УДК 512.647.2+512.562

В. М. Бондаренко (Ин-т математики НАН Украины),
М. В. Степочкина (Киевский нац. ун-т имени Тараса Шевченко)

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА ИНЪЕКТИВНО-КОНЕЧНОГО ТИПА

In this paper we describe all finite posets, for which the category $InjA$ of injective representations of A over a field k has finite type.

В цій статті описуються скінченні частково впорядковані множини A, для яких категорія $InjA$ ін'єктивних зображень A над полем k має скінчений тип.

В работе [1] П. Габриель ввел для (конечного) колчана Q с множеством вершин Q_0 и множеством стрелок Q_1 квадратичную форму $q_Q : \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$, названную им квадратичной формой Титса колчана Q:

$$q_Q(z) = \sum_{i \in Q_0} z_i^2 - \sum_{i \to j} z_i z_j,$$

где $i \to j$ пробегает множество Q_1. В этой же работе доказано, в частности, что колчан имеет конечный тип над полем k тогда и только тогда, когда его форма Титса является положительно определенной.

В работе [2] Ю. А. Дрозд рассматривает некоторую квадратичную форму для (конечного) частично упорядоченного множества A, построенную на основе тех же соображений, что и форма Титса для колчана. Это форма $q_A : \mathbb{Z}^{A \cup 0} \to \mathbb{Z}$, которая задается равенством

$$dr_A(z) = z_0^2 + \sum_{i \in A} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in A} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in A} z_i$$

(при этом нужно считать, что A не имеет елемента 0). Теперь эта форма называется квадратичной формой Титса частично упорядоченного множества A.

В [2] доказано, что частично упорядоченное множество A имеет конечный тип над полем k тогда и только тогда, когда его форма Титса является слабо положительной (т. е. принимает положительное значение на любом ненулевом векторе с неотрицательными координатами).

Напомним, что согласно определению частично упорядоченное множество A имеет конечный тип над полем k, если категория его представлений $Rep_k A$ имеет, с точностью до изоморфизма, конечное число неразложимых объектов.

Кроме изучения представлений частично упорядоченного множества конечного типа, мы можем, в свою очередь, изучать представления категории $Rep_k A$ (это функторы из $Rep_k A$ в категорию конечномерных векторных k-пространств); в частности, можно рассматривать задачу о тех или иных подкатегориях категории $Rep_k A$, которые имеют конечный тип. Одна из таких задач и рассматривается в этой статье.

На протяжении всей статьи k — произвольное фиксированное поле; поэтому в различных обозначениях мы часто опускаем символ k (например, вместо $Rep_k A$ пишем $RepA$). Векторные пространства, которые мы рассматриваем, являются, как правило, конечномерными (исключением являются случаи, когда рассматриваются общие определения). Все рассматриваемые частично упорядоченные (сокращенно ч. у.)

множества являются конечными; при этом мы предполагаем, что они не содержат элементов 0 и $\pm\infty$. Линейные отображения, морфизмы категорий и т. п. умножаются слева направо.

1. Категории над полем и колчаны с соотношениями. Поскольку в этой статье мы пользуемся категорным языком, напомним некоторые факты из теории категорий, уделяя особое внимание категориям над полем k; при этом мы считаем, что читатель знаком с основными понятиями теории категорий. Далее, мы рассмотрим вопросы, связанные с представлениями категорий и колчанов. Наконец, мы напомним нужные для нас факты, которые касаются колчанов с соотношениями и их связи с категориями.

1.1. Категории над полем. Множество объектов категории Φ обозначается через $\operatorname{Ob}\Phi$, а множество ее морфизмов — через $\operatorname{Mor}\Phi$; множество морфизмов из объекта X в объект Y обозначается через $\operatorname{Hom}_\Phi(X,Y)$ или $\Phi(X,Y)$. Вместо $X \in \operatorname{Ob}\Phi$ часто пишут $X \in \Phi$; запись $X \cong Y$ означает, что X и Y изоморфны. Изоморфизм называют еще обратимым морфизмом; другими словами, морфизм $\alpha \in \Phi(X,Y)$ обратим, если существует морфизм $\beta \in \Phi(Y,X)$, такой, что $\alpha\beta = 1_X$ и $\beta\alpha = 1_Y$, (1_Z обозначает единичный морфизм объекта Z).

Напомним, что скелетом категории называется ее полная подкатегория, состоящая из представителей всех классов изоморфных объектов.

