**УДК 65.051**

**М. В. Стьопочкіна**

# УЗАГАЛЬНЕНО-НАПІВНЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ

*Про поняття узагальнено-напівнеперервних функціоналів, про їх зв'язок з різними класами множин функціоналів, про умови узагальнено напівнеперервності в точках розриву, про доведення теорем Веєрштраса для даних функціоналів.*

***Означення 1.*** Нехай задано функціонал $f$, що переводить компактну множину $K$ в множину дійсних чисел. Функціонал $f$ називається узагальнено напівнеперервним в точці $x_o \in K$, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ окіл $U(x_o) \subset K$: $\forall x \in U(x_o)$ $|f(x)| < |f(x_o)| + \varepsilon$, або

$$|f(x)| - |f(x_o)| < \varepsilon \qquad (1)$$

***Означення 2.*** Функціонал $f$, який узагальнено напівнеперервний в кожній точці компакта $K$, називається узагальнено напівнеперервним на цьому компакті.

**Теорема 1.** Довільний неперервний функціонал в точці $x_o$ є узагальнено напівнеперервним в цій точці.

Доведення:

Оскільки функціонал $f$ неперервний, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists U(x_o) \subset K$: $\forall x \in U(x_o)$ $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. Розглянемо вираз:

$$|f(x)| - |f(x_o)| < |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

Отримали означення узагальнено напівнеперервного функціонала в точці.

Теорема доведена.

**Теорема 2.** Узагальнено напівнеперервний функціонал в точці $x_o$ є або напівнеперервним зверху, або напівнеперервним знизу, або неперервним в цій точці.

*Доведення*:

**а)** Якщо $f(x_o) > 0$, то означення 1 перепишемо так: $|f(x)| < f(x_o) + \varepsilon$, або

$$-f(x_o) - \varepsilon < \underline{f(x) \le f(x_o) + \varepsilon}.$$

Це означення функціонала $f$ напівнеперервного зверху в точці $x_o$.

**б)** Якщо $f(x_o) < 0$, то означення 1 набуде вигляду: $|f(x)| < -f(x_o) + \varepsilon$, або

$$\underline{f(x_o) - \varepsilon \le f(x)} < -f(x_o) + \varepsilon.$$

Це означення функціонала $f$ напівнеперервного знизу в точці $x_o$.

**в)** Якщо $f(x_o) = 0$, то $|f(x)| < \varepsilon$, або

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon,$$

що є означенням неперервності функціонала в точці $x_o$.

Теорема доведена.

Розглянемо функціонал $f$, визначений на множині дійсних чисел, та з'ясуємо при яких умовах функціонал в точках розриву є узагальнено напівнеперервним.

**1)** Нехай $x_o$ – точка розриву усувного роду, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \ne f(x_0)$.

Позначимо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R$: $0 < |x - x_o| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

**а)** Якщо $|f(x_o)| \gneqq |A|$, то

$$|f(x)| - |f(x_o)| \lneqq |f(x)| - |A| \lneqq |f(x) - A| < \varepsilon,$$

а тому $f(x)$ – узагальнено напівнеперервний в точці $x_o$.

*Зауваження*: Якщо $f(x_o) = A$, то $x_o$ не є точкою розриву усувного роду та $f(x)$ – неперервний функціонал.

**б)** Якщо $|f(x_o)| < |A|$, то $f(x)$ не є узагальнено напівнеперервним функціоналом в точці $x_o$.

*Наприклад*:

Функціонали

$$a)\ f_1(x)=\begin{cases}-(x-2)^2+4, & x\neq 2\\ -1, & x=2\end{cases}\quad \text{та}\quad б)\ f_2(x)=\begin{cases}(x-1)^2-2, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

не є узагальнено напівнеперервні відповідно в точках $x_o=2$ та $x_o=1$.

*Висновок:* Отже, функціонал $f$ є узагальнено напівнеперервним в точці розриву усувного роду $x_o$ лише при умові, коли

$$|f(x_o)|\geq|A|,\ \text{де}\ A=\lim_{x\to x_0} f(x) \qquad (2)$$

**2)** Нехай $x_o$ – точка розриву I роду (стрибок), тобто $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=B$, $A\neq B$.

**а)** Нехай $|f(x_o)|\geq|A|$ та $|f(x_o)|\geq|B|$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=A$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1(\varepsilon)>0\ \forall x\in R$: $0<x_o-x<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$.

