Зб. праць Ін-ту математики НАН України 2005, т. 2, № 3, 18–58

УДК 512.64+512.56

**В. М. Бондаренко** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)
**М. В. Степочкина** (Киевский нац. ун-т им. Тараса Шевченка, Киев)

# (MIN, MAX)-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ И КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ТИТСА

У статті отримано опис частково впорядкованих множин із додатно визначеною формою Тітса та мінімальних частково впорядкованих множин, форма Тітса яких не є додатно визначеною.

In this paper we describe all posets with positive definite Tits form and minimal posets with non-positive definite Tits form.

В статье получено описание частично упорядоченных множеств с положительно определенной формой Титса и минимальных частично упорядоченных множеств, форма Титса которых не является положительно определенной.

**1. Введение.** Пусть $S$ — конечное частично упорядоченное множество (сокращенно ч. у. множество). Под подмножеством $X \subseteq S$ мы всегда понимаем полное ч. у. подмножество (т. е. для $x, y \in X$, $x < y$ в $X$ тогда и только тогда, когда $x < y$ в $S$). Подмножество $X$ будем называть *нижним* (соотв. *верхним*), если $x \in S$ всякий раз, когда $x < y$ (соотв. $x > y$) и $y \in S$. Запись $x \not\lessgtr y$ будет означать, что элементы $x$ и $y$ не сравнимы. Множество элементов $x \in S$, несравнимых (соотв. сравнимых) с фиксированным элементом $a \in S$, будем обозначать $S^{\not\lessgtr}(a)$ (соотв. $S(a)$); для подмножеств $Y$ и $Z$ множества $S$ мы пишем

$Y < Z$, если $y < z$ для любых $y \in Y, z \in Z$ (это заведомо выполняется, когда $Y$ или $Z$ является пустым). Одноэлементные подмножества $S$ отождествляются с самими элементами.

Для ч. у. множеств $X$ и $Y$ мы пишем $X =_0 Y$, если $X$ и $Y$ равны как обычные множества (т. е. без рассмотрения порядков на них). Если же $X =_0 Y$ и при этом $x < y$ в $X$ тогда и только тогда, когда $x < y$ в $Y$, то $X$ и $Y$ называются *равными* как ч. у. множества.

Понятие (min, max)-эквивалентности ч. у. множеств введено первым из авторов в работе [1]. Напомним его.

Определим для минимального (соотв. максимального) элемента $a \in S$ ч. у. множество $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $S_a^{\downarrow}$) следующим образом: это объединение (без пересечения) подмножеств $\{a\}$ и $S \setminus a$ с наименьшим частичным порядком, который содержит заданный на $S \setminus a$ порядок, и при этом $a > S^{\nless\!\!\ngtr}(a)$ (соотв. $a < S^{\nless\!\!\ngtr}(a)$). Другими словами, $S_a^{\uparrow} =_0 S$ (соотв. $S_a^{\downarrow} =_0 S$) и отношение частичного порядка задается следующими условиями:

a) $a$ — максимальная (соотв. минимальная) точка $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $S_a^{\downarrow}$);

b) если $x, y \neq a$, то $x < y$ в $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $S_a^{\downarrow}$) тогда и только тогда, когда $x < y$ в $S$;

c) $a > x$ в $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $a < x$ $S_a^{\downarrow}$) тогда и только тогда, когда $a \nless\!\!\ngtr x$ в $S$.

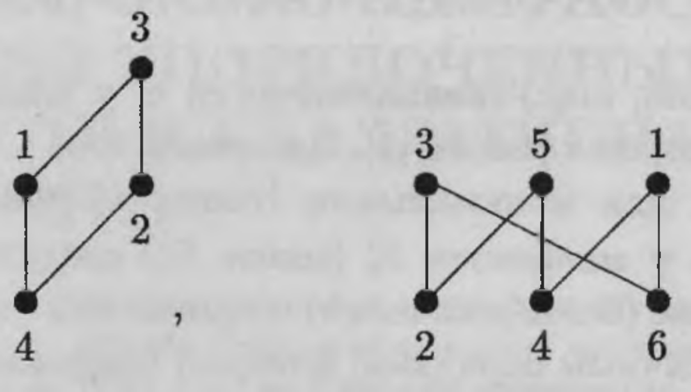
В дальнейшем будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\downarrow}$ и т. д.

Пусть $S$ и $T$ — ч. у. множества, такие, что $S =_0 T$. Ч. у. множество $T$ назовем (min, max)-*эквивалентным* ч. у. множеству $S$, если $T$ равно некоторому ч. у. множеству вида

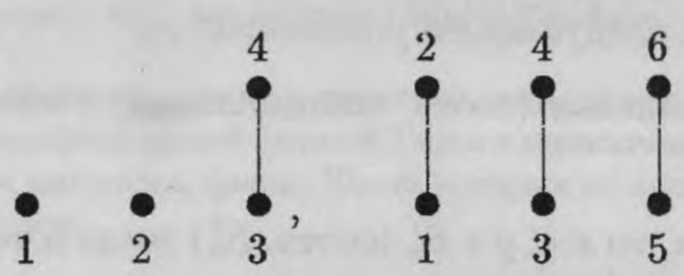
$$\overline{S} = S_{x_1 x_2 \dots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p} \quad (p \geq 0),$$

где $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ и, для $i \in \{1, \dots, p\}$, $x_i$ — минимальная (соотв. максимальная) точка $\overline{S}_{i-1} = S^{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{i-1}}_{x_1x_2\ldots x_{i-1}}$, если $\varepsilon_i =\uparrow$ (соотв. $\varepsilon_i =\downarrow$); при $p = 0$ считаем, что $\overline{S} = S$. Заметим, что мы не требуем, чтобы элементы $x_1, x_2, \ldots, x_p$ были различны. Тот факт, что введенное отношение является отношением эквивалентности, доказан в пункте 3.1.

Например, ч. у. множества $T_1$ и $T_2$ вида




(min, max)-эквивалентны ч. у. множествам $S_1$ и $S_2$ вида




(поскольку $T_1 = (S_1)^{\uparrow\downarrow}_{34}$ и $T_2 = (S_2)^{\uparrow\uparrow\uparrow}_{135}$).

Понятие (min, max)-эквивалентности можно продолжить естественным образом до понятия (min, max)-изоморфизма. Именно, назовем ч. у. множества $S$ и $S'$ (min, max)-*изоморфными*, если существует ч. у. множество $T$, которое (min, max)-эквивалентно $S$ и изоморфно $S'$.

В этой статье мы изучаем связь между свойствами (min, max)-эквивалентных ч. у. множеств и свойствами их квадратичной формы Титса. Напомним, что *квадратичная форма Титса ч. у. множества* $S$ — это форма $q_S(z) : \mathbb{Z}^{S\cup 0} \to \mathbb{Z}$, которая задается следующим равенством:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i$$

(предполагается, что ни один из элементов $S$ не обозначен символом 0); здесь $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел и $\mathbb{Z}^{S\cup 0}$ — множество векторов $z = (z_i)$, где $z_i \in \mathbb{Z}$ и $i \in S \cup 0$. Впервые такая форма рассматривалась в работе [2] в связи с изучением представлений ч. у. множеств конечного типа*).

Главной мотивацией наших исследований является утверждение из [1] о том, что (min, max)-эквивалентные ч. у. множества имеют эквивалентные формы Титса (см. 3.2).

**2. Формулировка основных результатов.** На протяжении всей статьи мы рассматриваем только конечные ч. у. множества.

Напомним, что квадратичная форма $f(z) : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ называется *слабо положительной*, если она принимает положительное значение на любом ненулевом векторе с неотрицательными координатами. Положительно определенную форму мы часто называем просто *положительной.*

Ч. у. множество $S$ назовем *$P$-критическим* (соотв. *$WP$-критическим*), если форма Титса любого его собственного подмножества является положительной (соотв. слабо положительной), но форма Титса самого $S$ таковой не является.

В первой части статьи мы докажем следующие две теоремы (см. §§2–5).

**Теорема 1.** *Для ч. у. множества $S$ следующие условия эквивалентны:*

1) *Форма Титса $S$ положительна.*

2) *Форма Титса произвольного ч. у. множества, которое* (min, max)*-эквивалентно $S$, является слабо положительной.*

---

*) Впервые квадратичная форма Титса введена П. Габриелем для колчанов. Для колчанов с соотношениями форма Титса введена Ш. Бреннер, а для произвольной свободной матричной задачи — А. В. Ройтером.

**Теорема 2.** *Ч. у. множество $S$ является $P$-критическим тогда и только тогда, когда оно* (min, max)*-эквивалентно некоторому $WP$-критическому ч. у. множеству.*

Заметим, что в условиях теорем 1 и 2 (min, max)-эквивалентность можно заменить (min, max)-изоморфизмом. Кроме того, (min, max)-эквивалентность можно заменить min-эквивалентностью или max-эквивалентностью (см. 3.1).

Используя теорему 2 и тот факт, что $WP$-критические ч. у. множества известны, мы в §6 описываем все $P$-критические ч. у. множества.

Наконец, в §7 с помощью метода "(min, max)-эквивалентности" мы описываем все ч. у. множества с положительно определенной формой Титса (используя полученное ранее описание таких ч. у. множеств в случае ширины 2 [3]).

**3. Вспомогательные утверждения.** В этом параграфе мы докажем некоторые утверждения о (min, max)-эквивалентных ч. у. множествах и о квадратичной форме Титса.

**3.1. Свойства (min, max)-эквивалентных ч. у. множеств.** Пусть $S$ — ч. у. множество. Двойственное к $S$ ч. у. множество будем обозначать через $S^{\mathrm{op}}$; другими словами, $S^{\mathrm{op}} =_0 S$ и при этом $x < y$ в $S^{\mathrm{op}}$ тогда и только тогда, когда $x > y$ в $S$.

Всякий раз, когда мы пишем $S_x^{\uparrow}$, $S_y^{\downarrow}$, $S_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ и т. п., мы не всегда указываем, что $x$ является минимальным, $y$ является максимальным и т. п., но всегда предполагается, что выписанные выражения подобного типа имеют смысл.

Непосредственно из определения (min, max)-эквивалентных ч. у. множеств вытекают следующие их свойства.

**Лемма 1.** a) $(S_a^{\uparrow})^{\mathrm{op}} = (S^{\mathrm{op}})_a^{\downarrow}$ *для любого минимального элемента $a \in S$;*

b) $S_{aa}^{\uparrow\downarrow} = S$ *для любого минимального элемента $a \in S$;*

b′) $S_{aa}^{\downarrow\uparrow} = S$ *для любого максимального элемента $a \in S$;*

c) $S^{\uparrow\uparrow}_{ab} = S^{\uparrow\uparrow}_{ba}$ *для любых (различных) минимальных элементов* $a, b \in S$*; при этом в* $S^{\uparrow\uparrow}_{ba}$ *элементы* $a$ *и* $b$ *являются максимальными;*

c′) $S^{\downarrow\downarrow}_{ab} = S^{\downarrow\downarrow}_{ba}$ *для любых (различных) максимальных элементов* $a, b \in S$*; при этом в* $S^{\downarrow\downarrow}_{ba}$ *элементы* $a$ *и* $b$ *являются минимальными.*

**Следствие 2.** *Отношение* (min, max)*-эквивалентности является отношением эквивалентности.*

***Доказательство.*** Очевидно, что каждое ч. у. множество $S$ (min, max)-эквивалентно самому себе (см. определение при $p = 0$). Далее, если

$$\overline{S} = S^{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{p-1}\varepsilon_p}_{x_1x_2\ldots x_{p-1}x_p},$$

то в силу свойств b) и b′)

$$S = \overline{S}^{\,\varepsilon_p^{-1}\varepsilon_{p-1}^{-1}\ldots\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_1^{-1}}_{\,x_px_{p-1}\ldots x_2x_1},$$

где $\varepsilon_i^{-1}$ обозначает стрелку, которая по сравнению со стрелкой $\varepsilon_i$ имеет противоположное направление. Из сказанного следует, что если $T$ (min, max)-эквивалентно $S$, то $S$ (min, max)-эквивалентно $T$. Транзитивность рассматриваемого отношения очевидна. □

В случае, когда ч. у. множества $S$ и $T$ (min, max)-эквивалентны, мы пишем $S \cong_{(\min,\max)} T$ (а запись $S \cong T$ будет обозначать, как обычно, что $S$ и $T$ изоморфны).

Будем тепер изучать ч. у. множества вида $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$. Как и раньше, мы не требуем, чтобы элементы $x_1x_2\ldots x_p$ были различны. Если ч. у. множество $T$ равно некоторому ч. у. множеству вида $\overline{S}$ ($p \geq 0$), то будем говорить, что $T$ является min-эквивалентным ч. у. множеству $S$ и писать $T \cong_{\min} S$.

Последовательность

$$\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad 0 \leq p < \infty,$$

элементов $x_i \in S$ назовем min-*допустимой*, если выражение $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1 x_2 \ldots x_p}$ имеет смысл. Число $p$ называем *длиной* $\alpha$ и обозначаем $d(\alpha)$. В этом случае также пишем $\overline{S} = S^{\uparrow}_{\alpha}$. Заметим, что пустая последовательность $\alpha_0$ (длины 0) является min-допустимой. Множество всех min-допустимых последовательностей элементов из $S$ обозначим $\mathcal{P}(S)$.

Для последовательности $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathcal{P}(S)$ и $0 \leq i \leq p$ положим $\alpha_{(i)} = (x_1, x_2, \ldots, x_i)$ и $\alpha^{(i)} = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)$. Очевидно, что $\alpha_{(i)} \in \mathcal{P}(S)$ и $\alpha^{(i)} \in \mathcal{P}(S^{\uparrow}_{\alpha_{(i-1)}})$. Обозначим, далее, через $[\alpha]_S$ следующее подмножество в $S$:

$$[\alpha]_S = \{x \in S \,|\, x = x_i \ \text{ для некоторого } \ i\}.$$

Кратность вхождения $a \in S$ в $\alpha \in \mathcal{P}(S)$ обозначаем через $m_\alpha(a)$. Другими словами, $m_\alpha(a)$ равно числу таких $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, что $x_i = a$.

**Лемма 3.** *Если $\alpha \in \mathcal{P}(S)$, то подмножество $[\alpha]_S \subseteq S$ является нижним.*

Действительно, если бы в $S$ существовали элементы $a \notin [\alpha]_S$ и $b \in [\alpha]_S$, такие, что $a < b$, а $s$ обозначало наименьшее число такое, что $x_s = b$, то неравенство $a < b$ имело бы место и в $S^{\uparrow}_{\alpha_{(s-1)}}$, т. е. элемент $b$ не являлся бы минимальным в $S^{\uparrow}_{\alpha_{(s-1)}}$.

Множество всех последовательностей

$$\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathcal{P}(S),$$

таких, что $m_\alpha(x) \leq k$ для произвольного $x \in S$, обозначим через $\mathcal{P}_k(S)$. В частности, $\mathcal{P}_1(S)$ — это множество всех min-допустимых последовательностей без повторений (содержащее, между прочим, последовательность $\alpha_0$). Заметим, что $\mathcal{P}_k(S) \subseteq \mathcal{P}_s(S)$, если $k < s$.

Рассмотрим теперь некоторые утверждения, которые связаны со свойствами последовательностей из $\mathcal{P}(S)$ и которые понадобятся нам в дальнейшем. Порядок ч. у. множества $S$ обозначаем через $n$.

**Лемма 4.** *Пусть $S_1$ обозначает множество всех минимальных элементов в $S$ и (индуктивно) $S_i, i > 1$, — множество минимальных элементов в $S \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} S_j)$ (очевидно, что $\cup_{i=1}^{r} S_i = S$, где $r$ — наибольшее $i$ такое, что $S_i \neq \varnothing$); запись $h(x) = i$ для элемента $x \in S$ будет означать, что $x \in S_i$. Тогда всякая последовательность без повторений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такая, что $h(x_1) \leq h(x_2) \leq \ldots \leq h(x_n)$, принадлежит $\mathcal{P}(S)$ (а значит, и $\mathcal{P}_1(S)$).*

Доказательство очевидно.

