформацій в стержневому наближенні для тіл Серпинського обмежене значеннями

а) текстурований стержень

$$\left(e_{zz}\right)_{\min}^{\max} = \left\{\left(S_{12,j} + \frac{S_{44,j}}{2}\right) + \left(S_{11,j} - S_{12,j} - \frac{1}{2}S_{44,j}\right)\begin{bmatrix}1\\ 1/2\end{bmatrix}\right\}s_z;$$

б) нетекстурований стержень

$$\left(e_{zz}\right)_{\min}^{\max} = \left\{\left(S_{12,j} + \frac{S_{44,j}}{2}\right) + \left(S_{11,j} - S_{12,j} - \frac{1}{2}S_{44,j}\right)\begin{pmatrix}1\\ 1/3\end{pmatrix}\right\}s_z$$

7. Вперше отримано значення коефіцієнта Пуассона (лінійне наближення) та відношення $e_{zz}^{\max}/e_{zz}^{\min}$ (в наближенні

стержня Серпинського одиничного перетину) від рівня фрактальності та орієнтації мікрооб’ємів.

Додаток 1.

Алгебраїчні операції над тензорами

1. Додавання тензорів однакових рангів p:

$$\left\{a_{ijk\ldots m}\right\}+\left\{b_{ijk\ldots m}\right\}=\left\{c_{ijk\ldots m}\right\}$$

При додаванні (відніманні) тензорів однакових рангів відповідні компоненти тензорів додаються (віднімаються).

2. Множення тензора на дійсне число – кожна компонента тензора множиться на дане дійсне число

$$b_{ijk\ldots m}=\lambda a_{ijk\ldots m}.$$

3. Множення тензорів.

Компоненти добутку двох тензорів рангу p і v є сума добутків кожної компоненти першого тензора на кожну компоненту другого тензора, а ранг утвореного тензора $s=p+q$.

Лінійна залежність векторів і розмірність лінійного простору.

1. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{e}$ – вектори лінійного векторного простору, $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ – дійсні числа.

Тоді вектор $\vec{X}$:

$$\vec{X}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}+\ldots+\varepsilon\cdot\vec{e}$$

будемо називати лінійною комбінацією векторів $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{e}$, а числа $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ – коефіцієнти цієї лінійної комбінації.

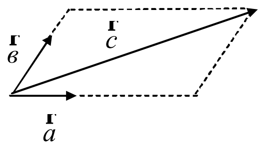
Приклади:

1.1. Нуль – вектор $\vec{O}$ є лінійно залежним, так як $\alpha\cdot\vec{O}=\vec{O}$ при будь-якому α.

1.2. Два колінеарних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ завжди лінійно залежні.

1.3. Два неколінеарних вектори завжди лінійно незалежні.

1.4. Три компланарних вектори лінійно залежні. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – належать одній площині, причому $\vec{a} \neq \lambda \vec{b}$, тобто $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні.

	Тоді $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$.

1.5.1Три некомпланарних вектори завжди лінійно-незалежні в просторі R^3 .

1.6. “некомпланарних” векторів в просторі R ” будуть лінійно незалежні.

2. Розмірністю лінійного простора будемо називати найбільше число лінійно незалежних векторів, що належать цьому просторові.

Додаток 2.

Дії над векторами

1. Додавання векторів і множення на число:

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- існує нуль-вектор $\vec{0}$ такий, що $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- для кожного $\vec{x}$ існує протилежний вектор $\vec{y} = -\vec{x}$ такий, що $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- $\lambda(\mu \vec{x}) = (\lambda \mu) \vec{x}$
- $(\lambda + \mu) \vec{x} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{x}$
- $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y}$

2. Скалярний добуток векторів:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos\varphi$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$\cos\varphi=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$$

3. Векторний добуток двох векторів:

$$\vec{z}=\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{z}|=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\sin\varphi$$

$$z_1=(x_2y_3-x_3y_2)$$

$$z_2=(x_3y_1-x_1y_3)$$

$$z_3=(x_1y_2-x_2y_1)$$

Вектор $\vec{z}$ перпендикулярний площині якій належать вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ і утворюють вектори $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ праву тройку векторів.