Ковариантный функтор, как правило, называется просто функтором. Функтор $F : \Phi \to \Psi$ называется строгим, если для произвольных объектов X, Y категории Φ отображение

$$F(X,Y) : \operatorname{Hom}_\Phi(X,Y) \to \operatorname{Hom}_\Psi(XF,YF)$$

(которое определяется отображением $F : \operatorname{Mor}\Phi \to \operatorname{Mor}\Psi$) инъективно, и полным, если это отображение сюръективно. Далее, фуктор $F : \Phi \to \Psi$ называется плотным, если для каждого $Y \in \Psi$ существует изоморфный ему объект вида XF, $X \in \Phi$. В силу хорошо известной теоремы функтор F является эквивалентностью категорий тогда и только тогда, когда он строгий полный и плотный.

Категорией над полем k или просто k-категорией мы называем произвольную категорию Φ, все множества морфизмов которой являются (не обязательно конечномерными) векторными пространствами над k, такими, что композиция морфизмов k-билинейна; тогда множества $\Phi(X,X)$ являются k-алгебрами. Назовем k-категорию конечномерной, если все $\Phi(X,Y)$ являются конечномерными пространствами. Элемент $X \in \Phi$ называется нулевым, если $\Phi(X,X) = 0$ или, что то же самое, $1_X = 0$ (заметим, что в k-категории не всегда существуют нулевые объекты). В связи с рассматриваемым ниже отметим, что локальная алгебра — это алгебра с $1 \neq 0$, все необратимые элементы которой образуют идеал.

Функтор $F : \Phi \to \Psi$ между k-категориями Φ и Ψ называется k-линейным, если все соответствующие ему отображения $F(X,Y)$ являются k-линейными; иногда такой функтор называют k-функтором. Как правило, между k-категориями рассматривают только k-линейные функторы.

Каждой категории Φ можно естественным образом сопоставить k-категорию $k\Phi$, которая называется k-линейной оболочкой или k-линеаризацией Φ; она имеет те же объекты, что и категория Φ, а $k\Phi(X,Y)$ — это векторное k-пространство с базисом $\Phi(X,Y)$. Очевидно, что произвольный функтор $F : \Phi \to \Psi$, где Ψ — k-категория, однозначно продолжается до k-линейного функтора $F^k : k\Phi \to \Psi$.

Двусторонним идеалом (или просто идеалом) $\mathcal{I}$ k-категории Φ называется набор подпространств $\mathcal{I}(X,Y) \subseteq \Phi(X,Y)$, где $X, Y \in \Phi$, таких, что $\lambda\alpha\gamma \in \Phi(W,Z)$ всякий раз, когда $\alpha \in \mathcal{I}(X,Y)$, $\lambda \in \Phi(W,X)$, $\gamma \in \Phi(Y,Z)$. С каждым идеалом $\mathcal{I}$ связана фактор-k-категория $\Phi/\mathcal{I}$ с теми же объектами, что и категория Φ, и множествами морфизмов $(\Phi/\mathcal{I})(X,Y) = \Phi(X,Y)/\mathcal{I}(X,Y)$ для всех $X, Y \in \Phi$. Заметим, что если $1_X \in \mathcal{I}$, то объект X категории $\Phi/\mathcal{I}$ является нулевым. Канонические проекции (пространств) $\Phi(X,Y) \to \Phi/\mathcal{I}(X,Y)$ задают функтор-проекцию $\Pi : \Phi \to \Phi/\mathcal{I}$.

В качестве важного примера, связанного с этими понятиями, можно указать следующий пример. Пусть $F : \Phi \to \Psi$ — k-функтор между k-категориями, который является полным и плотным. Обозначим через $\mathrm{Ker}F$ ядро функтора F, то есть множество всех морфизмов α, таких, что $\alpha F = 0$; очевидно, что $\mathrm{Ker}F$ — идеал в Φ. Тогда F индуцирует эквивалентность $\Phi/\mathrm{Ker}F \cong \Psi$.

Конечномерная k-категория Ψ называется спектроидом, если ее объекты попарно неизоморфны и все алгебры эндоморфизмов $\Psi(X,X)$ локальны. Заметим, что условие о локальности алгебр эндоморфизмов эквивалентно тому, что все необратимые морфизмы Ψ образуют идеал. Этот идеал называется радикалом спектроида Ψ; мы обозначаем его через $\mathcal{R}_\Psi$. Таким образом, мы имеем $\mathcal{R}_\Psi(X,Y) = \Psi(X,Y)$ для $X \neq Y$, а $\mathcal{R}_\Psi(X,X)$ — это максимальный идеал (радикал) локальной алгебры $\Psi(X,X)$.