**Следствие 5.** *Пусть $X$ — подмножество $S$. В $\mathcal{P}_1(S)$ существует последовательность $\alpha$ такая, что $[\alpha] = X$, тогда и только тогда, когда подмножество $X$ нижнее.*

Действительно, необходимость очевидна, а достаточность следует из леммы 4 для ч. у. множества $X$.

**Предложение 6.** *Пусть $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — последовательность из $\mathcal{P}_1(S)$ (тогда $m \leq n$) и пусть $a, b \in S$. Тогда $a < b$ в $\overline{S} = S_\alpha^\uparrow$ в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий:*

a) *$a < b$ в $S$ и либо $a, b \in [\alpha]_S$, либо $a, b \notin [\alpha]_S$;*

b) *$a \not\gtrless b$ в $S$ и $b \in [\alpha]_S, a \notin [\alpha]_S$.*

Доказательство вытекает из определения ч. у. множества $S_x^\uparrow$; поскольку согласно ему $S_x^\downarrow \setminus x = S \setminus x$, то на самом деле следует учитывать только те шаги (перехода от $S$ к $\overline{S}$), которые связаны с элементами $a$ и $b$ (их число равно 0, 1 или 2).

**Следствие 7.** *Если $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ и $[\alpha]_S = S$, то $S_\alpha^\uparrow = S$.*

**Следствие 8.** *Если $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$, то $[\alpha]_{S_\alpha^\uparrow}$ — верхнее ч. у. подмножество в $S_\alpha^\uparrow$, равное $[\alpha]_S$.*

**Следствие 9.** *Если $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1(S)$, причем $\beta$ получается из $\alpha$ перестановкой ее членов (или, другими словами, $[\alpha]_S = [\beta]_S$), то $S_\alpha^\uparrow = S_\beta^\uparrow$.*

Действительно, предложение 6 показывает, что $S_\alpha^\uparrow$ не зависит от того, в какой последовательности расположены ее члены.

Через $S_X^\uparrow$, где $X$ — нижнее подмножество $S$, будем обозначать ч. у. множество $S_\alpha^\uparrow$, где $\alpha$ — последовательность из $\mathcal{P}_1(S)$ такая, что $[\alpha] = X$. Существование таких $\alpha$ следует из леммы 4, а независимость введенного ч. у. множества от выбора $\alpha$ — из следствия 9. Из сказанного следует, что при вычислении порядка на $S_X^\uparrow$ можно не фиксировать соответствующую последовательность, а сразу воспользоваться условиями $a$) и $b$) предложения 6. В частности, $S_S^\uparrow = S$.

Легко видеть (если учесть предложение 6), что имеет место следующее утверждение (которое обобщает утверждение c) леммы 1).

**Лемма 10.** *Пусть $X$ и $Y$ — нижние подмножества $S$, такие, что $x \not\lessgtr y$ для любых $x \in X, y \in Y$. Тогда $(S_X^\uparrow)_Y^\uparrow = (S_Y^\uparrow)_X^\uparrow = S_{X \cup Y}^\uparrow$.*

Из сказанного выше вытекает такое утверждение.

**Предложение 11.** *Следующие условия эквивалентны:*

a) *$T$ min-эквивалентно $S$;*

b) *$T$ (min, max)-эквивалентно $S$.*

***Доказательство.*** Импликация a) $\Rightarrow$ b) очевидна. Импликация b) $\Rightarrow$ a) следует непосредственно из равенства $Y_x^\downarrow = Y_{Y \setminus x}^\uparrow$ (для любого ч. у. множество $Y$ и любого ее максимального элемента), которое в свою очередь следует из равенства $Y_Y^\uparrow = Y$ и утверждения b) леммы 1 (более детально: зафиксируем последовательность $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$ из $\mathcal{P}_1(Y)$, такую, что $[\beta] = Y$ и $y_s = x$, и положим $\beta' = (y_1, y_2, \ldots, y_{s-1})$; тогда $Y_x^{\downarrow} = (Y_Y^{\uparrow})_x^{\downarrow} = (Y_\beta^{\uparrow})_x^{\downarrow} = (Y_{\beta'}^{\uparrow})_{xx}^{\uparrow\downarrow} = Y_{\beta'}^{\uparrow} = Y_{Y\setminus x}^{\uparrow}$). □

Отсюда следует, что отношение min-эквивалентности является отношением эквивалентности.

Естественным образом можно определить min-изоморфизм ч. у. множеств (его вводим, исходя из min-эквивалентности, таким же образом, как раньше определялся (min, max)-изоморфизм, исходя из (min, max)-эквивалентности).

Рассмотренные выше утверждения о последовательностях из $\mathcal{P}_1(S)$ можно обобщить на последовательности из $\mathcal{P}_k(S)$ для любого $k$. Сделаем это только для $k = 2$ (другие случаи в этой статье не нужны).

Для $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{P}_2(S)$ обозначим через $[\alpha]_S^2$ подмножество в $[\alpha]_S$, состоящее из тех элементов $S$, которые встречаются в последовательности $\alpha$ два раза.

**Предложение 12.** *Пусть $\alpha \in \mathcal{P}_2(S)$ и пусть $a, b \in S$. Тогда $a < b$ в $\overline{S} = S_\alpha^{\uparrow}$ в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий:*

a) *$a < b$ в $S$ и $m_\alpha(a) = m_\alpha(b)$;*

b) *$b < a$ в $S$ и $m_\alpha(a) = 0, m_\alpha(b) = 2$;*

c) *$a \not\lessgtr b$ в $S$ и $m_\alpha(b) = m_\alpha(a) + 1$.*

Доказательство следует непосредственно из определений.

**Следствие 13.** *Если $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_2(S)$, причем $\beta$ получается из $\alpha$ перестановкой ее членов (или, другими словами, $[\alpha]_S = [\beta]_S$ и $[\alpha]_S^2 = [\beta]_S^2$), то $S_\alpha^{\uparrow} = S_\beta^{\uparrow}$.*

Действительно, согласно предложению 12 $S_\alpha^{\uparrow}$ не зависит от того, в каком порядке расположены члены $\alpha$.

**Лемма 14.** *Если $\alpha \in \mathcal{P}_2(S)$, то $[\alpha]_S^2$ является нижним подмножеством в $[\alpha]_S$ (а значит и в $S$) и $[\alpha]_S^2 < S \setminus [\alpha]_S$.*

***Доказательство.*** Предположим, что $[\alpha]_S^2$ не является нижним. Тогда существуют элементы $b \in [\alpha]_S^2$ и $a \notin [\alpha]_S^2$ такие, что $a < b$; пусть $i$ и $j > i$ обозначают такие числа, что $x_i = x_j = b$. Поскольку подмножество $[\alpha]_S$ является нижним и $[\alpha]_S^2 \subseteq [\alpha]_S$, то $a \in [\alpha]_S$. Тогда $a = x_s$ для некоторого $s$, и поскольку элемент $b$ является минимальным в $S^{\uparrow}_{\alpha(i-1)}$, то $s < i$, а значит, $a \not\lessgtr b$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(i-1)}$. Следовательно $a < b$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(i)}$ и, значит, в $S^{\uparrow}_{\alpha(j-1)}$, но в этом случае элемент $b$ не является минимальным в $S^{\uparrow}_{\alpha(j-1)}$; поэтому $\alpha$ не является min-допустимым и приходим к противоречию. Далее, предположим, что указанное в условии неравенство не выполняется. Тогда существуют $a \in [\alpha]_S^2$ и $b \in S \setminus [\alpha]_S$ такие, что $a \not\lessgtr b$ (поскольку $[\alpha]_S^2$ — нижнее подмножество, то случай $b < a$ невозможен). Пусть $a = x_i = x_j$, где $i < j$. Так как $b \notin [\alpha]_S$, то $a \not\lessgtr b$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(i-1)}$, а поэтому $b < a$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(i)}$; по той же причине $b < a$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(j-1)}$, и значит, в этом ч. у. множестве $x_j = a$ не может быть минимальным элементом. Снова пришли к противоречию. $\square$

Мы будем писать (по аналогии с последовательностями) $S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ вместо $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = (S^{\uparrow}_{Y})^{\uparrow}_{X}$.

**Лемма 15.** *Пусть $Y$ — нижнее подмножество $S$, а $X$ — нижнее подмножество $Y$, причем $X < S \setminus Y$. Тогда выражение $S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ корректно.*

Действительно, выражение $S^{\uparrow}_{Y}$ корректно в силу следствия 5, а $(S^{\uparrow}_{Y})^{\uparrow}_{X}$ — потому, что в силу условия $X < S \setminus Y$ подмножество $X$ является нижним и в $S^{\uparrow}_{Y}$ (см. предложение 6).

**Предложение 16.** *Пусть $X$ и $Y$ — подмножества $S$. В $\mathcal{P}_2(S)$ существует последовательность $\alpha$, такая, что $[\alpha]_S = Y$ и $[\alpha]_S^2 = X$, тогда и только тогда, когда $Y$ — нижнее подмножество $S$, $X$ — нижнее подмножество $Y$ и при этом $X < S \setminus Y$.*

Действительно, необходимость следует из лемм 3 и 15, а достаточность — это переформулировка предыдущей леммы.

Заметим, что можно изучать ч. у. множества вида $\overline{S} = S^{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$. Для них легко переформулировать все, что было сказано выше для ч. у. множеств вида $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$ (в частности, ввести понятия max-эквивалентности и max-изоморфизма ч. у. множеств). Соответствующие определения и доказательства рассматриваются аналогичным образом; их можно также получить из приведенных выше при помощи перехода к двойственному ч. у. множеству, учитывая следующее утверждение, которое является обобщением утверждения а) леммы 1 и вытекает из равенства $S^{\uparrow\uparrow}_{XS\setminus X} = S$.

**Лемма 17.** *Пусть $X$ — нижнее подмножество $S$. Тогда $S^{\uparrow}_{X} = S^{\downarrow}_{S\setminus X}$.*

В качестве примера приведем еще одно полезное утверждение о связи между min- и max-эквивалентностью.

Пусть $Y$ и $X$ удовлетворяют условиям леммы 15, т. е. $Y$ — нижнее подмножество $S$, $X$ — нижнее подмножество $Y$ и при этом $X < S\setminus Y$. Поскольку подмножество $Y$ однозначно задается подмножеством $Z = S\setminus X$, то вместо $Y$ и $X$ можно рассматривать подмножества $Z$ и $X$, такие, что $Z$ — верхнее подмножество $S$, $X$ — нижнее подмножество $Y$, причем $Z \cap X = \varnothing$ и $X < Z$. При этом ч. у. множество $S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ вычисляется в новых терминах следующим образом.

**Лемма 18.** $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = S^{\uparrow\downarrow}_{XS\setminus Y} = S^{\downarrow\uparrow}_{S\setminus YX}$.

Действительно, из $S^{\uparrow}_{Y} = (S^{\uparrow}_{Y})^{\uparrow\downarrow}_{S\setminus YS\setminus Y} = (S^{\uparrow\uparrow}_{YS\setminus Y})^{\downarrow}_{S\setminus Y} = S^{\downarrow}_{S\setminus Y}$ имеем $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = S^{\downarrow\uparrow}_{S\setminus YX}$, а из $S^{\downarrow}_{S\setminus Y} = (S^{\uparrow\downarrow}_{XX})^{\downarrow}_{S\setminus Y} = (S^{\uparrow}_{X})^{\downarrow\downarrow}_{XS\setminus Y} = (S^{\uparrow}_{X})^{\downarrow}_{X\cup(S\setminus Y)} = (S^{\uparrow}_{X})^{\downarrow\downarrow}_{S\setminus YX}$ имеем $S^{\downarrow\uparrow}_{S\setminus YX} = (S^{\uparrow\downarrow}_{XS\setminus Y})^{\downarrow\uparrow}_{XX} = S^{\uparrow\downarrow}_{XS\setminus Y}$, откуда $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = S^{\uparrow\downarrow}_{XS\setminus Y}$. Равенство $S^{\uparrow\downarrow}_{XS\setminus Y} = S^{\downarrow\uparrow}_{S\setminus YX}$ вытекает из предложения 6 и двойственного к нему предложения.

Подчеркнем, что в силу предложения 11 вместо (min, max)-эквивалентности можно рассматривать min-эквивалентность или max-эквивалентность (в частности, это касается теорем 1 и 2), но по формальным соображениям мы не всегда будем это делать.

**3.2. Свойства квадратичной формы Титса, связанные с положительной определенностью.** Главной мотивацией наших исследований является следующее утверждение из работы [1].

**Предложение 19.** *Пусть $S$ и $T$ — (min, max)-эквивалентные ч. у. множества. Тогда их формы Титса эквивалентны.*

Предложение вытекает из следующего (легко проверяемого) равенства для формы Титса $q_X(z)$ ч. у. множества $X$ и формы Титса $q_Y(z)$ ч. у. множества $Y = X_a^{\uparrow}$ (соотв. $Y = X_a^{\downarrow}$): $q_X(z) = q_Y(z')$, где $z_0' = z_0 - z_a$, $z_x' = z_x$ при $x \neq a$ и $z_a' = -z_a$.

**Следствие 20.** *Пусть $S \cong_{(\min,\max)} T$. Тогда формы $q_S(z)$ и $q_T(z)$ одновременно либо являются, либо не являются положительными.*

Всякое линейно упорядоченное множество называем *цепным*, а ч. у. множество с единственной парой несравнимых элементов — *почти цепным.*

Мы называем ч. у. множество $S$ *суммой* своих подмножеств $A_1, ..., A_s$ и пишем $S = A_1 + \ldots + A_s$, если они попарно не пересекаются и их объединение равно $S$; если при этом элементы, принадлежащие различным слагаемым, всегда не сравнимы, то $S$ называется прямой суммой заданных подмножеств и обозначается $S = A_1 \coprod \ldots \coprod A_s$. Далее, сумма $S = A_1 + \ldots + A_s$ называется *односторонней*, если, с точностью до нумерации слагаемых, $i < j$ всякий раз, когда существуют элементы $b \in A_i$ и $c \in A_j$ для $i \neq j$ такие, что $b < c$. Наконец, сумма $S = A_1 + \ldots + A_s$ называется *минимаксной*, если из $x < y$, где $x$ и $y$ принадлежат разным слагаемым, следует, что $x$ является минимальным, а $y$ максимальнмм элементом множества $S$. Заметим, что прямая сумма является как односторонней, так и минимаксной.

Последние два понятия введены в работе [4]. В этой же работе доказано следующее утверждение.

**Предложение 21.** *Если ч. у. множество $S$ является односторонней минимаксной суммой двух цепных множеств или прямой суммой цепного и почти цепного множеств, то его форма Титса является положительной.*

Наконец, рассмотрим утверждение о положительной определенности формы Титса для некоторых ч. у. упорядоченных множеств, которое понадобится в дальнейшем.

**Лемма 22.** *Квадратичная форма Титса является положительной для следующих ч. у. множеств:*

$T_1 = \{1,2,3,4,5,6,7 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$;

$T_2 = \{1,2,3,4,5,6,7 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5, 6 \prec 7, 4 \prec 7\}$;

$T_3 = \{1,2,3,4,5,6,7 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 7\}$;

$T_4 = \{1,2,3,4,5,6,7 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7, 2 \prec 6, 3 \prec 7\}$.