4. Змішаний добуток векторів:

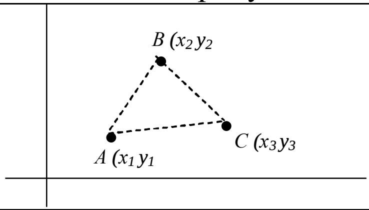
$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

і дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{x}$, $\vec{y}$ і $\vec{z}$.

Додаток 3.

Аналітична геометрія на площині

1. Площа трикутника

	$S_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix}$ Якщо всі три точки лежать на одній прямій, то $S_{\Delta ABC} = 0$.

2. Загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0$$

3. Умова паралельності і перпендикулярності прямих

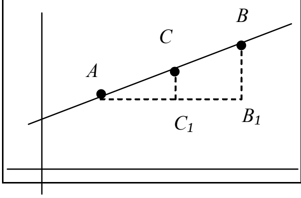
$$\left.\begin{matrix} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Умова паралельності $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$.

Умова перпендикулярності $A_1 A_2 = B_1 B_2$.

Кут між двома прямими: $\operatorname{tg} A = \dfrac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$

4. Рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$:

	Задано довільну точку $C(x, y)$, що також належить цій прямій. Тоді рівняння прямої $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0$.

До такого ж рівняння можна прийти із подібної ΔACC_1 і $\Delta ABB'$:

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB'}{AC'} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{y = y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x - x_1}.$$

Додаток 4.

Аналітична геометрія в просторі

1. Рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

2. Умова $\parallel$, $\perp$ та кут між 2 площинами.

Нехай дано дві площини

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

- умова паралельності $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{B_2}{B_1} = \dfrac{C_2}{C_1}$
- умова перпендикулярності $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
- кут між двома площинами

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

3. Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Введемо довільну точку $M(x, y, z)$, що також належить цій площині. Тоді рівняння площини:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_4 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Так як в даному випадку вектори $\overrightarrow{M_2M_1}$; $\overrightarrow{M_3M_1}$; $\overrightarrow{MM_1}$ належать одній площині, а значить – об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює нулю.

Додаток 5.

Таблиця похідних

1. Складна функція

$f = u[y(x)]$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

2. Добуток

$f = u \cdot v$ $\qquad\qquad$ $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$

3. Відношення функції

$f=\dfrac{u}{v}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{vu'-v'u}{v^2}$

4. Логарифмічна функція

$y=\ln x$ $\qquad$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$y=\log_a x$ $\qquad$ $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\cdot\log_a e$

5. Показникова функція

$y=e^x$ $\qquad$ $y'=e^x$

$y=a^x$ $\qquad$ $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$

6. Тригонометричні функції

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

7. Обернені тригонометричні функції

$(\arcsin x)'\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\mathrm{arctg}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arctg}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

8. Степенева функція

$y=x^m$ $\qquad$ $\left(x^{m'}\right)=m\cdot x^{m-1}$

Додаток 6.

Ще раз про тензори

Математично різноманітні фізичні величини зручно описувати тензорними змінними, або тензорами різних рангів.

Ми будемо в подальшому використовувати тензори двох типів:

- польові тензори, що характеризують дію на анізотропне тверде тіло;
- матеріальні тензори, що описують властивості цього твердого тіла.

Введемо поняття рангу тензора.

1. Тензор нульового рангу – скаляр – величина, що не залежить від перетворення координат.

2. Тензор першого рангу – вектор. Зв'язок між двома векторами $\vec{в}(в_1 в_2 в_3)$ і $\vec{c}(c_1 c_2 c_3)$ можна виразити:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Тоді величину A_{ij}, що зв'язує $\vec{в}$ і $\vec{c}$ вектори

$$\{A_{ij}\} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

називають тензором другого рангу, а відповідні коефіцієнти A_{ij} –компонентами тензора. Тоді скорочено (1) можна записати в тензорному виді:

$$c_i = A_{ij} \cdot в_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Тензорна форма запису передбачає додавання по індексах, що повторюються.

Відповідно зв'язок між векторами і тензорами другого рангу задається тензором третього рангу:

$$c_i = D_{ijk} \cdot V_{jk}, \tag{4}$$

а зв'язок між двома тензорами другого рангу – тензором четвертого рангу:

$$s_{ij} = C_{ijkl} \cdot X_{kl} \, . \qquad (5)$$

Співвідношення (3)-(5) які можна продовжувати до тензорів будь завгодно яких рангів, і виражають зв'язок між матеріальними і польовими тензорами. В таблиці Д7 наведені різні матеріальні і польові фізичні властивості, що описуються в тензорних змінних, а також наведені співвідношення між дією, реакцією і властивостями анізотропного середовища.