Аналогічно $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=B \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2(\varepsilon)>0\ \forall x\in R$: $0<x-x_o<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-B|<\varepsilon$.

Візьмемо $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$.

Для $\forall x\in R$ $0<x_o-x<\delta$

$$|f(x)|-|f(x_o)|\leq|f(x)|-|A|\leq|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Для $\forall x\in R$ $0<x-x_o<\delta$

$$|f(x)|-|f(x_o)|\leq|f(x)|-|B|\leq|f(x)-B|<\varepsilon.$$

Отже, в обох випадках: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in R$ $0<|x-x_o|<\delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)|-|f(x_o)|<\varepsilon$, що і означає узагальнену напівнеперервність функціонала $f(x)$ в точці $x_o$.

**б)** Якщо $|f(x_o)|<|A|$ або $|f(x_o)|<|B|$, то $f(x)$ не є узагальнено напівнеперервним функціоналом в точці $x_o$.

*Наприклад*:

Функціонали

$$f_1(x)=\begin{cases}x-1, & x<3\\ (x-4)^2, & x\geq 3\end{cases};\quad f_2(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x\leq 2\\ x-5, & x>2\end{cases};\quad f_3(x)=\begin{cases}-x-3, & x<-1\\ -1, & x=-1\\ -x^2+4, & x>-1\end{cases}$$

не є узагальнено напівнеперервні відповідно в точках $x_o=3$, $x_o=2$ та $x_o=-1$.

*Висновок:* Отже, функціонал $f$ є узагальнено напівнеперервним в точці розриву I роду (стрибок) $x_o$ при умові

$$|f(x_o)|\geq|A|,\ |f(x_o)|\geq|B|,\ \text{де}\ A=\lim_{x\to x_0-} f(x),\ B=\lim_{x\to x_0+} f(x) \qquad (3)$$

**3)** Нехай $x_o$ – точка розриву II роду ($\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\infty$) та функціонал $f$ визначений в точці $x_o$ (існує скінченне значення $f(x_o)$).

Припустимо $f$ – узагальнено напівнеперервний функціонал в точці $x_o$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\infty$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in R$: $0<x-x_o<\delta \Rightarrow |f(x)|>\frac{1}{\varepsilon}$. Тому для $\forall x\in R$: $0<x-x_o<\delta$

$$\frac{1}{\varepsilon}<|f(x)|<|f(x_o)|+\varepsilon.$$

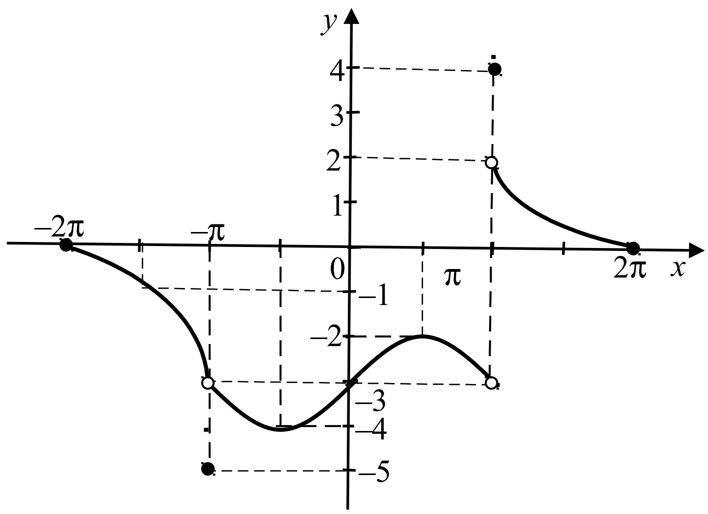
Спрямуємо $\varepsilon\to 0$ і отримуємо

$$+\infty<|f(x_o)|,\ \text{або}\ |f(x_o)|=+\infty.$$

Але за умовою $|f(x_o)|<\infty$. Прийшли до протиріччя. Припущення невірне. *Висновок:* Отже, в точках розриву II роду ($\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\infty$) функціонал $f$ не є узагальнено напівнеперервним.

*Приклад* узагальнено напівнеперервного функціоналу на проміжку [-2π;2π] (див. мал. 1).