Лемма вытекает из следующих равенств:

$q_{T_1}(z) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 + z_7^2 + z_2z_3 + z_4z_5 + z_4z_6 + z_4z_7 + z_5z_6 + z_5z_7 + z_6z_7 - z_0(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7) = (z_1 - 1/2z_0)^2 + (z_2 + 1/2z_3 - 1/2z_0)^2 + 3/4(z_3 - 1/3z_0)^2 + (z_4 + 1/2z_5 + 1/2z_6 + 1/2z_7 - 1/2z_0)^2 + 3/4(z_5 + 1/3z_6 + 1/3z_7 - 1/3z_0)^2 + 2/3(z_6 + 1/4z_7 - 1/4z_0)^2 + 5/8(z_7 - 1/5z_0)^2 + 1/60z_0^2$,

$q_{T_2}(z) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 + z_7^2 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 + z_4z_5 + z_4z_7 + z_6z_7 - z_0(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7) = (z_1 + 1/2z_2 + 1/2z_3 - 1/2z_0)^2 + 3/4(z_2 + 1/3z_3 - 1/3z_0)^2 + 2/3(z_3 - 1/4z_0)^2 + (z_4 + 1/2z_5 + 1/2z_7 - 1/2z_0)^2 + 3/4(z_5 - 1/3z_7 - 1/3z_0)^2 + (z_6 + 1/2z_7 - 1/2z_0)^2 + 5/12(z_7 - 1/5z_0)^2 + 1/40z_0^2$,

$q_{T_3} = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 + z_7^2 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_2z_7 + z_3z_4 + z_5z_6 + z_5z_7 + z_6z_7 - z_0(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7) = (z_1 - 1/2z_0)^2 + (z_2 + 1/2z_3 + 1/2z_4 + 1/2z_7 - 1/2z_0)^2 + 3/4(z_3 + 1/3z_4 -$

$1/3z_7 - 1/3z_0)^2 + 2/3(z_4 - 1/4z_7 - 1/4z_0)^2 + (z_5 + 1/2z_6 + 1/2z_7 - 1/2z_0)^2 + 3/4(z_6 + 1/3z_7 - 1/3z_0)^2 + 7/24(z_7 - 1/7z_0)^2 + 1/28z_0^2$,

$$q_{T_4} = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 + z_7^2 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_2z_6 + z_2z_7 + z_3z_4 + z_3z_7 + z_5z_6 + z_5z_7 + z_6z_7 - z_0(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7) = (z_1 - 1/2z_0)^2 + (z_2 + 1/2z_3 + 1/2z_4 + 1/2z_6 + 1/2z_7 - 1/2z_0)^2 + 3/4(z_3 + 1/3z_4 - 1/3z_6 + 1/3z_7 - 1/3z_0)^2 + 2/3(z_4 - 1/4z_6 - 1/2z_7 - 1/4z_0)^2 + (z_5 + 1/2z_6 + 1/2z_7 - 1/2z_0)^2 + 3/8(z_6 - 1/3z_0)^2 + 1/4z_7^2 + 1/12z_0^2.$$

**4. *WP*-критические ч. у. множества.** Из основных результатов работ [2] и [5] следует, что ч. у. множество является $WP$-критическим тогда и только тогда, когда оно изоморфно одному из следующих ч. у. множеств:

$\mathcal{K}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, где все элементы попарно не сравнимы;
$\mathcal{K}_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \,|\, 1 \prec 2, 3 \prec 4, 5 \prec 6\}$;
$\mathcal{K}_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7\}$;
$\mathcal{K}_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8\}$;
$\mathcal{K}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6, 7 \prec 8, 5 \prec 8\}$.

Более детально, М. М. Клейнер в работе [5] доказал, что $S$ является ч. у. множеством конечного типа (т. е. имеет, с точностью до эквивалентности, конечное число неразложимых представлений) тогда и только тогда, когда оно не содержит в качестве подмножеств ч. у. множеств $\mathcal{K}_1$–$\mathcal{K}_5$, а Ю. А. Дрозд в работе [2] доказал, что ч. у. множество $S$ имеет конечный тип тогда и только тогда, когда его форма Титса является слабо положительной. Ч. у. множества $\mathcal{K}_1$–$\mathcal{K}_5$ часто называют *критическими множествами Клейнера.*

Далее, нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 23.** *Всякое $WP$-критическое ч. у. множество является $P$-критическим.*

***Доказательство.*** Пусть $S$ — $WP$-критическое ч. у. множество. Очевидно, что $S$ не является положительным. Покажем, что любое собственное подмножество в $S$ имеет положительную форму Титса (для пустого подмножества это очевидно).

Согласно сказанному выше $WP$-критические ч. у. множества исчерпываются критическими множествами Клейнера $\mathcal{K}_s$ ($s = 1, \ldots, 5$). Легко видеть, что каждое собственное подмножество в $\mathcal{K}_s$ либо является прямой суммой $L = L_1 \coprod L_2$ цепного подмножества $L_1$ и цепного или почти цепного подмножества $L_2$, либо изоморфно подмножеству одного из следующих ч. у. множеств:

$$T_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\},$$

$$T_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \,|\, 1 \prec 2 \prec 3, 4 \prec 5, 6 \prec 7, 4 \prec 7\}.$$

Итак, достаточно убедится в том, что форма Титса является положительной для ч. у. множеств $L$ и $T = T_1, T_2$, а это следует соответственно из предложения 21 и леммы 22. □

**5. Доказательство теорем 1 и 2.** Ширину ч. у. множества $S$ (максимальное число ее попарно несравнимых элементов) обозначаем через $w(X)$. Для элемента $a \in S$ обозначим через $S^{<}(a)$ или $\{a\}^{<}$ (если $S$ фиксировано) подмножество всех $x \in S$, таких, что $x < a$, и положим $S^{\leq}(a) = \{a\}^{\leq} = S^{<}(a) \cup a$.

Напомним, что через $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_5$ обозначены критические множества Клейнера. Будем говорить, что ч. у. множество $T$ имеет вид $\mathcal{K} = \mathcal{K}_i$, если $T \cong \mathcal{K}$; если же $T$ содержит подмножество, изоморфное $\mathcal{K}$, то будем просто говорить, что $T$ содержит $\mathcal{K}$.

Основным при доказательстве теорем является следующее утверждение.

**Предложение 24.** *Пусть $S$ — такое ч. у. множество, что любое* (min, max)*-эквивалентное ему ч. у. множество не содержит критических множеств Клейнера. Тогда $S$ имеет положительно определенную. форму Титса.*

Зафиксируем в $S$ некоторый максимальный элемент $a$. Тогда в $S' = S^{\uparrow}_{\{a\}^{<}}$ элемент $a$ является как максимальным, так и минимальным, а значит $S' = \{a\} \coprod (S' \setminus a)$. Отсюда вытекает, что существует ч. у. множество $T$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $T \cong_{(\min,\max)} S$;

2) $T = A \coprod B$, где $w(A) = 1$;

3) не существует $T'$, $A'$ и $B'$ таких, что выполняются условия 1), 2) и $|A'| > |A|$.

Если при этом $B = \varnothing$, то $w(T) = 1$, а если $w(B) = 1$, то $T$ — прямая сума двух ч. у. множеств ширины 1; в обоих случаях согласно предложению 21 $T$ имеет положительно определенную форму Титса; а значит по предложению 19 такой же есть и форма Титса ч. у. множества $S$. Случай $w(B) \geq 3$ невозможен, так как тогда $T$ содержало бы критическое множество $\mathcal{K}_1$. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $w(B) = 2$.

**Лемма 25.** *Пусть $w(B) = 2$. Тогда*

a) *$B$ имеет два минимальных элемента, например $b$ и $c$, и два максимальных элемента, например $f$ и $g$;*

b) *в $B$ существуют несравнимые между собой минимальный и максимальный элементы;*

c) *если $b < x < f$ и $c < y < g$, то $x$ и $y$ не сравнимы.*

Действительно, если $B$ имеет один минимальный (соотв. максимальный) элемент, например $h$, то $T' = T_h^{\uparrow}$ (соотв. $T' = T_h^{\downarrow}$) равно $(B \setminus h) \coprod (A \cup h)$, где $w(A \cup h) = 1$, а это противоречит выбору $T$. Далее, если условие b) не выполняется, то (учитывая условие a)) имеем, что подмножество в $S_{bc}^{\uparrow\uparrow}$, состоящее из элементов $b, c, f, g$, имеем вид $\mathcal{K}_1$, а это противоречит условию предложения. Наконец, если не выполняется условие c) (а условия a) и b) выполняются), то подмножество в $(S_{\{x\}\leq}^{\uparrow})_c^{\uparrow}$, состоящее из элементов $b, x, y, g, f, c$, имеем вид $\mathcal{K}_2$ и снова приходим к противоречию.

Продолжаем доказательство предложения. Если $B$ является прямой суммой двух подмножеств ширины 1, то очевидно, что $T$ либо является прямой суммой подмножества ширины 1 и подмножества, состоящего из двух несравнимых элементов, либо содержит подмножество Клейнера, либо является собственным подмножеством некоторого множества Клейнера. Второй случай невозможен, а в первом и третьем случаях $T$ имеет положительно определенную форму Титса (соотв. в силу предложения 21 и леммы 23). В противном случае в силу последней леммы возможны (з точностью до изоморфизма) только такие два случая:

1) $T = A\coprod B$, где $A = \{z_1 < z_2 \ldots < z_r\}, r > 0$, и $B = \{x_1 < x_2 \ldots < x_p, y_1 < y_2 \ldots < y_q, x_i < y_j\}$; здесь $i = 1, j > 1$ или $i < p, j = q$;

2) $T = A\coprod B$, где $A = \{z_1 < z_2 \ldots < z_r\}, r > 0$, и $B = \{x_1 < x_2 \ldots < x_p, y_1 < y_2 < \ldots < y_q, x_1 < y_j, x_i < y_q\}$; здесь $1 < i < p$, $1 < j < q$.

Заметим, что в случае 1) $p, q > 1$, а в в случае 2) — $p, q > 2$.

А) Остановимся сначала на случае 1) при $i = 1, j = q$. При этом будем считать, что $p \leq q$ (случай $p \geq q$ рассматривается двойственным образом). Тогда $r < 4$, иначе $T$ содержит $\mathcal{K}_5$.

Если $r = 2, 3$, то $p = q = 2$, иначе $T$ содержит $\mathcal{K}_2$; а тогда, в силу леммы 23, $T$ имеет положительную форму Титса. Если же $r = 1$, то при $q = 2, 3$ форма Титса множества $T$ является положительной в силу леммы 22 (см. множество $T_3$), а при $p = 2, q = 4$ — в силу того, что $T^{\downarrow}_{y_4}$ изоморфно $T_2$ (опять-таки по лемме 22); остальные случаи невозможны: если $p > 2, q = 4$, то $T$ содержит $\mathcal{K}_3$, а если $q > 4$, то $T^{\uparrow}_{y_q}$ содержит $\mathcal{K}_5$.

В) Рассмотрим теперь случай 1) при $(i, j) \neq (1, q)$. Будем считать, что $i \neq 1, j = q$ (случай $i = 1, j \neq q$ рассматривается двойственным образом). Тогда $q = 2$, так как в противном случае подмножество в $T^{\downarrow}_{y_q}$, состоящее из элементов $y_q, z_1, x_1, x_2, y_1, y_2$, имеет вид $\mathcal{K}_2$. И если $r = 1$, то $(T^{\uparrow}_{\{x_i\}_{\leq}})^{\uparrow}_{y_1}$ имеет вид, рассмотренный в А), а если $r > 1$, то $i = p - 1$ (иначе подмножество в $T$, состоящее из точек $z_1, z_2, x_{p-1}, x_p, y_1, y_2$, имеет вид $\mathcal{K}_2$) и тогда уже $T^{\downarrow}_{y_2}$ имеет вид, рассмотренный в А). Таким образом, все сводится к уже рассмотренному случаю А).

С) Рассмотрим, наконец, случай 2). Будем считать, что $p \leq q$ (случай $p \geq q$ рассматривается двойственным образом). Тогда $r = 1$, так как в противном случае подмножество в $T$, состоящее из элементов $z_1, z_2, x_i, x_p, y_1, y_j$, имеет вид $\mathcal{K}_2$. Далее, $p = 3$, иначе $T \setminus \{x_1, y_q\}$ содержит $\mathcal{K}_3$. Кроме того, и $q = 3$, так как при $q > 4$ $T^{\downarrow}_{y_q}$ содержит $\mathcal{K}_5$, а при $q = 4, j = 2$ (соотв. $q = 4, j = 3$) множество $T^{\uparrow}_{x_1}$ (соотв. $T^{\downarrow}_{y_q}$) содержит $\mathcal{K}_2$.

Итак, ч. у. множество $T$ изоморфно множеству $T_4$ из леммы 22, а по этой лемме оно имеет положительно определенную форму Титса.

Предложение доказано.

Нам понадобится еще и следующая лемма.

**Лемма 26.** *Пусть $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{P}(S)$ и $X$ — ч. у. подмножество $S$. Обозначим через $\alpha_X$ подпоследовательность $\alpha$, состоящую из всех $x_i \in X$. Тогда $\alpha_X \in \mathcal{P}(X)$ и $X^{\uparrow}_{\alpha_X}$ — полное ч. у подмножество $S^{\uparrow}_{\alpha}$.*

***Доказательство.*** Доказательство будем проводить индукцией по $m$. База индукции тривиальна.

Покажем, что $\alpha_X \in \mathcal{P}(X)$. Очевидно, что $\alpha^{(2)} \in \mathcal{P}(S^{\uparrow}_{x_1})$. И если $x_1 \neq X$, то $\alpha^{(2)}_X = \alpha_X$, и значит, $X$ является подмножеством $S^{\uparrow}_{x_1}$. Тогда в силу индукционного предположения для $S' = S^{\uparrow}_{x_1}$, $\alpha' = \alpha^{(2)}$ и $X' = X$, во-первых, $\alpha^{(2)}_X \in \mathcal{P}(X)$, а поэтому $\alpha_X \in \mathcal{P}(X)$, и во-вторых, $X^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}_X}$ — полное подмножество в $(S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}}$, а тогда $X^{\uparrow}_{\alpha_X}$ — полное подмножество в $S^{\uparrow}_{\alpha}$ (так как $\alpha^{(2)}_X = \alpha_X$ и $(S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}} = S^{\uparrow}_{\alpha}$). Если же $x_1 \in X$, то $X^{\uparrow}_{x_1}$ является подмножеством $S^{\uparrow}_{x_1}$, и в силу индукционного предположения для $S' = S^{\uparrow}_{x_1}$, $\alpha' = \alpha^{(2)}$ и $X' = X^{\uparrow}_{x_1}$ имеем, что $\alpha^{(2)}_X \in \mathcal{P}(X^{\uparrow}_{x_1})$. И поскольку $\alpha_X = (x_1, \alpha^{(2)}_X)$ и $x_1$ — минимальный элемент $S$, то $\alpha_X \in \mathcal{P}(X)$. Далее, в силу того же индукционного предположения $(X^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\beta}$ является полным ч. у подмножеством $(S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}}$, где $\beta = \alpha^{(2)}_{X^{\uparrow}_{x_1}}$. Так как $\beta = \alpha^{(2)}_X$, то $(X^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\beta} = X^{\uparrow}_{\alpha X}$; кроме того, $(S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}} = S^{\uparrow}_{\alpha}$. Следовательно, $X^{\uparrow}_{\alpha X}$ — полное ч. у подмножество $S^{\uparrow}_{\alpha}$. □

Теперь уже легко доказать теоремы 1 и 2.

Рассмотрим сначала теорему 2. Если ч. у. множество $S$ (min, max)-эквивалентно $WP$-критическому множеству $\mathcal{K}$, то в силу леммы 23 и следствия 20 форма Титса $q_S(z)$ не является положительной. Заметим, что силу предложения 11 $\mathcal{K}$ и $S$ min-эквивалентны, а тогда легко видеть, что из леммы 26 (с учетом следствия 20 и леммы 23) следует, что каждое собственное подмножество $T \subset S$ имеет положительную форму Титса; действительно, в противном случае $\mathcal{K}$ имело бы собственное подмножество $Q$ (min-эквивалентное $T$) с неположительной формой Титса, а это противоречило бы тому факту, что множество $\mathcal{K}$ является $P$-критическим. Итак, $S$ является $P$-критическим.