В таблиці Д7 наведена невелика частина властивостей анізотропних середовищ. Тут не згадані термоелектричні явища, явище самодифузії, піромагнітні та п'єзо магнітні явища, магнітострикція та інші.

Додаток 7.

Тензори і матриці

Тензори різних рангів зручно задавати у вигляді матриць. Наприклад, (2) є матриця тензора другого рангу. Розглянемо де-які операції над матрицями.

Якщо A – матриця ixj, де i – число строк, j – число стовбчиків, а B – матриця $j \ x \ k$, то добуток AB буде $i \ x \ k$ – матрицею. Як правило AB ¹ BA.

Часто буває зручно тензорні величини високих рангів задавати матрицями з суттєвим зменшенням числа змінних індексів. При цьому маємо наступний зв'язок між тензорними та матричними змінними:

Тензорні індекси	11	22	33	23 = 32	31= 13	12 = 21
матричні індекси	1	2	3	4	5	6

Тоді для тензора другого рангу

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_6 & a_5 \\ a_6 & a_2 & a_4 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix},$$

а для тензора четвертого рангу

$$\begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2231} & c_{2212} \\ & & c_{3333} & c_{3323} & c_{3331} & c_{3312} \\ & & & c_{2323} & c_{2331} & c_{2312} \\ & & & & c_{3131} & c_{3112} \\ & & & & & c_{1212} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}.$$

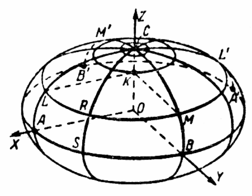
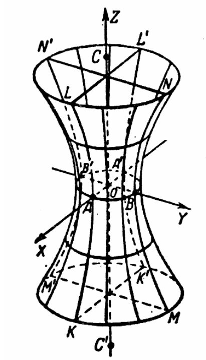
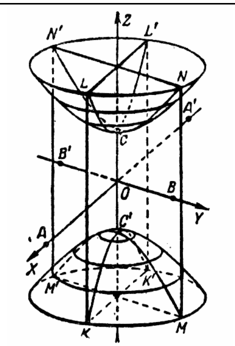
Таблиця Д7. Співвідношення між фізичними властивостями в тензорних змінних

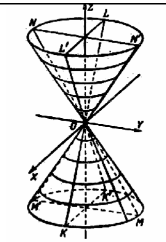
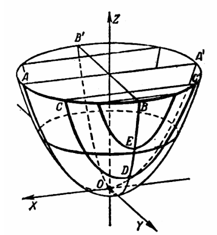
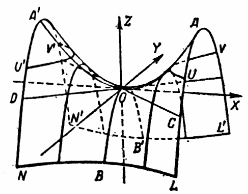
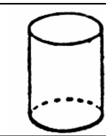
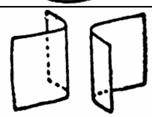
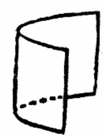
№ з/п	*Співвідношення між тензорами*	*Дія*	*Реакція*	*Матеріальний тензор/фізична властивість*
1.	$\Delta s = \left(\frac{c}{T}\right)\Delta T$	скаляр	скаляр	скаляр
		температура T	ентропія s	теплоємність c
2.	$\Delta P_i = p_i \cdot \Delta T$	скаляр	вектор	вектор
		температура T	Поляризація p	піроелектрика p
3.	$\Delta S = Q_i \cdot \Delta E_i$	вектор	скаляр	вектор
		напруженість електричного поля E	ентропія s	еклектро-колометрія Q
4.	$D_i = e_{ij} E_i$	вектор	вектор	тензор ІІ рангу
		напруженість електричного поля E	електрична індукція D	діелектрична проникність e_{ij}
5.	$h_i = -K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$	вектор	вектор	тензор ІІ рангу
		градієнт температури ∇T	інтенсивність теплового потоку h	теплопровідність k_{ij}