Если $\mathcal{I}$ — идеал спектроида Ψ и $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}_\Psi$, то, очевидно, $\Psi/\mathcal{I}$ также является спектроидом; если же $\mathcal{I}$ не принадлежит $\mathcal{R}_\Psi$, то множество $P = \{X \in \Psi \,|\, 1_X \in \mathcal{I}\}$ непусто и значит фактор-категория $\Psi/\mathcal{I}$ не является спектроидом (поскольку объекты $X \in P$ становятся нулевыми объектами $\Psi/\mathcal{I}$, алгебры эндоморфизмов $\Psi/\mathcal{I}(X,X)$ не являются локальными). Однако во втором случае спектроидом является полная подкатегория категории $\Psi/\mathcal{I}$, состоящая из ненулевых объектов.

Аддитивной k-категорией (или k-аддитивной категорией) называется произвольная k-категория, которая является аддитивной (то есть имеет конечные прямые суммы и нулевой объект). Отметим, что каждой k-категории Φ можно естественным образом сопоставить аддитивную k-категорию $\oplus\Phi$, которая называется аддитивной оболочкой Φ. Ее объектами являются конечные последовательности $(X_1, \ldots, X_s)$ объектов из Φ, а морфизмы $(X_1, \ldots, X_s) \to (Y_1, \ldots, Y_t)$ отождествляются с “матрицами” $\mu = (\mu_{ij}) \in \bigoplus_{i,j} \Phi(X_i, Y_j)$; композиция морфизмов определяется правилом умножения матриц.

Очевидно, что произвольный k-линейный функтор из Φ в Ψ, где Ψ — адитивная k-категория, можно естественным образом продолжить до k-линейного функтора из $\oplus\Phi$ в Ψ.

Конечномерная аддитивная k-категория называется категорией Крулля-Шмидта, если каждый ее объект раскладывается в прямую сумму неразложимых объектов с локальными алгебрами эндоморфизмов. Полную подкатегорию категории Крулля-Шмидта Φ, состоящую из представителей всех классов изоморфизмов неразложимых объектов, будем обозначать через Φ_0; очевидно, что категория Φ_0 определена однозначно с точностью до изоморфизма категорий и является спектроидом. Мы называем ее главным спектроидом категории Φ.

Имеет место следуюшая теорема.

Теорема Крулля-Шмидта. *Категория над полем k является категорией Крулля-Шмидта тогда и только тогда, когда любой ее идемпотент расщепляем (т. е., если $\alpha^2 = \alpha \in \mathrm{Hom}(X,X)$, то существуют морфизмы $\lambda : X \to Y$ и $\gamma : Y \to X$, такие, что $\lambda\gamma = \alpha$ и $\gamma\lambda = 1_Y$).*

Понятие радикала, которое мы ввели выше для спектроидов, можно ввести также и для категорий Крулля-Шмидта.

Пусть Φ — категория Крулля-Шмидта. Морфизм $\alpha \in \Phi(X,Y)$ называется радикальным, если для каждого $\beta \in \Phi(Y, X)$ морфизмы $1_X + \alpha\beta$ и $1_Y + \beta\alpha$ обратимы (на самом деле достаточно требовать одно из этих условий). Все радикальные морфизмы образуют идеал, который называется радикалом категории Φ; мы обозначаем его через $\mathcal{R}_\Phi$. Заметим, что между пространствами $\mathcal{R}_\Phi(\oplus_i X_i, \oplus_j Y_j)$ и $\oplus_{i,j}\mathcal{R}_{\Phi_0}(X_i, Y_j)$ существует естественный (канонический) изоморфизм.