Наоборот, если $S$ является $P$-критическим, то в силу предложения 24 оно (min, max)-эквивалентно (а значит и min-эквивалентно) некоторому ч. у. множеству $S'$, которое содержит $WP$-критическое множество $K \cong \mathcal{K}_i$. Но тогда (опять-таки в силу леммы 26 и следствия 20) $S' = K$, т. е. в итоге $S$ min-эквивалентно $K$.

Переходим к теореме 1. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) вытекает из следствия 20 и того факта, что положительная форма является слабо положительной. Если же выполняется 2), то произвольное ч. у. множество, которое (min, max)-эквивалентно множеству $S$, не содержит $WP$-критических подмножеств. Следовательно в силу предложения 24 $S$ имеет положительно определенную форму Титса.

**6. Описание $P$-критических ч. у. множеств.** В силу теоремы 2 любое $P$-критическое ч. у. множество (min, max)-эквивалентно некоторому $WP$-критическому ч. у. множеству. Поэтому получить все $P$-критические множества можно следующим образом: взять все $WP$-критические множества, которые исчерпываются критическими множествами Клейнера, и для каждого из них описать все (min, max)-эквивалентные ему ч. у. множества (говоря "все", мы подразумеваем "все с точностью до изоморфизма"). В силу предложения 11 вместо (min, max)-эквивалентных множеств можно рассматривать min-эквивалентные, что формально более удобно.

Рассмотрим некоторые утверждения, которые позволяют модифицировать предложенный метод (сделав его более понятным и эффективным). При этом мы будем рассматривать общий случай, а не только случай критических множеств Клейнера.

Пусть $S$ — произвольное ч. у. множество и $n = |S|$.

**Лемма 27.** *Пусть $\alpha$ — последовательность из $\mathcal{P}(S)$ и при этом $[\alpha]_S = S$. Тогда существует последовательность $\beta \in \mathcal{P}(S)$ длины $d(\beta) = d(\alpha) - n$, такая, что $S^{\uparrow}_{\beta} = S^{\uparrow}_{\alpha}$.*

***Доказательство.*** Доказательство будем проводить индукцией по $d(\alpha)$. База индукции, а именно случай $d(\alpha) = n$, имеет место в силу следствия 7 (в качестве $\beta$ нужно взять пустую последовательность).

Пусть теперь $p = d(\alpha) > n$. Полагаем $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ и обозначаем через $s = s(\alpha)$ наименьшее число, такое, что $m_\alpha(x_s) > 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда $s = 1$. Заметим, что $S^{\uparrow}_{\alpha} = (S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}}$. Применяя индукционное предположение к множеству $S' = S^{\uparrow}_{x_1}$ и последовательности $\alpha' = \alpha^{(2)}$ длины $d(\alpha') = p - 1$, получаем, что существует последовательность $\beta' \in \mathcal{P}(S') = \mathcal{P}(S)$ длины $d(\beta') = p - 1 - n$, такая, что $(S')^{\uparrow}_{\alpha'} = (S')^{\uparrow}_{\beta'}$, т. е. $(S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\alpha^{(2)}} = (S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\beta'}$ или $S^{\uparrow}_{\alpha} = (S^{\uparrow}_{x_1})^{\uparrow}_{\beta'}$. Последнее равенство можно записать таким образом: $S^{\uparrow}_{\alpha} = S^{\uparrow}_{\beta}$, где $\beta = (x_1, \beta')$. Поскольку $d(\beta) = d(\beta') + 1 = p - n$, то лемма в этом случае доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $s > 1$. Тогда $m_\alpha(x_i) = 1$ для $i = 1, \ldots, s - 1$. Легко видеть, что $x_j$ при $1 \leq j < s$ и $x_s$ не сравнимы в $S$. Действительно, в противном случае $x_j < x_s$ в $S$ (так как $x_j \not> x_s$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(j-1)}$ согласно определению последовательностей из $\mathcal{P}$), и значит в действительности $x_j < x_s$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(j-1)}$, а поэтому $x_j < x_s$ и в $S^{\uparrow}_{\alpha(s)}$; но поскольку $x_j$ (как элемент $S$) не встречается в $\alpha^{(s+1)}$, а $x_s = x_t$ для некоторого $t > s$, то элемент $x_t$ не может быть минимальным в $S^{\uparrow}_{\alpha(t-1)}$, и мы приходим к противоречию. Итак, $x_1, \ldots, x_{s-1}$ не сравнимы с $x_s$, а тогда в силу следствия 9 $S^{\uparrow}_{\alpha} = S^{\uparrow}_{\alpha'}$, где $\alpha' = (x_s, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_p)$. Но поскольку $m_{\alpha'}(x_s) = m_\alpha(x_s) > 1$ и $s(\alpha') = 1$, то мы пришли к уже рассмотренному выше случаю. □

**Следствие 28.** *Пусть* $T \cong_{\min} S$. *Тогда существует последовательность* $\gamma \in \mathcal{P}_2(S)$ *такая, что* $T = S^{\uparrow}_{\beta}$.

***Доказательство.*** Зафиксируем последовательность $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathcal{P}(S)$ такую, что $T = S^{\uparrow}_{\alpha}$, и пусть $\alpha \notin \mathcal{P}_2(S)$. Покажем, что $[\alpha]_S = S$.

Предположим противное и зафиксируем элемент $a \in S \setminus [\alpha]_S$. Пусть $x_s, x_t$ и $x_r$ $(s < t < r)$ — равные между собой члены последовательности $\alpha$, $m_{\alpha(x_r)}(x_r) = 3$. В силу леммы 3 $a \not\asymp x_s$ или $a > x_s$. И в первом случае $a < x_s$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(s)}$, а значит и в $S^{\uparrow}_{\alpha(t-1)}$, но тогда $x_t$ не является минимальным элементом в $S^{\uparrow}_{\alpha(t-1)}$, и мы пришли к противоречию. Во втором случае $a \not\asymp x_s$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(t-1)}$, а значит $a < x_s$ в $S^{\uparrow}_{\alpha(r-1)}$, но тогда $x_r$ не является минимальным в $S^{\uparrow}_{\alpha(r-1)}$ и снова пришли к противоречию.

Итак, $[\alpha]_S = S$, а тогда в силу леммы 27 существует последовательность $\beta$ длины $d(\beta) = d(\alpha) - n$, такая, что $S^{\uparrow}_{\beta} = S^{\uparrow}_{\alpha}$. Если при этом $\beta \notin \mathcal{P}_2(S)$, то снова применим указанные рассуждения и т. д. За конечное число шагов мы придем к нужной последовательности $\gamma$. □

В силу следствия 28 для описании всех ч. у. множеств, min-эквивалентных фиксированному ч. у. множеству

$S$, достаточно ограничиться последовательностями из $\mathcal{P}_2$. Если учесть изложенное в 3.1, то такое описание можно проводить по такой схеме:

I. Описать все нижние подмножества $X \neq S$ в $S$, и для каждого из них построить ч. у. множество $S_X^{\uparrow}$.

II. Описать все пары $(Y, X)$, состоящие из собственного нижнего подмножества $Y$ в $S$ и непустого нижнего подмножества $X$ в $Y$ такого, что $X < S \setminus Y$; для каждой такой пары построить ч. у. множество $S_{YX}^{\uparrow\uparrow}$.

III. Среди полученных в I и II ч. у. множеств выбрать по одному из каждого класса изоморфных множеств.

Назовем уазанные в I подмножества $X$ и $X'$ *сильно изоморфными*, если существует автоморфизм $\varphi : S \to S$, такой, что $\varphi(X) = X'$ (как ч. у. подмножества). Аналогично, две указанные в II пары $(Y, X)$ и $(Y', X')$ назовем *сильно изоморфными*, если существует автоморфизм $\varphi : S \to S$, такой, что $\varphi(Y) = Y'$ и $\varphi(X) = X'$. Очевидно, что подмножества в I и пары подмножеств в II достаточно описывать с точностью до сильного изоморфизма.

Заметим, что если воспользоваться равенством $S_X^{\uparrow} = (S_{S\setminus X}^{\mathrm{op}\uparrow})^{\mathrm{op}}$, то в случае $S^{\mathrm{op}} = S$ число множеств $S_X^{\uparrow}$, которые необходимо вычислять, можно уменьшить. Однако в нашем случае вычисления не очень громоздки и мы этим пользоваться не будем.

Напомним также, что ч. у. множества $S$ и $T$ называются *антиизоморфными*, если $S$ изоморфно $T^{\mathrm{op}}$.

Теперь уже можно описать все $P$-критические ч. у. множества.

**Теорема 3.** *$P$-критические ч. у. множества исчерпываются, с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма, ч. у. множествами* 1)–75)*, указанными в таблице 1.*

Перед доказательством теоремы сделаем некоторые замечания к таблице 1 (которая помещена в конце статьи).

Указанное в таблице 1 ч. у. множество под номером $i$ обозначаем через $C_i$. Если множество $C_i$ имеет ширину 2 и в таблице написано $i = j'$, то это означает, что $C_i$ можно получить из $C_j$ заменой единственной ее максимальной точки на единственную минимальную точку; другими словами, $C_j = T \cup a, T < a$, а $C_i = T \cup a, a < T$. Заметим, что тогда $C_i \cong (C_j)^{\downarrow\downarrow}_{aa}$. То же самое касается и случая $i = j'' = (j')'$ (нужно сравнивать $C_i$ и $C_{j'}$). Если множество $C_i$ имеет ширину 3 и в таблице написано $i = j'$, то это означает, что сказанное выше относится уже не к $C_i$ и $C_j$, а к их связным компонентам (прямым слагаемым) ширины 2. Заметим, что и здесь $C_i$ и $C_j$ (min, max)-эквиваленины: если $a$ — максимальный элемент указанной компоненты ширины 2 (множества $C_j$), а $b$ — максимальный элемент компоненты ширины 1, то $C_i \cong (C_j)^{\downarrow\downarrow}_{ab}$. То же самое касается и случая $i = j''$.

Произвольные ч. у. множества $S$ и $T$, которые получаются друг из друга при помощи подобных операций назовем 0-изоморфными. И если из таблицы 1 выбросить множества с номерами $i = j'$ и $i = j''$, то получим описание $P$-критических множеств с точностью до 0-изоморфизма и двойственности.

**Доказательство теоремы 3.** Используем указанную схему с учетом сказанного в начале этого параграфа.

**Шаг I.** Опишем (с точностью до сильного изоморфизма) все нижние помножества в критических множествах Клейнера $\mathcal{K}_1$–$\mathcal{K}_5$ (см. §4). Ими будут:

для $\mathcal{K}_1$ — $A_{1,1} = \varnothing$, $A_{1,2} = \{1\}$, $A_{1,3} = \{1,2\}$, $A_{1,4} = \{1,2,3\}$;

для $\mathcal{K}_2$ — $A_{2,1} = \varnothing$, $A_{2,2} = \{1\}$, $A_{2,3} = \{1,2\}$, $A_{2,4} = \{1,3\}$, $A_{2,5} = \{1,2,3\}$, $A_{2,6} = \{1,3,5\}$, $A_{2,7} = \{1,2,3,4\}$, $A_{2,8} = \{1,2,3,5\}$, $A_{2,9} = \{1,2,3,4,5\}$,

для $\mathcal{K}_3$ — $A_{3,1} = \varnothing$, $A_{3,2} = \{1\}$, $A_{3,3} = \{3\}$, $A_{3,4} = \{2,3\}$, $A_{3,5} = \{1,2\}$, $A_{3,6} = \{3,5\}$, $A_{3,7} = \{2,3,4\}$, $A_{3,8} = \{1,2,3\}$, $A_{3,9} = \{2,3,5\}$, $A_{3,10} = \{1,2,5\}$, $A_{3,11} = \{1,2,3,4\}$, $A_{3,12} = \{2,3,4,5\}$, $A_{3,13} = \{2,3,5,6\}$, $A_{3,14} = \{1,2,3,5\}$, $A_{3,15} = \{2,3,4,5,6\}$, $A_{3,16} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{3,17} = \{2,3,5,6\}$, $A_{3,18} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $A_{3,19} =$

$\{1,2,3,4,5,6\}$;

для $\mathcal{K}_4$ — $A_{4,1} = \varnothing$, $A_{4,2} = \{1\}$, $A_{4,3} = \{2\}$, $A_{4,4} = \{4\}$, $A_{4,5} = \{2,3\}$, $A_{4,6} = \{4,5\}$, $A_{4,7} = \{1,2\}$, $A_{4,8} = \{1,4\}$, $A_{4,9} = \{2,4\}$, $A_{4,10} = \{4,5,6\}$, $A_{4,11} = \{1,2,3\}$, $A_{4,12} = \{1,4,5\}$, $A_{4,13} = \{2,4,5\}$, $A_{4,14} = \{2,3,4\}$, $A_{4,15} = \{1,2,4\}$, $A_{4,16} = \{4,5,6,7\}$, $A_{4,17} = \{1,4,5,6\}$, $A_{4,18} = \{2,4,5,6\}$, $A_{4,19} = \{2,3,4,5\}$, $A_{4,20} = \{1,2,4,5\}$, $A_{4,21} = \{1,2,3,4\}$, $A_{4,22} = \{4,5,6,7,8\}$, $A_{4,23} = \{1,4,5,6,7\}$, $A_{4,24} = \{2,4,5,6,7\}$, $A_{4,25} = \{2,3,4,5,6\}$, $A_{4,26} = \{1,2,4,5,6\}$, $A_{4,27} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{4,28} = \{1,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,29} = \{2,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,30} = \{2,3,4,5,6,7\}$, $A_{4,31} = \{1,2,4,5,6,7\}$, $A_{4,32} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{4,33} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,34} = \{1,2,4,5,6,7,8\}$, $A_{4,35} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$;

для $\mathcal{K}_5$ — $A_{5,1} = \varnothing$, $A_{5,2} = \{1\}$, $A_{5,3} = \{5\}$, $A_{5,4} = \{7\}$, $A_{5,5} = \{1,2\}$, $A_{5,6} = \{5,6\}$, $A_{5,7} = \{1,5\}$, $A_{5,8} = \{1,7\}$, $A_{5,9} = \{5,7\}$, $A_{5,10} = \{1,2,3\}$, $A_{5,11} = \{1,5,6\}$, $A_{5,12} = \{1,2,5\}$, $A_{5,13} = \{1,2,7\}$, $A_{5,14} = \{5,7,8\}$, $A_{5,15} = \{5,6,7\}$, $A_{5,16} = \{1,5,7\}$, $A_{5,17} = \{1,2,3,4\}$, $A_{5,18} = \{1,2,5,6\}$, $A_{5,19} = \{1,2,3,5\}$, $A_{5,20} = \{1,2,3,7\}$, $A_{5,21} = \{5,6,7,8\}$, $A_{5,22} = \{1,5,6,7\}$, $A_{5,23} = \{1,5,7,8\}$, $A_{5,24} = \{1,2,5,7\}$, $A_{5,25} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{5,26} = \{1,2,3,4,7\}$, $A_{5,27} = \{1,2,3,5,6\}$, $A_{5,28} = \{1,2,3,5,7\}$, $A_{5,29} = \{1,2,5,6,7\}$, $A_{5,30} = \{1,2,5,7,8\}$, $A_{5,31} = \{1,5,6,7,8\}$, $A_{5,32} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_{5,33} = \{1,2,3,4,5,7\}$, $A_{5,34} = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A_{5,35} = \{1,2,3,5,7,8\}$, $A_{5,36} = \{1,2,5,6,7,8\}$, $A_{5,37} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A_{5,38} = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, $A_{5,39} = \{1,2,3,5,6,7,8\}$.