№ з/п	*Співвідношення між тензорами*	*Дія*	*Реакція*	*Матеріальний тензор/фізична властивість*
6.	$X_{i,j} = a_{i,j} \cdot \Delta T$	скаляр	тензор II рангу	тензор II рангу
		температур T	деформація $x_{i,j}$	теплове розширення $a_{i,j}$
7.	$\Delta S = b_{i,j} \cdot X_{i,j}$	тензор II рангу	скаляр	тензор II рангу
		деформація $x_{i,j}$	ентропія s	п'єзокалоричний ефект $b_{i,j}$
8.	$x_{i,j} = d_{ijk} \cdot E_k$	вектор	тензор II рангу	тензор III рангу
		напруженість електричного поля $E_к$	деформація $x_{i,j}$	п'єзоелектричний ефект d_{ijk}
9.	$\Delta B_{ij} = r_{ijk} \cdot E_k$	вектор	тензор II рангу	тензор III рангу
		напруженість електричного поля $E_к$	нелінійна діелектрична проникність $B_{i,j}$	електрооптичний ефект r_{ijk}
10.	$x_{i,j} = s_{ijkl} \cdot s_{kl}$	тензор II рангу	тензор II рангу	тензор IV рангу
		механічні напруги s_{kl}	деформація $x_{i,j}$	пружна податливість s_{ijkl}
11.	$s_{ij} = C_{ijkl} \cdot X_{kl}$	тензор II рангу	тензор II рангу	тензор IV рангу
		деформація x_{kl}	механічні напруги s_{ij}	пружна жорсткість

Додаток 8.

Поверхні 2-го порядку, що найчастіше зустрічаються в наукових дослідженнях

№ з/п	*Канонічне рівняння*	*Схематичне зображення*	*Назва поверхні*
1.	$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		Еліпсоїд
2.	$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		Однополосний гіперболоїд
3.	$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		Двополосний гіперболоїд

№ з/п	*Канонічне рівняння*	*Схематичне зображення*	*Назва поверхні*
4.	$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		Конус другого порядку
5.	$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$		Еліптичний параболоїд
6.	$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$		Гіперболіч-ний параболоїд
7.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		Еліптичний циліндр
8.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		Гіперболі-ний циліндр
9.	$y^2=2px$		Параболіч-ний циліндр

Додаток 9

Основні співвідношення тригонометрії

1. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$
2. $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$
3. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
4. $tg(2a \pm b) = \dfrac{tga \pm tgb}{1 \mp tga\,tgb}$
5. $\sin 2a = 2\sin a \cos a$
6. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
7. $tg2a = \dfrac{2tga}{1 - tg^2 a}$
8. $\sin\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$
9. $\cos\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$
10. $\sin a \pm \sin b = 2\sin\dfrac{a \pm b}{2} \cdot \cos\dfrac{a \mp b}{2}$
11. $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$
12. $\cos a - b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

Додаток 10

Границі

$$\lim_{n \to \infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e \approx 2{,}718281828\ldots$$

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \to 0_{+}} X^{x} = 1$$

$$lin_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{tgx}{x} = 1$$

Додаток 11

Гіперболічні функції

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$ch^2 x - sh^2 x = 1$$

$$sh(x \pm y) = shxchy \pm chxshy$$

$$ch(x \pm y) = chxchy \pm shxshy$$

$$th(x \pm y) = \frac{thx \pm thy}{1 \pm thx \cdot thy}$$

$$(shx)' = chx$$

$$(chx)' = shx$$

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

Додаток 12

Основні невизначені інтеграли

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad , \ m \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad , \ a > 1$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c$$

Додаток 13

Ряди

$$(1\pm x)^m=1\pm mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2\pm\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}x^4\pm\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{5!}x^5+\ldots.$$

$$(1\pm x)^{1/2}=1\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^2\pm\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4\pm\ldots.$$

$$(1\pm x)^{-\frac{1}{2}}=1\mp\frac{1}{3}x+\frac{1\cdot4}{3\cdot6}x^2\mp\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}x^3+\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10}{3\cdot6\cdot9\cdot12}x^4\mp\ldots.$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots.$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots.$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots.$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