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{6\pi}{x}+3, & x\in[-2\pi;-\pi), \\ -5, & x=-\pi, \\ \sin x-3, & x\in(-\pi;\pi), \\ 4, & x=\pi, \\ \dfrac{4\pi}{x}-2, & x\in(\pi;2\pi]. \end{cases}.$$




*Мал. 1. Узагальнено напівнеперервний функціонал*

**Перша теорема Веєрштраса.** Довільний узагальнено напівнеперервний функціонал, що визначений на компакті *K* є обмеженим на ньому.

*Доведення*:

Треба довести, що $\exists C>0\ \forall x\in K\ |f(x)|\le C$. Припустимо, що $\forall C>0\ \exists x\in K\ |f(x)|>C$. Візьмемо

$$C=1\ \exists x_1\in K\ |f(x_1)|>1,$$
$$C=2\ \exists x_2\in K\ |f(x_2)|>2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C=n\ \exists x_n\in K\ |f(x_n)|>n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отримали послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$. Виберемо з неї підпослідовність $x_{n_k}\to x_0$. А це означає. Що $\exists N\ \forall k>N\quad x_{n_k}\in U(x_0)$. За означенням 1 $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|<\left|f(x_0)\right|+\varepsilon$. Тобто $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|$ обмежене числом $|f(x_0)|+\varepsilon$. З іншого боку $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|>n_k$. Якщо $k\to\infty$, то $f\left(x_{n_k}\right)\to\infty$. Прийшли до протиріччя. Припущення невірне. Отже, функціонал обмежений на компакті.

Теорема доведена.

**Друга теорема Веєрштраса.** Нехай на компакті *K* задано узагальнено напівнеперервний функціонал *f*. Тоді $\exists x_1\in K\ \ f(x_1)=\underset{K}{Sup}\{f(x)\}$, якщо $f(x_1)\ge 0$; $\exists x_2\in K\ \ f(x_2)=\underset{K}{Inf}\{f(x)\}$, якщо $f(x_1)\le 0$.

*Доведення*:

За першою теоремою Веєрштраса функціонал $f$ обмежений, тому існують $M = \underset{K}{Sup}\{f(x)\}$, $m = \underset{K}{Inf}\{f(x)\}$.

**1)** Візьмемо $\forall\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\exists x_n \in K$ $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Отримали послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$. З неї виберемо збіжну підпослідовність $x_{n_k} \to x_1$. Для цих точок з одного боку $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| \geq f\left(x_{n_k}\right) > M - \frac{1}{n}$, з іншого – $\exists N$ $\forall k>N$ $x_{n_k} \in U(x_1) \Rightarrow \left|f\left(x_{n_k}\right)\right| < |f(x_1)| + \varepsilon$.

$$M - \frac{1}{n_k} < \left|f\left(x_{n_k}\right)\right| < |f(x_1)| + \frac{1}{n_k}$$

$k \to \infty$ $M \leq |f(x_1)|$.

За умовою $f(x_1) \geq 0$, тому $f(x_1) \geq M$. Але $M$ – точна верхняя межа, тому $f(x_1)=M$.

**2)** Розглянемо функціонал $(-f(x))$. $\underset{K}{Sup}\{-f(x)\} = -m$. За п. 1 $\exists x_2 \in K$ $-f(x_2) = -m$, якщо $-f(x_2) \geq 0$. Отже, якщо $f(x_2) \leq 0$, то $f(x_2)=m$.

Теорема доведена.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функції і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
2. Люстерник Л. А. , Соболев В.И. Элементы функционального анализа.– М.-Л.: ГИТТЛ , 1951.– 360с.
3. Натансон И.П. Теория функции вещественной переменной. – М.: Высшая школа, 1974. – 480с.
4. Таргонський Л.П., Ільчук О.І. Властивості одного класу функціоналів. \\Вісник Житомирського педагогічного університету. (прийнято до друку).

***Степочкина М.В.*** *Обобщенно полунепрерывные функционалы.*
*Про понятие обобщённо полунепрерывных функционалов, про их связь с разными классами множеств функционалов, про условия обобщённо полунепрерывности в точках разрыва, про доказательство теорем Веерштраса для данных функционалов.*

***Styopochkina M.V.*** *The generalized semi-continued functions.*
*The article touches upon the problem of generalized semi-continued functions, their connection with the different classes of functions sets, the conditions of generalized semi-continuity in the points of discontinuity, the proof of Weirstrass's theorem for the given functions.*