Обозначим через $K_{i,j}$ ч. у. множество $S_X^{\uparrow}$ при $S = \mathcal{K}_i$ и $X = A_{i,j}$. Тогда легко убедиться в том, что $K_{1,1} \cong C_{75}$, $K_{1,2} \cong C_{30}$, $K_{1,3} \cong C_1$, $K_{1,4} \cong C_{30}^{\mathrm{op}}$, $K_{2,1} \cong C_{31}$, $K_{2,2} \cong C_{32}$, $K_{2,3} \cong C_3$, $K_{2,4} \cong C_{33}$, $K_{2,5} \cong C_2$, $K_{2,6} \cong C_{34}$, $K_{2,7} \cong C_3^{\mathrm{op}}$, $K_{2,8} \cong C_{33}^{\mathrm{op}}$, $K_{2,9} \cong C_{32}^{\mathrm{op}}$, $K_{3,1} \cong C35$, $K_{3,2} \cong C_9$, $K_{3,3} \cong C_{38}$, $K_{3,4} \cong C_{36}$, $K_{3,5} \cong C_8^{\mathrm{op}}$, $K_{3,6} \cong C_{41}$, $K_{3,7} \cong C_5$, $K_{3,8} \cong C_7^{\mathrm{op}}$, $K_{3,9} \cong C_{39}$, $K_{3,10} \cong C_{40}^{\mathrm{op}}$, $K_{3,11} \cong C_5^{\mathrm{op}}$, $K_{3,12} \cong C_7$, $K_{3,13} \cong C_{40}$, $K_{3,14} \cong C_{39}^{\mathrm{op}}$, $K_{3,15} \cong C_8$, $K_{3,16} \cong C_{36}^{\mathrm{op}}$, $K_{3,17} \cong C_{41}^{\mathrm{op}}$, $K_{3,18} \cong C_9^{\mathrm{op}}$, $K_{3,19} \cong C_{38}^{\mathrm{cp}}$, $K_{4,1} \cong C_{42}$, $K_{4,2} \cong C_{17}$, $K_{4,3} \cong C_{46}$, $K_{4,4} \cong C_{53}$, $K_{4,5} \cong C_{13}$, $K_{4,6} \cong C_{51}$,

$K_{4,7} \cong C_{15}^{\text{op}}$, $K_{4,8} \cong C_{19}$, $K_{4,9} \cong C_{56}$, $K_{4,10} \cong C_{49}$, $K_{4,11} \cong C_{10}^{\text{op}}$, $K_{4,12} \cong C_{20}^{\text{op}}$, $K_{4,13} \cong C_{57}$, $K_{4,14} \cong C_{16}$, $K_{4,15} \cong C_{55}^{\text{op}}$, $K_{4,16} \cong C_{43}$, $K_{4,17} \cong C_{18}^{\text{op}}$, $K_{4,18} \cong C_{60}$, $K_{4,19} \cong C_{18}$, $K_{4,20} \cong C_{60}^{\text{op}}$, $K_{4,21} \cong C_{43}^{\text{op}}$, $K_{4,22} \cong C_{10}$, $K_{4,23} \cong C_{16}^{\text{op}}$, $K_{4,24} \cong C_{55}$, $K_{4,25} \cong C_{20}$, $K_{4,26} \cong C_{57}^{\text{op}}$, $K_{4,27} \cong C_{49}^{\text{op}}$, $K_{4,28} \cong C_{13}^{\text{op}}$, $K_{4,29} \cong C_{15}$, $K_{4,30} \cong C_{19}^{\text{op}}$, $K_{4,31} \cong C_{56}^{\text{op}}$, $K_{4,32} \cong C_{51}^{\text{op}}$, $K_{4,33} \cong C_{17}^{\text{op}}$, $K_{4,34} \cong C_{46}^{\text{op}}$, $K_{4,35} \cong C_{53}^{\text{op}}$, $K_{5,1} \cong C_{54}$, $K_{5,2} \cong C_{71}$, $K_{5,3} \cong C_{48}$, $K_{5,4} \cong C_{58}^{\text{op}}$, $K_{5,5} \cong C_{69}$, $K_{5,6} \cong C_{26}$, $K_{5,7} \cong C_{59}$, $K_{5,8} \cong C_{74}$, $K_{5,9} \cong C_{47}^{\text{op}}$, $K_{5,10} \cong C_{67}$, $K_{5,11} \cong C_{28}$, $K_{5,12} \cong C_{61}$, $K_{5,13} \cong C_{73}$, $K_{5,14} \cong C_{25}^{\text{op}}$, $K_{5,15} \cong C_{63}^{\text{op}}$, $K_{5,16} \cong C_{65}^{\text{op}}$, $K_{5,17} \cong C_{21}$, $K_{5,18} \cong C_{29}$, $K_{5,19} \cong C_{62}$, $K_{5,20} \cong C_{72}$, $K_{5,21} \cong C_{21}^{\text{op}}$, $K_{5,22} \cong C_{62}^{\text{op}}$, $K_{5,23} \cong C_{72}^{\text{op}}$, $K_{5,24} \cong C_{66}$, $K_{5,25} \cong C_{63}$, $K_{5,26} \cong C_{25}$, $K_{5,27} \cong C_{28}^{\text{op}}$, $K_{5,28} \cong C_{65}$, $K_{5,29} \cong C_{61}^{\text{op}}$, $K_{5,30} \cong C_{73}^{\text{op}}$, $K_{5,31} \cong C_{67}^{\text{op}}$, $K_{5,32} \cong C_{26}^{\text{op}}$, $K_{5,33} \cong C_{47}$, $K_{5,34} \cong C_{59}^{\text{op}}$, $K_{5,35} \cong C_{74}^{\text{op}}$, $K_{5,36} \cong C_{69}^{\text{op}}$, $K_{5,37} \cong C_{48}^{\text{op}}$, $K_{5,38} \cong C_{58}$, $K_{5,39} \cong C_{71}^{\text{op}}$.

**Шаг II.** Опишем (с точностью до сильного изоморфизма) все пары $(Y, X)$ нижних собственных подножеств в критических множествах Клейнера $\mathcal{K}_2$–$\mathcal{K}_5$ такие, что $X \subseteq Y$ и $X < S \setminus Y$ (для $\mathcal{K}_1$ таких пар нет). Ими будут:

для $\mathcal{K}_2$ — $B_{2,1} = (A_{2,9}, \{5\})$;

для $\mathcal{K}_3$ — $B_{3,1} = (A_{3,16}, \{5\})$, $B_{3,2} = (A_{3,19}, \{5\})$, $B_{3,3} = (A_{3,19}, \{5, 6\})$;

для $\mathcal{K}_4$ — $B_{4,1} = (A_{4,21}, \{4\})$, $B_{4,2} = (A_{4,27}, \{4\})$, $B_{4,3} = (A_{4,27}, \{4, 5\})$, $B_{4,4} = (A_{4,32}, \{4\})$, $B_{4,5} = (A_{4,32}, \{4, 5\})$, $B_{4,6} = (A_{4,32}, \{4, 5, 6\})$, $B_{4,7} = (A_{4,34}, \{2\})$, $B_{4,8} = (A_{4,35}, \{4\})$, $B_{4,9} = (A_{4,35}, \{4, 5\})$, $B_{4,10} = (A_{4,35}, \{4, 5, 6\})$, $B_{4,11} = (A_{4,35}, \{4, 5, 6, 7\})$;

для $\mathcal{K}_5$ — $B_{5,1} = (A_{5,31}, \{1\})$, $B_{5,2} = (A_{5,33}, \{5\})$, $B_{5,3} = (A_{5,36}, \{1\})$, $B_{5,4} = (A_{5,36}, \{1, 2\})$, $B_{5,5} = (A_{5,37}, \{5\})$, $B_{5,6} = (A_{5,37}, \{7\})$, $B_{5,7} = (A_{5,37}, \{5, 7\})$, $B_{5,8} = (A_{5,38}, \{5\})$, $B_{5,9} = (A_{5,39}, \{1\})$, $B_{5,10} = (A_{5,39}, \{1, 2\})$, $B_{5,11} = (A_{5,39}, \{1, 2, 3\})$.

Обозначим через $K'_{i,j}$ ч. у. множество $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$ при $S = \mathcal{K}_i$ и $(Y, X) = B_{i,j}$. Тогда легко убедиться в том, что $K'_{2,1} \cong C_4$, $K'_{3,1} \cong C_6^{\text{op}}$, $K'_{3,2} \cong C_{37}$, $K'_{3,3} \cong C_6$, $K'_{4,1} \cong C_{11}^{\text{op}}$, $K'_{4,2} \cong C_{44}^{\text{op}}$, $K'_{4,3} \cong C_{12}^{\text{op}}$, $K'_{4,4} \cong C_{50}^{\text{op}}$, $K'_{4,5} \cong C_{45}$, $K'_{4,6} \cong C_{12}$, $K'_{4,7} \cong C_{14}$, $K'_{4,8} \cong C_{52}$,

$K'_{4,9} \cong C_{50}$, $K'_{4,10} \cong C_{44}$, $K'_{4,11} \cong C_{11}$, $K'_{5,1} \cong C_{22}^{\mathrm{op}}$, $K'_{5,2} \cong C_{24}$, $K'_{5,3} \cong C_{68}^{\mathrm{op}}$, $K'_{5,4} \cong C_{23}$, $K'_{5,5} \cong C_{64}$, $K'_{5,6} \cong C_{27}^{\mathrm{op}}$, $K'_{5,7} \cong C_{24}^{\mathrm{op}}$, $K'_{5,8} \cong C_{27}$, $K'_{5,9} \cong C_{70}$, $K'_{5,10} \cong C_{68}$, $K'_{5,11} \cong C_{22}$. Заметим, что для упрощения вычислений можно воспользоваться равенством $K'_{i,j} = (K_{i,j})_X^{\uparrow}$ или леммой 18.

**Шаг III.** Легко убедиться в том, что в I и II каждое из ч. у. множеств $C_i$ и $C_i^{\mathrm{op}}$, где $i = 1, 2, \ldots, 75$, встречается по одному разу (при этом, если $C_i^{\mathrm{op}} \cong C_i$, то $C_i$ встречается, а $C_i^{\mathrm{op}}$ — нет). И следовательно теорема доказана.

**7. Описание ч. у. множеств с положительно определенной формой Титса.** В этом параграфе мы докажем следующую теорему, которая полностью описывает ч. у. множества с положительно определенной формой Титса.

**Теорема 4.** *Ч. у. множество $S$ имеет положительно определенную форму Титса тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) *$S$ — односторонняя минимаксная сумма двух цепных подмножеств (в частности, прямая сумма двух цепных подмножеств);*

2) *$S$ — прямая сумма цепного и почти цепного подмножеств;*

3) *$S$ изоморфно или антиизоморфно одному из указанных в таблице 2 ч. у. множеств* 1–108.

Заметим, что в 1) и 2) некоторые из указанных цепных подмножеств могут быть пустыми.

Таблица 2 приведена в конце статьи; запись $i = j'$ или $i = j''$ в этой таблице означает то же самое, что и в таблице 1 (см. комментарии к таблице 1 в предыдущем параграфе).

Ч. у. множество, указанное в таблице 2 под номером $i$, будем обозначать через $P_i$. Его точки будем нумеровать числами $1, 2, \ldots, |P_i|$ таким образом, что если частичный порядок на нем обозначить символом $\prec$, то $i < j$ всякий раз, когда $i \prec j$ или $i$ находится (на рисунке) левее $j$.

Переходим к доказательству теоремы.

Пусть $S$ — ч. у. множество с положительно определенной формой Титса. Зафиксируем в $S$ некоторый максимальный элемент $a$. Тогда в $S^{\uparrow}_{\{a\}^{<}}$ элемент $a$ является как максимальным, так и минимальным, а значит $S' = \{a\} \coprod (S' \setminus a)$. Положим $B = S' \setminus a$. Поскольку случай $w(B) \geq 3$ невозможен (так как в противном случае $S'$ содержит критическое множество $\mathcal{K}_1$), то $w(B) \leq 2$, и значит, ч. у. множество $T = S^{\uparrow}_{\{a\}^{\leq}} = (S')^{\uparrow}_{\{a\}}$ имеет ширину $w(T) \leq 2$. Следовательно, описать все (с точностью до изоморфизма) ч. у. множества с положительной формой Титса можно следующим образом: сначала описать такие ч. у. множества ширины $w \leq 2$, а затем для каждого из них описать все (min, max)-эквивалентные ему ч. у. множества ширины 3. В силу предложения 11 вместо (min, max)-эквивалентных множеств можно рассматривать min-эквивалентные, что мы часто и будем делать.

Ч. у. множества ширины $w \leq 2$ с положительной формой Титса описаны авторами в работе [3]; а именно, доказана следующая теорема.

**Теорема 5.** *Ч. у. множество $S$ ширины $w < 3$ имеет положительно определенную форму Титса тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

a) *$S$ — односторонняя минимаксная сумма двух цепных подмножеств (в частности, прямая сумма двух цепных подмножеств);*

b) *$S$ — почти цепное подмножество;*

c) *$S$ изоморфно или антиизоморфно одному из указанных в таблице 2 ч. у. множеств 1–45.*

Заметим, что в a) среди указанных цепных подмножеств могут встречаться и пустые.

Перебирая все возможные варианты, легко убедиться в том, что произвольное ч. у. множество, (min, max)-эквивалентное ч. у. множеству вида a)–b), имеет вид 1)–3) (см. теоремы 5 и 4). И поскольку приведенные в таблице 2 ч. у. множества ширины 2 исчерпываются множествами $P_1$–$P_{45}$, то для завершения доказательства нам осталось показать, что если для каждого из ч. у. множеств $P_1$–$P_{45}$ и $P_1^{\mathrm{op}}$–$P_{45}^{\mathrm{op}}$ описать все (min, max)-эквивалентные ему ч. у. множества ширины 3, то в результате получим (с точностью до изоморфизма) все ч. у. множества $P_{46}$–$P_{108}$ и $P_{46}^{\mathrm{op}}$–$P_{108}^{\mathrm{op}}$. К тому же делать это не обязательно для всех множеств $P_1$–$P_{45}$ и $P_1^{\mathrm{op}}$–$P_{45}^{\mathrm{op}}$ — их достаточно рассматривать с точностью до (min, max)-эквивалентности. Кроме того, их достаточно рассматривать и с точностью до двойственности (так как $(S^{\mathrm{op}})_X^{\uparrow} = (S_{S\setminus X}^{\uparrow})^{\mathrm{op}}$), но тогда и множества $P_{46}$–$P_{108}$, $P_{46}^{\mathrm{op}}$–$P_{108}^{\mathrm{op}}$ мы должны получить с точностью до двойственности. Поскольку

1) $(P_2)_{11}^{\uparrow\uparrow} \cong P_1$, $(P_3)_2^{\downarrow} \cong P_1$, $(P_4)_1^{\uparrow} \cong P_3^{\mathrm{op}}$,

2) $(P_7)\uparrow\uparrow_{11} \cong P_6$, $(P_8)_{22}^{\uparrow\uparrow} \cong P_6$, $(P_9)_1^{\uparrow} \cong P_8$, $(P_{10})_2^{\downarrow} \cong P_6$, $(P_{11})_2^{\downarrow} \cong P_8$, $(P_{12})_3^{\downarrow} \cong P_{11}$, $(P_{13})_1^{\uparrow} \cong P_{12}^{\mathrm{op}}$,

3) $(P_{15})\uparrow\uparrow_{11} \cong P_{14}$, $(P_{16})_{66}^{\downarrow\downarrow} \cong P_{17}$, $(P_{17})\downarrow_3 \cong P_{14}$, $(P_{18})_{66}^{\downarrow\downarrow} \cong P_{19}$, $(P_{19})_3^{\downarrow} \cong P_{16}$, $(P_{20})_3^{\downarrow} \cong P_{18}$,

4) $(P_{22})\uparrow\uparrow_{11} \cong P_{21}$, $(P_{23})\uparrow\uparrow_{11} \cong P_{22}$, $(P_{24})_1^{\uparrow} \cong P_{21}^{\mathrm{op}}$, $(P_{25})\uparrow\uparrow_{11} \cong P_{24}$, $(P_{26})\uparrow\downarrow_{12} \cong P_{24}^{\mathrm{op}}$, $(P_{27})_2^{\downarrow} \cong P_{24}$, $(P_{28})\uparrow\uparrow_{11} \cong P_{24}$, $(P_{29})_3^{\downarrow} \cong P_{27}$, $(P_{30})_3^{\downarrow} \cong P_{28}$,

5) $(P_{32})\uparrow\uparrow_{11} \cong P_{31}$, $(P_{36})\downarrow\downarrow_{77} \cong P_{37}$, $(P_{37})_3^{\downarrow} \cong P_{31}$, $(P_{40})_1^{\uparrow} \cong P_{31}^{\mathrm{op}}$, $(P_{41})\uparrow\uparrow_{11} \cong P_{40}$, $(P_{43})_3^{\downarrow} \cong P_{40}$,

6) $(P_{34})\uparrow\uparrow_{11} \cong P_{33}$, $(P_{35})\uparrow\uparrow_{11} \cong P_{34}$, $(P_{38})\downarrow\downarrow_{77} \cong P_{39}$, $(P_{39})_3^{\downarrow} \cong P_{33}$, $(P_{42})_3^{\downarrow} \cong P_{38}$, $(P_{44})_4^{\uparrow} \cong P_{42}^{\mathrm{op}}$,

то достаточно ограничиться, например, ч. у. множествами $P_1$, $P_5$, $P_6$, $P_{14}$, $P_{21}$, $P_{31}$, $P_{33}$, $P_{45}$.