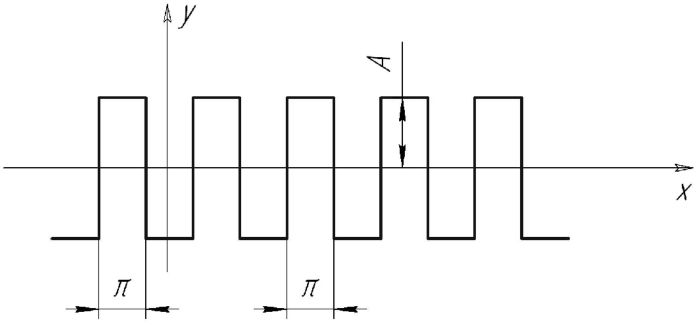
$$\ln x=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\ldots.+\frac{(x-1)^n}{nx^n}+\ldots.$$

$$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots.$$

$$chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots.$$

Додаток 14

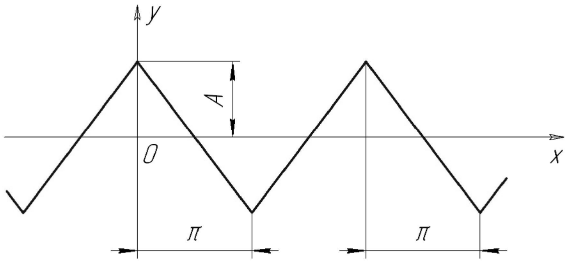
Розкладання в ряд Фур'є деяких періодичних сигналів



1)

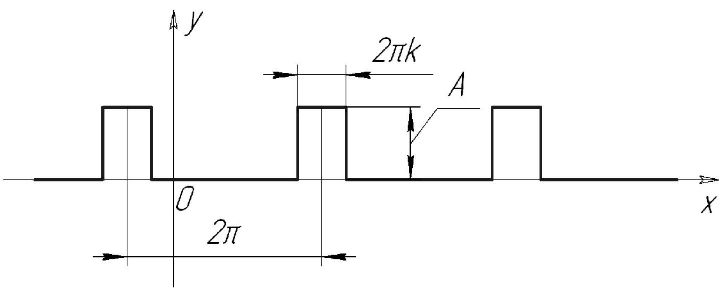
$$y = \frac{4A}{p}(\cos x - \tfrac{1}{3}\cos 3x + \tfrac{1}{5}\cos 5x - \tfrac{1}{7}\cos 7x + \ldots)$$

2)



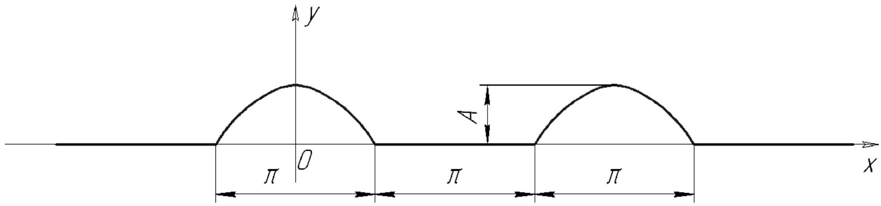
$$y = \frac{8A}{p^2}(\cos x + \tfrac{1}{9}\cos 3x + \tfrac{1}{25}\cos 5x + \tfrac{1}{49}\cos 7x + \ldots)$$

3)



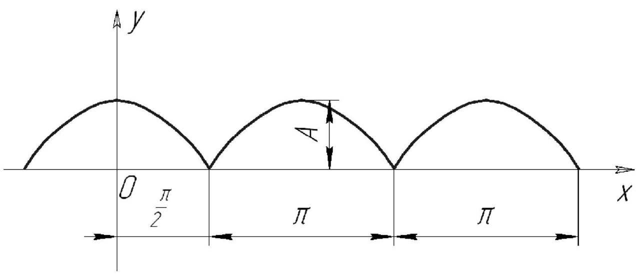
$$y = \frac{A}{p}\begin{Bmatrix} Kp + 2(\sin Kp * \cos x + \frac{1}{2}\sin 2Kp * \cos 2x + \\ + \frac{1}{3}\sin 3Kp * \cos 3x + \frac{1}{4}\sin 4Kp * \cos 4x + ...) \end{Bmatrix}$$

4)



$$y = \frac{A}{p} + \frac{A}{2}\cos x +$$
$$+ \frac{2A}{p}\left\{\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{1}{15}\cos 4x + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx + ...\right\}$$