Перед тем, как продолжить доказательство, рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения. При этом будем рассматривать произвольные ч. у. множества, а не только те, которые имеют положительную форму Титса.

Пусть $S$ — ч. у. множество. Точку $x \in S$ назовем *бицепной*, если оба подмножества $S(x)$ и $S^{\times}(x)$ являются цепными. Для $y \in S$ обозначим через $S^{>}(y)$ подмножество всех $z \in S$ таких, что $z > y$, и положим $S^{\geq}(y) = S^{>}(y) \cup y$.

**Лемма 29.** *Если $X$ — нижнее цепное подмножество в $S$, такое, что $S \setminus X$ также является цепным, то $S_X^{\uparrow}$ имеет (как и $X$) ширину* 2.

Действительно, в силу предложения 6 $X$ и $S \setminus X$ являются цепными и в $S_X^{\uparrow}$, а значит, $S$ имеет ширину 2.

**Лемма 30.** *a) Если $X \neq \varnothing$ — нижнее цепное подмножество в $S$, состоящее из бицепных точек, то $S_X^{\uparrow}$ имеет ширину* 2.

*a′) Если $X \neq S$ — нижнее подмножество в $S$ такое, что $S \setminus X$ является цепным и состоит из бицепных точек, то $S_X^{\uparrow}$ имеет ширину* 2.

***Доказательство.*** Рассмотрим сначала утверждение *a*). Обозначим через $a$ и $b$ соответственно минимальную и максимальную точку $X$. Так как точка $b$ бицепная, то $L = X \cup S^{>}(b)$ является цепным. Ч. у. подмножество $L' = S \setminus L$ также является цепным, иначе оно содержало бы несравнимые точки $x$ и $y$, и если при этом $x, y \in S^{\times}(a)$, то $S^{\times}(a)$ не является цепным, а если $a < x$ или $a < y$, то $S(a) = S^{\geq}(a)$ не является цепным; в обоих случаях получаем противоречие. Далее, поскольку любая точка $x \in X$ несравнима с любой точкой $y \in L'$ (иначе $S(x)$ не было бы цепным), то в $S_X^{\uparrow}$ выполняется неравенство $X > L$ и поэтому подмножество $L'' = L' \cup X$ множества $S_X^{\uparrow}$ является цепным. Следовательно, $S_X^{\uparrow}$ является суммой цепных подмножеств $L''$ и $L \setminus X$, и значит, имеет ширину 2.

Утверждение *a′*) доказывается двойственным образом с учетом леммы 17. □

Заметим, что из доказательства следует, что в этом случае и само $S$ имеет ширину 2.

Во всех последующих леммах $Y$ — нижнее подмножество $S$ и $X$ — нижнее подмножество $Y$, — такие, что $X < S \setminus Y$. При их доказательстве будем пользоваться равенством $S_{YX}^{\uparrow\uparrow} = S_{XZ}^{\uparrow\downarrow}$ (см. лемму 18), а также предложением 6 и двойственным к ним предложением (часто не ссылаясь на них).

**Лемма 31.** *Если $X$, $Y_0 = Y \setminus X$ и $Z = S \setminus Y$ являются цепными, то $T = S_{YX}^{\uparrow\uparrow}$ имеет (как и $X$) ширину 2.*

Действительно, поскольку $X \cup Z$ и $Y_0$ — цепные подмножества $S$, и $S = (X \cup Z) \cup Y_0$, то $X \cup Z$ и $Y_0$ являются цепными и в $T$, причем $T = (X \cup Z) \cup Y_0$.

**Лемма 32.** $b$) *Пусть $X$ имеет ширину 2, $Y_0 = Y \setminus X$ — непустое цепное подмножество и $a$ — максимальная точка $Y_0$. Если цепными являются $Z = S \setminus Y$ и $S(a) \cap X$, то $T = S_{YX}^{\uparrow\uparrow}$ имеет ширину 2.*

$b'$) *Пусть $Z$ имеет ширину 2, $Y_0 = Y \setminus X$ — непустое цепное подмножество и $a$ — минимальная точка $Y_0$. Если цепными являются $X$ и $S(a) \cap Z$, то $T = S_{YX}^{\uparrow\uparrow}$ имеет ширину 2.*

Заметим, что $S$ может иметь ширину $w > 2$.

***Доказательство.*** Рассмотрим сначала утверждение $b$). Очевидно, что $Y_0$ и $Z$ являются цепными и в $T$, причем $Z < X$; кроме того, и $K = T^{\times}(a) \cap X$ является цепным. Представим $X$ в виде объединения (попарно непересекающихся) цепных подмножеств $L_0, L_1$ и $L_2$ таких, что $L_0 < L_1 \cup L_2$ (возможно, $L_0 = \varnothing$), и обозначим через $b$ и $c$ минимальные точки множества $L_1 \cup L_2$. Поскольку $K$ является цепным, то в $T$ либо $a < b$, либо $a < c$; пусть, например, $a < b$. Тогда $T$ является объединением цепных подмножеств $Y_0 \cup L_1$ и $Z \cup L_0 \cup L_1$.

Утверждение $b'$) получается из утверждения $b$) путем перехода от $S$ к $S^{\mathrm{op}}$ с учетом равенства $S_{XZ}^{\uparrow\downarrow} = S_{ZX}^{\downarrow\uparrow}$ (см. лемму 18). □

**Лемма 33.** *Пусть $Y$ удовлетворяет условию леммы 29, т. е. $Y$ и $Z = S \setminus Y$ являются цепными. Тогда $T = S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ имеет ширину 2.*

Действительно, в этом случае цепным является и подмножество $X$, и лемма следует из леммы 31.

**Лемма 34.** *Пусть $Y$ удовлетворяет условию утверждения a) леммы 30, т. е. $Y$ — непустое цепное подмножество, состоящее из бицепных точек. Тогда $T = S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ имеет ширину 2.*

***Доказательство.*** Будем считать, что $X \neq \varnothing$ (иначе имеем утверждение $a$) леммы 30). Очевидно, что $Y_0$, $Z$ и $X$ являются цепными в $S$ ($Y_0$ и $X$ цепные, так как $Y$ цепное, а $Z$ цепное, поскольку $X < Z$ и каждая точка из $X$ является бицепной), а значит, и в $T$; кроме того, $Z < X$ в $T$. Тогда $T$ имеет ширину 2, так как оно является объединением подмножеств $Y_0$ и $Z \cup X$. □

**Лемма 35.** *Пусть $Y$ удовлетворяет условию утверждения a′) леммы 30, т. е. $Z = S \setminus Y$ — непустое цепное подмножество, состоящее из бицепных точек. Тогда $T = S^{\uparrow\uparrow}_{YX}$ имеет ширину 2.*

***Доказательство.*** Можно считать, что $X \neq \varnothing$ (иначе имеем утверждение $a'$) леммы 30). Обозначим через $b$ минимальную точку $Z$. Так как $b$ бицепная, то цепным является подмножество $L = Z \cup S^{<}(b)$ (а значит, и $X$). Кроме того, цепным является подмножество $L' = S \setminus L$ (см. доказательство леммы 30). Обозначим через $L_1$ цепное подмножество $S^{<}(b) \setminus X$. Тогда $S$ является объединением цепных подмножеств $L = X \cup L_1 \cup Z$ и $L'$, причем $X < L_1 < Z$. Поскольку $X$, $L_1$, $Z$ и $L'$ являются цепными подмножествами и в $T$, и при этом $Z < L_1 < X$, то $T$ имеет ширину 2. □

В силу сказанного выше, для завершения доказательства теоремы 4 нам осталось показать, что если для каждого из ч. у.

множеств $P_1$, $P_5$, $P_6$, $P_{14}$, $P_{21}$, $P_{31}$, $P_{33}$, $P_{45}$ описать все min-эквивалентные ему ч. у. множества ширины 3, то в результате получим, с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма, все ч. у. множества $P_{46}$–$P_{108}$. При этом будем пользоваться схемой, описанной в предыдущем параграфе, с учетом лемм 29–35.

Если говорить более подробно, доказательство будем проводить по следующей схеме:

$A$) Для ч. у. множеств $S = P_1$, $P_5$, $P_6$, $P_{14}$, $P_{21}$, $P_{31}$, $P_{33}$, $P_{45}$ описать все нижние собственные подмножества $X$ и построить все ч. у. множества вида $T = S_X^{\uparrow}$. При этом не рассматриваются $X$, которые удовлетворяют условию леммы 29, условию утверждения $a$) или условию утверждения $a'$) леммы 30.

$B$) Для указанных в $A$) ч. у. множеств $S$ описать все пары $(Y, X)$, состоящие из собственного нижнего подмножества $Y$ в $S$ и нижнего непустого подмножества $X$ в $Y$, такого, что $X < S\backslash Y$, и построить все ч. у. множества вида $T = S_{YX}^{\uparrow\uparrow}$. При этом в силу лемм 33 – 35 в качестве $Y$ не нужно брать те подмножества, которые исключены из рассмотрения в $A$). Не нужно также рассматривать случай $X = Y$, так как для рассматриваемых ч. у. множеств $S$ неравенство $Y < S \setminus Y$ возможно только для цепных $S \setminus Y$, а тогда $S_{YY}^{\uparrow\uparrow}$ имеет ширину 2.

$C$) Убедиться в том, что в $A$)–$B$) ч. у. множество $P_i$ или $P_i^{\mathrm{op}}$ встречается в качестве $T$ хотя бы один раз для каждого $i = 46, 47, \dots, 108$.

Используем указанную схему.

**Шаг $A$).** Опишем все нижние помножества в ч. у. множествах $P_1$, $P_5$, $P_6$, $P_{14}$, $P_{21}$, $P_{31}$, $P_{33}$, $P_{45}$ (которые удовлетворяют указанным при описании схемы условиям). Ими будут:

для $P_1$ — $A_{1,1} = \{1,2\}$, $A_{1,2} = \{1,2,3\}$, $A_{1,3} = \{1,2,3,4\}$;

для $P_5$ — $A_{5,1} = \{1\}$, $A_{5,2} = \{1,3\}$, $A_{5,3} = \{1,2,3\}$, $A_{5,4} = \{1,3,4\}$, $A_{5,5} = \{1,2,3,4\}$;

для $P_6$ — $A_{6,1} = \{1,2\}$, $A_{6,2} = \{1,2,3\}$, $A_{6,3} = \{1,2,3,4\}$, $A_{6,4} = \{1,2,3,4,5\}$;

для $P_{14}$ — $A_{14,1} = \{1\}$, $A_{14,2} = \{1,3\}$, $A_{14,3} = \{1,2,3\}$, $A_{14,4} = \{1,3,4\}$, $A_{14,5} = \{1,2,3,4\}$, $A_{14,6} = \{1,2,3,4,5\}$;

для $P_{21}$ — $A_{21,1} = \{1,2\}$, $A_{21,2} = \{1,2,3\}$, $A_{21,3} = \{1,2,3,4\}$, $A_{21,4} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{21,5} = \{1,2,3,4,5,6\}$;

для $P_{31}$ — $A_{31,1} = \{1\}$, $A_{31,2} = \{1,3\}$, $A_{31,3} = \{1,2,3\}$, $A_{31,4} = \{1,3,4\}$, $A_{31,5} = \{1,2,3,4\}$, $A_{31,6} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{31,7} = \{1,2,3,4,5,6\}$;

для $P_{33}$ — $A_{33,1} = \{1\}$, $A_{33,2} = \{1,3\}$, $A_{33,3} = \{1,2,3\}$, $A_{33,4} = \{1,3,4\}$, $A_{33,5} = \{1,2,3,4\}$, $A_{33,6} = \{1,3,4,5\}$, $A_{33,7} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{33,8} = \{1,2,3,4,5,6\}$,

для $P_{45}$ — $A_{45,1} = \{1\}$, $A_{45,2} = \{1,4\}$, $A_{45,3} = \{1,2\}$, $A_{45,4} = \{1,2,4\}$, $A_{45,5} = \{1,4,5\}$, $A_{45,6} = \{1,2,3,4\}$, $A_{45,7} = \{1,2,4,5\}$, $A_{45,8} = \{1,2,3,4,5\}$, $A_{45,9} = \{1,2,4,5,6\}$, $A_{45,10} = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Обозначим через $Q_{i,j}$, где $i = 1,5,6,14,21,31,33,45$, ч. у. множество $S_X^{\dagger}$ при $S = P_i$ и $X = A_{i,j}$. Тогда легко убедиться в том, что $Q_{1,1} \cong P_{47}^{\mathrm{op}}$, $Q_{1,2} \cong P_{46}$, $Q_{1,3} \cong P_{47}$, $Q_{5,1} \cong P_{50}$, $Q_{5,2} \cong P_{48}$, $Q_{5,3} \cong P_{48}$, $Q_{5,4} \cong P_{50}$, $Q_{5,5} \cong P_{48}$, $Q_{6,1} \cong P_{54}^{\mathrm{op}}$, $Q_{6,2} \cong P_{51}$, $Q_{6,3} \cong P_{57}$, $Q_{6,4} \cong P_{52}$, $Q_{14,1} \cong P_{64}$, $Q_{14,2} \cong P_{55}$, $Q_{14,3} \cong P_{56}^{\mathrm{op}}$, $Q_{14,4} \cong P_{62}$, $Q_{14,5} \cong P_{58}$, $Q_{14,6} \cong P_{59}$, $Q_{21,1} \cong P_{71}^{\mathrm{op}}$, $Q_{21,2} \cong P_{68}$, $Q_{21,3} \cong P_{79}$, $Q_{21,4} \cong P_{76}$, $Q_{21,5} \cong P_{69}$, $Q_{31,1} \cong P_{96}$, $Q_{31,2} \cong P_{72}$, $Q_{31,3} \cong P_{74}^{\mathrm{op}}$, $Q_{31,4} \cong P_{90}$, $Q_{31,5} \cong P_{80}$, $Q_{31,6} \cong P_{86}$, $Q_{31,7} \cong P_{81}$, $Q_{33,1} \cong P_{97}$, $Q_{33,2} \cong P_{73}$, $Q_{33,3} \cong P_{73}^{\mathrm{op}}$, $Q_{33,4} \cong P_{91}$, $Q_{33,5} \cong P_{100}^{\mathrm{op}}$, $Q_{33,6} \cong P_{93}$, $Q_{33,7} \cong P_{78}$, $Q_{33,8} \cong P_{83}$, $Q_{45,1} \cong P_{105}^{\mathrm{op}}$, $Q_{45,2} \cong P_{85}$, $Q_{45,3} \cong P_{105}$, $Q_{45,4} \cong P_{101}$, $Q_{45,5} \cong P_{105}$, $Q_{45,6} \cong P_{85}$, $Q_{45,7} \cong P_{101}$, $Q_{45,8} \cong P_{101}$, $Q_{45,9} \cong P_{105}^{\mathrm{op}}$, $Q_{45,10} \cong P_{85}$.

**Шаг *B*).** Опишем все пары $(Y, X)$ нижних собственных подножеств в ч. у. множествах $P_1$, $P_5$, $P_6$, $P_{14}$, $P_{21}$, $P_{31}$, $P_{33}$, $P_{45}$ (которые удовлетворяют указанным при описании схемы условиям). Ими будут:

для $P_1$ — $B_{1,1} = (A_{1,2}, \{2\})$, $B_{1,2} = (A_{1,3}, \{2\})$, $B_{1,3} = (A_{1,3}, \{1,2\})$, $B_{1,4} = (A_{1,3}, \{1,2,3\})$;

для $P_5$ — $B_{5,1} = (A_{5,3}, \{1\})$, $B_{5,2} = (A_{5,3}, \{1,3\})$, $B_{5,3} = (A_{5,5}, \{1\})$, $B_{5,4} = (A_{5,5}, \{3\})$, $B_{5,5} = (A_{5,5}, \{1,3\})$, $B_{5,6} =$

$(A_{5,5}, \{1,2,3\})$;

для $P_6$ — $B_{6,1} = (A_{6,2}, \{2\})$, $B_{6,2} = (A_{6,3}, \{2\})$, $B_{6,3} = (A_{6,3}, \{1,2\})$, $B_{6,4} = (A_{6,3}, \{1,2,3\})$, $B_{6,5} = (A_{6,4}, \{2\})$, $B_{6,6} = (A_{6,4}, \{1,2\})$, $B_{6,7} = (A_{6,4}, \{1,2,3\})$, $B_{6,8} = (A_{6,4}, \{1,2,3,4\})$;

для $P_{14}$ — $B_{14,1} = (A_{14,3}, \{1\})$, $B_{14,2} = (A_{14,5}, \{1\})$, $B_{14,3} = (A_{14,5}, \{3\})$, $B_{14,4} = (A_{14,5}, \{1,3\})$, $B_{14,5} = (A_{14,5}, \{1,2,3\})$, $B_{14,6} = (A_{14,6}, \{1\})$, $B_{14,7} = (A_{14,6}, \{3\})$, $B_{14,8} = (A_{14,6}, \{1,3\})$, $B_{14,9} = (A_{14,6}, \{1,2,3\})$, $B_{14,10} = (A_{14,6}, \{1,3,4\})$, $B_{14,11} = (A_{14,6}, \{1,2,3,4\})$;

для $P_{21}$ — $B_{21,1} = (A_{21,2}, \{2\})$, $B_{21,2} = (A_{21,3}, \{2\})$, $B_{21,3} = (A_{21,3}, \{1,2\})$, $B_{21,4} = (A_{21,3}, \{1,2,3\})$, $B_{21,5} = (A_{21,4}, \{2\})$, $B_{21,6} = (A_{21,4}, \{1,2\})$, $B_{21,7} = (A_{21,4}, \{1,2,3\})$, $B_{21,8} = (A_{21,4}, \{1,2,3,4\})$, $B_{21,9} = (A_{21,5}, \{2\})$, $B_{21,10} = (A_{21,5}, \{1,2\})$, $B_{21,11} = (A_{21,5}, \{1,2,3\})$, $B_{21,12} = (A_{21,5}, \{1,2,3,4\})$, $B_{21,13} = (A_{21,5}, \{1,2,3,4,5\})$;

для $P_{31}$ — $B_{31,1} = (A_{31,3}, \{1\})$, $B_{31,2} = (A_{31,5}, \{1\})$, $B_{31,3} = (A_{31,5}, \{3\})$, $B_{31,4} = (A_{31,5}, \{1,3\})$, $B_{31,5} = (A_{31,5}, \{1,2,3\})$, $B_{31,6} = (A_{31,6}, \{1\})$, $B_{31,7} = (A_{31,6}, \{3\})$, $B_{31,8} = (A_{31,6}, \{1,3\})$, $B_{31,9} = (A_{31,6}, \{1,2,3\})$, $B_{31,10} = (A_{31,6}, \{1,3,4\})$, $B_{31,11} = (A_{31,6}, \{1,2,3,4\})$, $B_{31,12} = (A_{31,7}, \{1\})$, $B_{31,13} = (A_{31,7}, \{3\})$, $B_{31,14} = (A_{31,7}, \{1,3\})$, $B_{31,15} = (A_{31,7}, \{1,2,3\})$, $B_{31,16} = (A_{31,7}, \{1,3,4\})$, $B_{31,17} = (A_{31,7}, \{1,2,3,4\})$, $B_{31,18} = (A_{31,7}, \{1,2,3,4,5\})$;

для $P_{33}$ — $B_{33,1} = (A_{33,3}, \{1\})$, $B_{33,2} = (A_{33,5}, \{1\})$, $B_{33,3} = (A_{33,5}, \{3\})$, $B_{33,4} = (A_{33,5}, \{1,3\})$, $B_{33,5} = (A_{33,7}, \{1\})$, $B_{33,6} = (A_{33,7}, \{3\})$, $B_{33,7} = (A_{33,7}, \{1,3\})$, $B_{33,8} = (A_{33,7}, \{1,2,3\})$, $B_{33,9} = (A_{33,7}, \{1,3,4\})$, $B_{33,10} = (A_{33,7}, \{1,2,3,4\})$, $B_{33,11} = (A_{33,8}, \{1\})$, $B_{33,12} = (A_{33,8}, \{3\})$, $B_{33,13} = (A_{33,8}, \{1,3\})$, $B_{33,14} = (A_{33,8}, \{1,2,3\})$, $B_{33,15} = (A_{33,8}, \{1,3,4\})$, $B_{33,16} = (A_{33,8}, \{1,2,3,4\})$, $B_{33,17} = (A_{33,8}, \{1,3,4,5\})$, $B_{33,18} = (A_{33,8}, \{1,2,3,4,5\})$;

для $P_{45}$ — $B_{45,1} = (A_{45,4}, \{1\})$, $B_{45,2} = (A_{45,6}, \{1\})$, $B_{45,3} = (A_{45,7}, \{1\})$, $B_{45,4} = (A_{45,8}, \{1\})$, $B_{45,5} = (A_{45,8}, \{4\})$, $B_{45,6} =$

$(A_{45,8},\{1,4\})$, $B_{45,7} = (A_{45,8},\{1,2\})$, $B_{45,8} = (A_{45,8},\{1,2,4\})$, $B_{45,9} = (A_{45,9},\{1\})$, $B_{45,10} = (A_{45,10},\{1\})$, $B_{45,11} = (A_{45,10},\{4\})$, $B_{45,12} = (A_{45,10},\{1,4\})$, $B_{45,13} = (A_{45,10},\{1,2\})$, $B_{45,14} = (A_{45,10},\{1,2,4\})$, $B_{45,15} = (a_{45,10},\{1,4,5\})$, $B_{45,16} = (A_{45,10},\{1,2,3,4\})$, $B_{45,17} = (A_{45,10},\{1,2,4,5\})$, $B_{45,18} = (A_{45,10},\{1,2,3,4,5\})$.

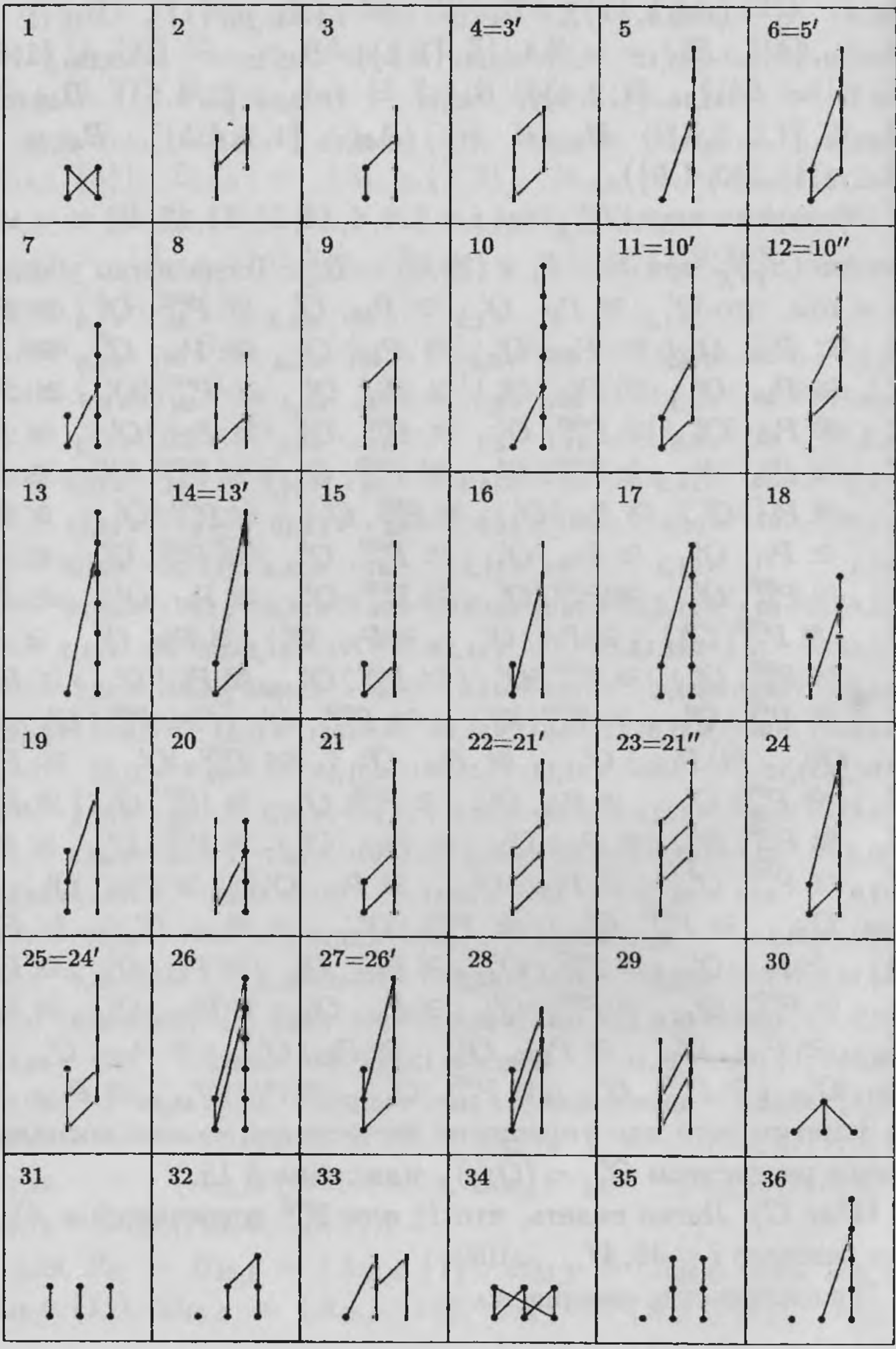
Обозначим через $Q'_{i,j}$, где $i = 1,5,6,14,21,31,33,45$, ч. у. множество $(S_Y^{\uparrow})_X^{\uparrow}$ при $S = \mathcal{P}_i$ и $(Y,X) = B_{i,j}$. Тогда легко убедиться в том, что $Q'_{1,1} \cong P_{47}$, $Q'_{1,2} \cong P_{49}$, $Q'_{1,3} \cong P_{49}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{1,4} \cong P_{47}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{5,1} \cong P_{50}$, $Q'_{5,2} \cong P_{48}$, $Q'_{5,3} \cong P_{48}$, $Q'_{5,4} \cong P_{50}$, $Q'_{5,5} \cong P_{48}$, $Q'_{5,6} \cong P_{50}$, $Q'_{6,1} \cong P_{54}$, $Q'_{6,2} \cong P_{61}$, $Q'_{6,3} \cong P_{60}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{6,4} \cong P_{52}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{6,5} \cong P_{60}$, $Q'_{6,6} \cong P_{61}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{6,7} \cong P_{57}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{6,8} \cong P_{53}$, $Q'_{14,1} \cong P_{65}$, $Q'_{14,2} \cong P_{56}$, $Q'_{14,3} \cong P_{62}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{14,4} \cong P_{55}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{14,5} \cong P_{64}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{14,6} \cong P_{63}$, $Q'_{14,7} \cong P_{67}$, $Q'_{14,8} \cong P_{66}$, $Q'_{14,9} \cong P_{63}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{14,10} \cong P_{67}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{14,11} \cong P_{59}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,1} \cong P_{71}$, $Q'_{21,2} \cong P_{88}$, $Q'_{21,3} \cong P_{87}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,4} \cong P_{69}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,5} \cong P_{89}$, $Q'_{21,6} \cong P_{89}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,7} \cong P_{76}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,8} \cong P_{70}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,9} \cong P_{87}$, $Q'_{21,10} \cong P_{88}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,11} \cong P_{79}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{21,12} \cong P_{77}$, $Q'_{21,13} \cong P_{70}$, $Q'_{31,1} \cong P_{98}$, $Q'_{31,2} \cong P_{74}$, $Q'_{31,3} \cong P_{90}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,4} \cong P_{72}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,5} \cong P_{96}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,6} \cong P_{92}$, $Q'_{31,7} \cong P_{108}$, $Q'_{31,8} \cong P_{99}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,9} \cong P_{94}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,10} \cong P_{103}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,11} \cong P_{81}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,12} \cong P_{94}$, $Q'_{31,13} \cong P_{103}$, $Q'_{31,14} \cong P_{99}$, $Q'_{31,15} \cong P_{92}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,16} \cong P_{108}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,17} \cong P_{86}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{31,18} \cong P_{82}$, $Q'_{33,1} \cong P_{97}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,2} \cong P_{95}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,3} \cong P_{104}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,4} \cong P_{83}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,5} \cong P_{75}$, $Q'_{33,6} \cong P_{102}$, $Q'_{33,7} \cong P_{78}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,8} \cong P_{93}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,9} \cong P_{84}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,10} \cong P_{106}$, $Q'_{33,11} \cong P_{95}$, $Q'_{33,12} \cong P_{104}$, $Q'_{33,13} \cong P_{100}$, $Q'_{33,14} \cong P_{91}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,15} \cong P_{107}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,16} \cong P_{107}$, $Q'_{33,17} \cong P_{106}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{33,18} \cong P_{84}$, $Q'_{45,1} \cong P_{105}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{45,2} \cong P_{105}$, $Q'_{45,3} \cong P_{85}$, $Q'_{45,4} \cong P_{101}$, $Q'_{45,5} \cong P_{105}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{45,6} \cong P_{105}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{45,7} \cong P_{85}$, $Q'_{45,8} \cong P_{105}$, $Q'_{45,9} \cong P_{105}$, $Q'_{45,10} \cong P_{101}$, $Q'_{45,11} \cong P_{105}$, $Q'_{45,12} \cong P_{85}$, $Q'_{45,13} \cong P_{101}$, $Q'_{45,14} \cong P_{101}$, $Q'_{45,15} \cong P_{105}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{45,16} \cong P_{105}^{\mathrm{op}}$, $Q'_{45,17} \cong P_{85}$, $Q'_{45,18} \cong P_{105}$.

Заметим, что для упрощения вычислений можно воспользоваться равенством $Q'_{i,j} = (Q_{i,j})_X^{\uparrow}$ или леммой 18.

**Шаг *C*).** Легко видеть, что $P_i$ или $P_i^{\mathrm{op}}$ встречается в $A$)–$B$) для каждого $i = 46, 47, \ldots, 108$.

Доказательство завершено.