5)



$$y = A\left|\cos x\right| = \frac{2A}{p} +$$
$$+ \frac{4A}{p}\left\{\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{1}{15}\cos 4x + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx + ...\right\}$$

Додаток 15

Деякі корисні формули

Формула Стірлінга

$$\lim \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\Pi n}} = 1 \Rightarrow n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2pn}$$

$$n \to \infty$$

Формула Ейлера

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$, де $i = \sqrt{-1}$

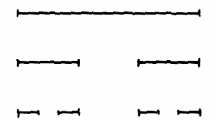
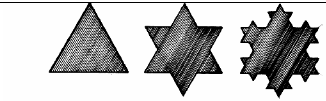
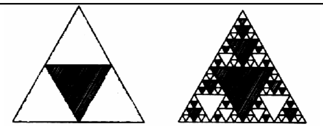
Формула „п'яти констант"

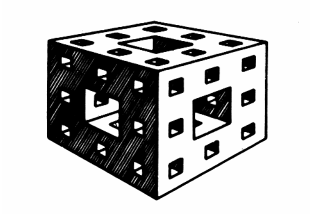
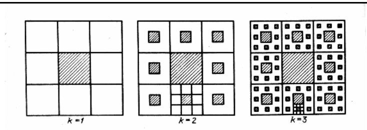
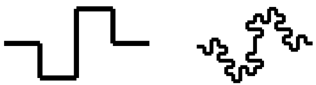
$$e^{ip} + 1 = 0$$

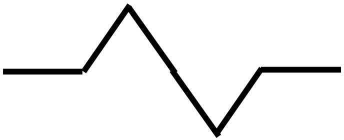
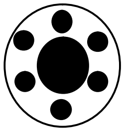
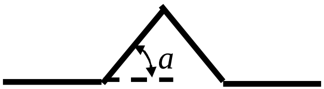
Додаток 16.

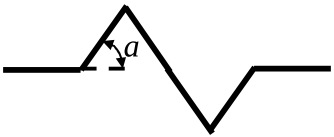
Визначення фрактальної розмірності деяких монофракталів

$$D = -\frac{\ln\left[N(l)/N(l')\right]}{\ln\left(l/l'\right)}$$ - загальна формула фрактальної розмірності

№п/п	*Рис.*	*Назва*	***D***	*Джерело*
1.		Пряме	$D = \frac{\log 3}{\log 3} = 1$	[15]
2.		Кантора множина	$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}6309$	[15]
3.		Крива Кох	$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}2618$	[15]
4.		Клиновидна крива	$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}5849$	[15]

№п/п	*Рис.*	*Назва*	*D*	*Джерело*
5.		Фрактал Серпин-ського [111]	$D=\frac{\ln 20}{\ln 3}=2{,}7268$	[15]
6.		Килим Серпин-ського	$D=\frac{\ln 8^m}{\ln 3^m}=1{,}893$	[17]
7.		Прямокутний імпульс	$D=\frac{\log 5}{\log 3}=1{,}4649$	[16]
8.			$D=\frac{\log 8}{\log 4}=1{,}5$	Грабар І.Г.

№п/п	*Рис.*	*Назва*	***D***	*Джерело*
9.			$D=\dfrac{\log 6}{\log 4}=1{,}2925$	Грабар І.Г.
10.			$D=\dfrac{\log 6}{\log 3}=$ $=1+\dfrac{\log 2}{\log 3}=1{,}6309$	Грабар І.Г.
11.		Узагальнена крива Кох	$D=\dfrac{\log 4}{\log(2+2\cos a)}$	Грабар І.Г.