*Таблица 1: P*-**критические ч. у. множества**



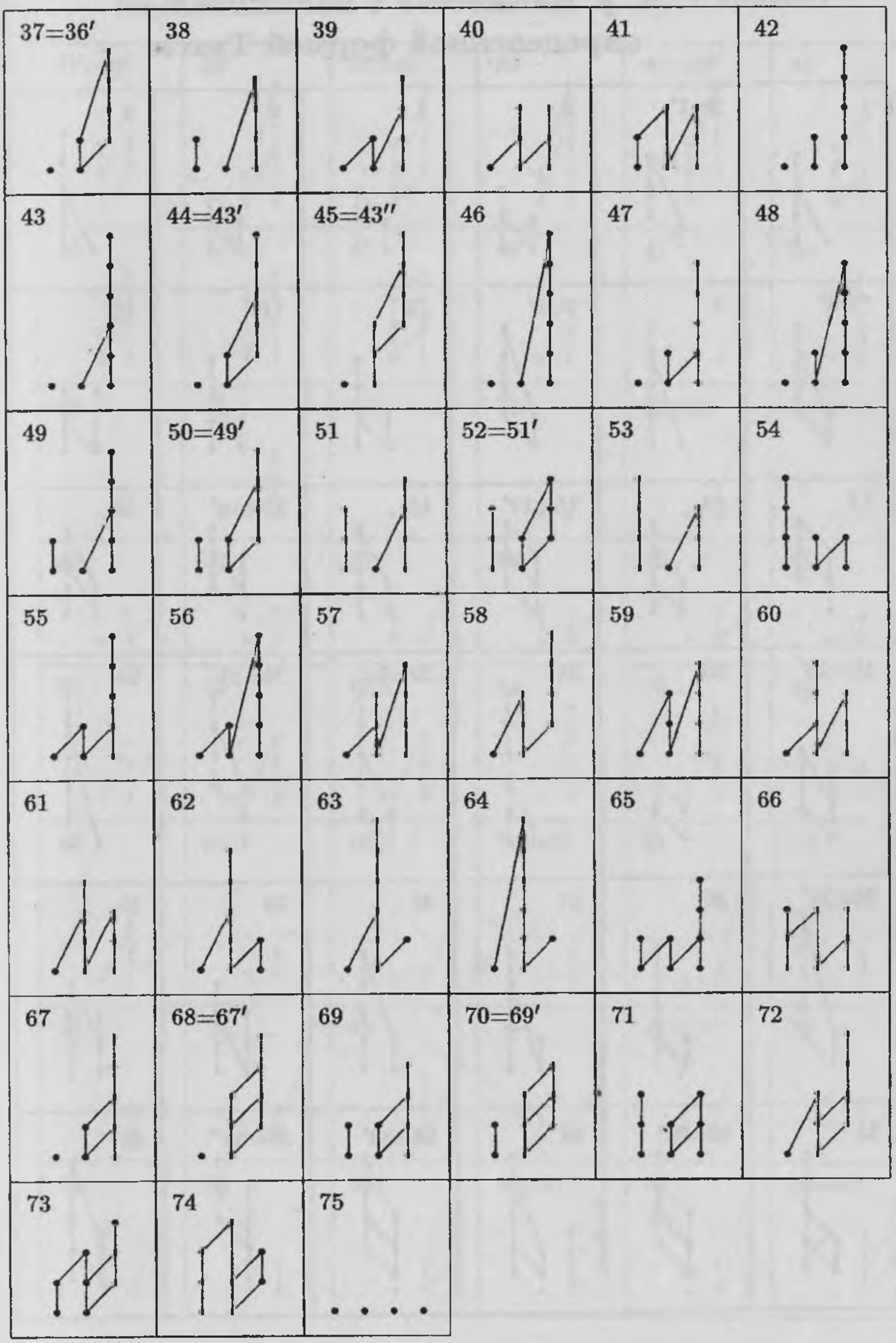
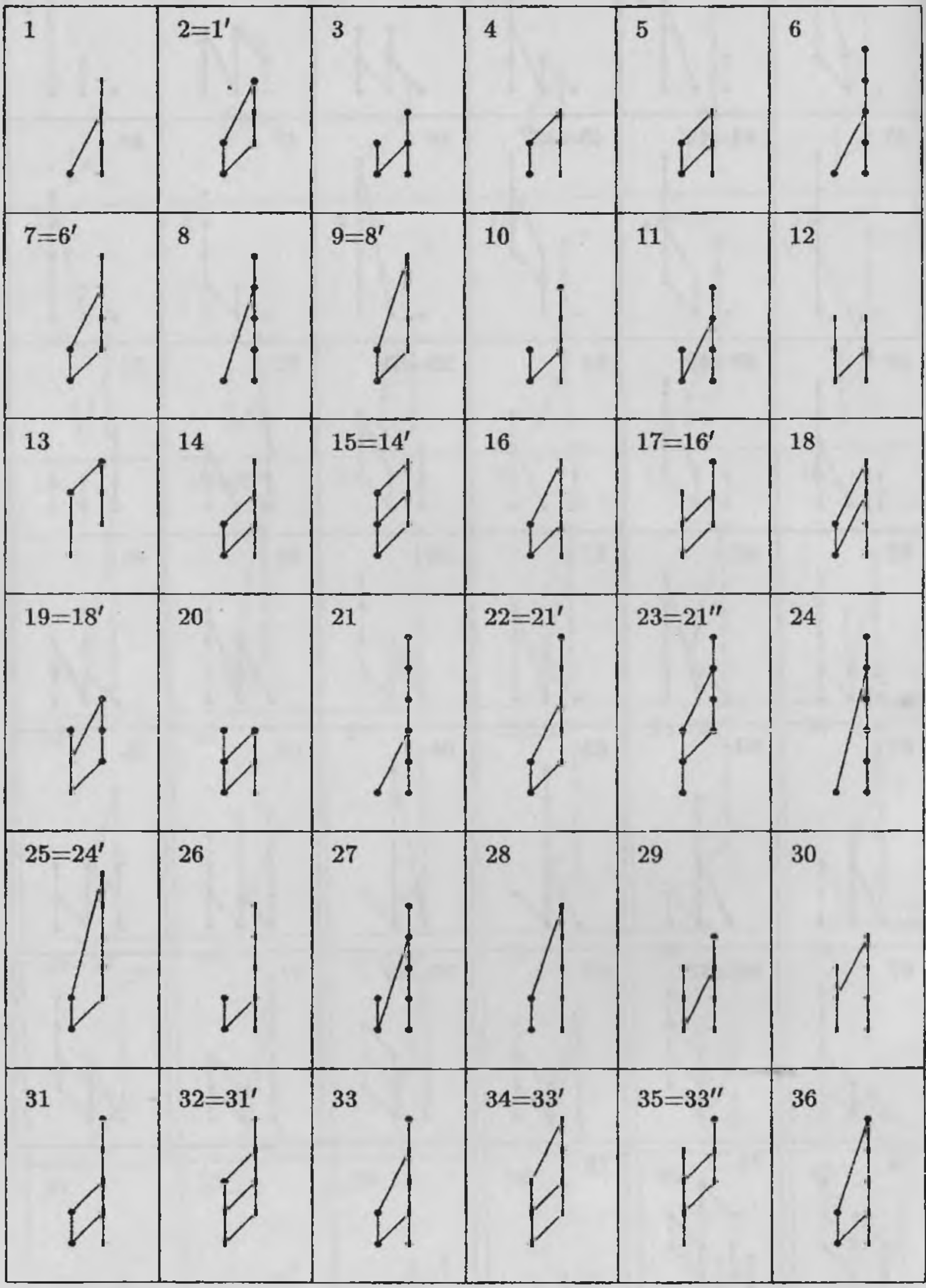
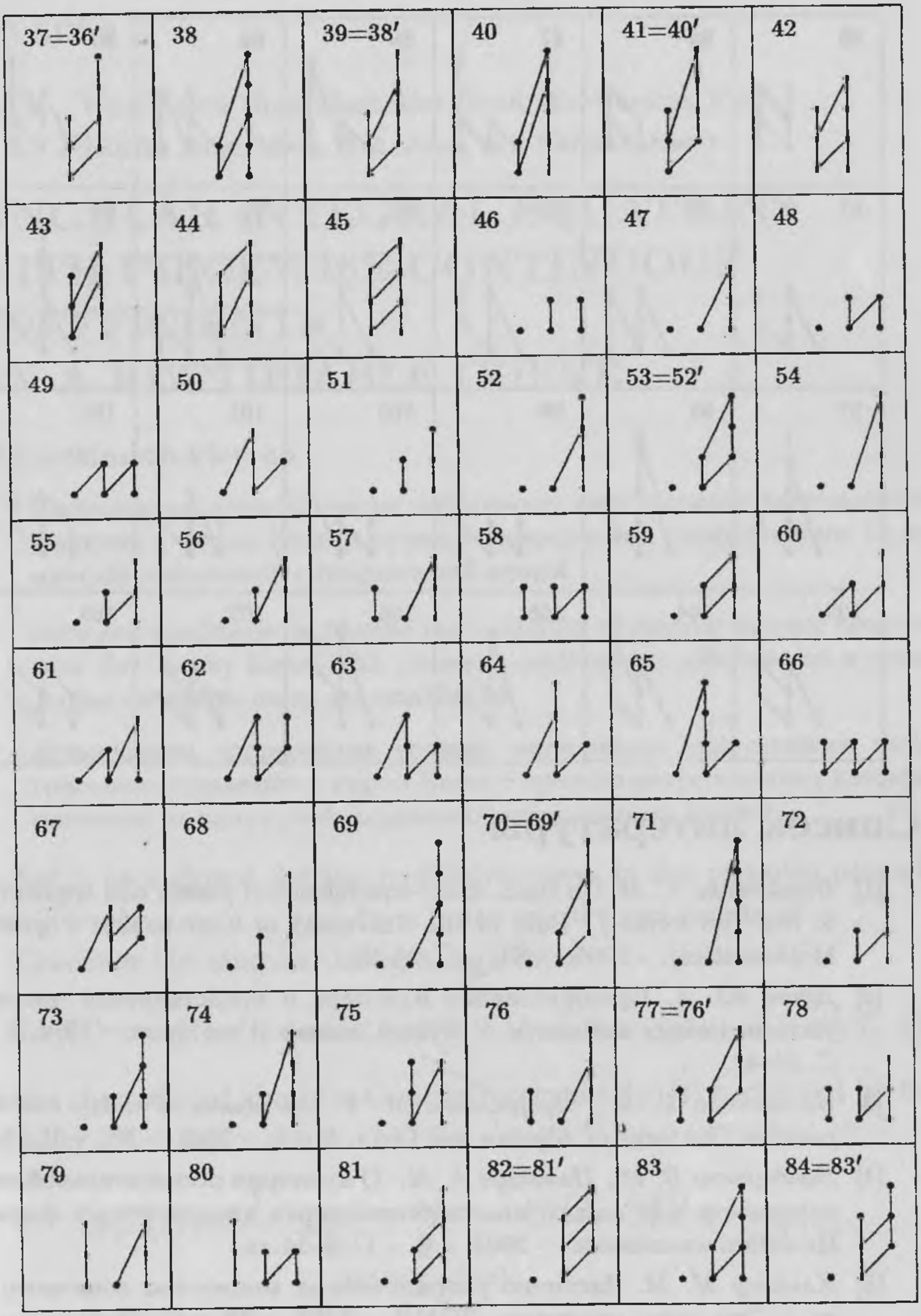
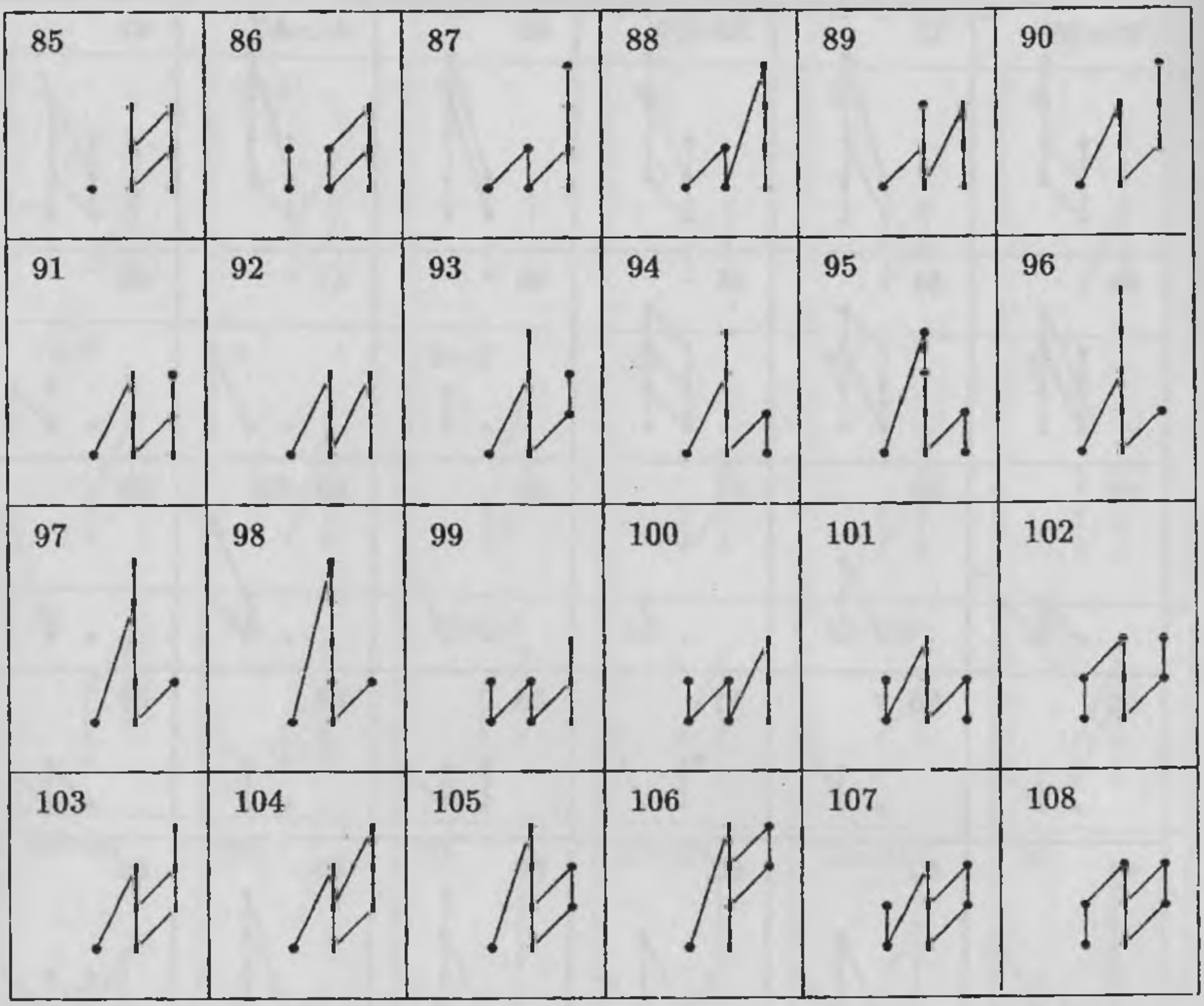

37=36′
38
39
40
41
42
43
44=43′
45=43″
46
47
48
49
50=49′
51
52=51′
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68=67′
69
70=69′
71
72
73
74
75

*Таблица 2:* **Ч. у. множества с положительно определенной формой Титса**




37=36′
38
39=38′
40
41=40′
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53=52′
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70=69′
71
72
73
74
75
76
77=76′
78
79
80
81
82=81′
83
84=83′




# Список литературы

[1] *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – N1. – C. 24–25.

[2] *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.

[3] *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On posets of width two with positive Tits form // Algebra and Discr. Math. – 2005. – N2. – P. 11–22.

[4] *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О критерии положительной определенности для одного класса бесконечных квадратичных форм // Нелінійні коливання. – 2003. – **6**. – С. 3–14.

[5] *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.