№п/п	*Рис.*	*Назва*	*D*	*Джерело*
	$a=0$ $a=15^{0}$ $a=30^{0}$ $a=45^{0}$ $a=60^{0}$ $a=75^{0}$ $a=90^{0}$	Пряма	$D=1$ $D=1{,}0125$ $D=1{,}052$ $D=1{,}1289$ $D=1{,}2618$ $D=1{,}501$ $D=2$	
12.	 $a=90^{0}$		$D=\frac{\log 5}{\log(3+2\cos a)}$ D =log5/log3 = 1,4649	Грабар І.Г.
13.	 $a=0$ $a=60^{0}$		$D=\frac{\log 6}{\log(2+4\cos a)}$ D = 1 D = log6/log4 = 1,2925	Грабар І.Г.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.7.Теория упругости – М.: Наука– 1987. – 248 с.
2. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. В.В. Васильева и Ю.М. Тарнопольского – М.: Машиностроение. – 1990. – 512 с.
3. Тарнопольский Ю.М. Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно-армированные композиционные материалы. М.: Машиностроение. – 1987. – 224 с.
4. Киселев В.А. Плоская задача теории упругости – М.: Высшая школа. – 1976. – 151 с.
5. Рекач В.Г. Руководствок решению задач по теории упругости – М.: Высшая школа. – 1977. – 216 с.
6. Екобори Т. Научные основы прочности и разрушения материалов. – К.: Науковадумка. – 1978. – 352 с.
7. Ашкнези Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. – Л.: Машиностроение. – 1980. – 247 с.
8. Францевич И.Н., Воранов Ф.Ф., Бакута С.А. Упругие постоянные и модули упругости материалов и неметаллов. – К.: Науковадумка. – 1982. – 286 с.
9. Александров К.С., Рижова Т.В. Упругие постоянные кристаллов. – Кристаллография. 1961, № 6, вып. 2, с. 289–314.
10. Anosotropy in single crystal refrectory compounds. – New York: Plenum press. – 1968, 2 – 493 p.
11. Simmons G. Single Crystal Elastic constans and calculated Aggregate Properties. – J. Grad. Res. Cent. – 1965, v. 34, № 1–2, p. 1–269.
12. Физические величины. Справочник. – М.: Энергоиздат. – 1991. – 1232 с.
13. Грабар І.Г. Термоактиваційний аналіз і синергетика руйнування – Житомир: ЖІТІ. – 2002. – 385 с.
14. Грабар І.Г. Самоподібність в закономірностях жорсткості та пружності фрактальних та фрактально-перколяційних систем. – Вісник ЖІТІ. – № 3, 1996. – с. 38 –44.
15. Г.Шустер. Детерминированный хаос. Введение. – М.: Мир. – 1988. – 240 с.
16. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах.– М.: Мир. –1985– 411 с.
17. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. – М.: Наука. – 1990. – 269 с.

18. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука. – 1983. – 176 с.

19. Айзенк Г., Эванс Д. Тесты **IQ** для юных гениев. – М.: Эскимо. – 2006. – 208 с.

20. Выгодский М.Я. Справочник по математике.- М.: Наука.- 1975. – 872 с.

21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.- М.: Наука. – 1968. – 720 с.

22. Аквис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. – М.:Наука. – 1972. – 352 с.

23. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Науковадумка. – 1984. – 420 с.

24. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория Поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука. – 1980. – 336 с.

25. Грабар І.Г., Рудницький В.А., Захаров В.К., Кришевський М.Б., Кравченко В.П. Моделювання процесів у задачі двофазного потоку та оптимізація технологій нанесення біокерамічного покриття на титанові імплантати. – В кн..: Процеси механічної обробки в машинобудуванні – Збірник наукових праць. - Вип.4. – Житомир. – 2006. – 13 с.

26. Грабар І.Г., Грабар О.І., Кубрак Ю.О.,Баженов В.Г. Основи моделювання процесів пресування, спікання та механічних випробовувань перколяційних біокерамік заданої пористості. –В кн..: „Практична космонавтика і високі технології” //Праці науково-практичної конференції, присвяченої 100-річчю С.П.Корольова. – Житомир. – ЖДТУ. – 2007.- с.63 – 66.

27. Грабар І.Г., Грабар О.І., Левик С.А. Моделювання мікоронапружено-деформованого стану перколяційно-фрактальних середовищ в пружній постановці. – В кн..: „Практична космонавтика і високі технології” // Праці науково-практичної конференції, присвяченої 100-річчю С.П.Корольова. – Житомир. – ЖДТУ. – 2007.- с.81-83.

28. Грабар І.Г., Кубрак Ю.О. Проектування перкколяційно-фрактальних датчиків для дослідження біологічних тканин. – В кн..: „Практична космонавтика і високі технології”//Праці науково-практичної конференції, присвяченої 100-річчю С.П.Корольова. – Житомир. – ЖДТУ. – 2007.

З М І С Т