1.2. Представления k-категорий. Пусть Φ — некоторая k-категория и $\operatorname{mod} k$ — категория конечномерных векторных k-пространств. Под представлением категории Φ мы понимаем k-функтор из Φ в $\operatorname{mod} k$. Два представления называем эквивалентными или изоморфными, если изоморфны соответствующие функторы. Другими словами, категория представлений $Rep\,\Phi$ категории Φ — это категория $Funct(\Phi, \operatorname{mod} k)$ функторов из Φ в $\operatorname{mod} k$. Из хорошо известных общих теорем следует, что $Rep\,\Phi$ — категория Крулля-Шмидта. Заметим, что категория $Funct(\Phi, \operatorname{mod} k)$ является законной (с точки зрения современной теории множеств) только тогда, когда объекты Φ образуют множество (такая категория называется малой). Легко показать, что если категории $Funct(\Phi, \operatorname{mod} k)$ и $Funct(\Psi, \operatorname{mod} k)$ эквивалентны, если эквивалентными являются Φ и Ψ (для этого нужно зафиксировать пару взаимно квазиобратных функторов между Φ и Ψ и после этого посмотреть на связь между функторами $F : \Phi \to \operatorname{mod} k$ и $G : \Psi \to \operatorname{mod} k$). В частности, эквивалентными являются категории $Funct(\Phi, \operatorname{mod} k)$ и $Funct(\overline{\Phi}, \operatorname{mod} k)$, где $\overline{\Phi}$ — скелет категории Φ. Отсюда видно, что в случае, когда $\overline{\Phi}$ является малой категорией, мы можем по сути считать категорию $Funct(\Phi, \operatorname{mod} k)$ законной даже тогда, когда категория Φ не является малой.

Часть из только что сказанного мы сформулируем в виде утверждения, которым будем пользоваться в дальнейшем.

Предложение 1. *Если Φ — категория Крулля-Шмидта и Φ_0 — ее главный спектроид, то $\Phi \cong \oplus\Phi_0$ и категории $Rep\,\Phi$ и $Rep\,\Phi_0$ эквивалентны.*

Мы называем k-категорию Φ категорией конечного типа, если категория $Rep\,\Phi$ имеет (с точностью до изоморфизма) конечное число неразложимых объектов.

Представления k-категорий самым прямым образом связаны с представлениями алгебр. Поговорим об этом более подробно.

Пусть Φ — k-категория; будем считать, что число ее объектов конечно. Этой категории можно естественным образом сопоставить конечномерную k-алгебру $\mathcal{A}(\Phi)$. Именно положим

$$\mathcal{A}(\Phi) = \bigoplus_{X,Y \in \Phi} \Phi(X, Y)$$

(здесь рассматривается прямая сумма векторных k-пространств). Произведение в $\mathcal{A}(\Phi)$ достаточно определить для произвольных морфизмов $\alpha \in \Phi(X, Y)$ и $\beta \in \in \Phi(Z, T)$: произведение α и β равно морфизму $\alpha\beta$, если $Y = Z$, и нулевому элементу (пространства $\mathcal{A}(\Phi)$), если $Y \neq Z$.

Алгебру $\mathcal{A}(\Phi)$ можно определить и для k-категории с бесконечным числом объектов (см. [3,§2]).

Понятно, что между представлениями k-категории Φ и k-алгебры $\mathcal{A}\Phi$ имеется взаимно однозначное соответствие; более того, их категории представлений изоморфны. В частности, категория Φ имеет конечный тип тогда и только тогда, когда конечный тип имеет алгебра $\mathcal{A}(\Phi)$.

1.3. Представления колчанов. Пусть Q — колчан, т. е. ориентированный граф. Множество вершин колчана Q будем обозначать через Q_0, а множество его стрелок —

через Q_1; колчан Q называют конечным, если Q_0 и Q_1 конечны. Начальную вершину стрелки λ (т. е. вершину из которой выходит λ) обозначаем через $s(\lambda)$ и концевую вершину стрелки λ (т. е. вершину в которую входит λ) обозначаем через $t(\lambda)$. Запись $\lambda : x \to y$ означает, что λ является стрелкой, такой, что $s(\lambda) = x$ и $t(\lambda) = y$.

Пусть $x, y \in Q_0$. Путем длины $n \geq 1$ с начальной вершиной x и концевой вершиной y называется последовательность $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ стрелок α_i, такая, что $s(\alpha_1) = x$, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ для любого $1 \leq i < n$ и $t(\alpha_n) = y$. Кроме того, имеется путь $\alpha = 1_x$ длины 0 (для которого начальная и концевые вершины совпадают с x). Начальная и концевая вершины пути α обозначаются соответственно через $s(\alpha)$ и $t(\alpha)$. Два пути α и β называются паралельными, если $s(\alpha) = s(\beta)$ и $t(\alpha) = t(\beta)$.

Каждому колчану Q можно естественным образом сопоставить категорию его путей PQ, объектами которой являются вершины колчана, а множество морфизмов $PQ(x, y)$ состоит из всех путей с начальной точкой x и концевой точкой y; композиция путей определяется естественным образом.

Линейная оболочка kPQ категории PQ называется k-категорией путей колчана Q; она обозначается просто через kQ. В случае, когда Q конечный, можно рассмотреть алгебру $\mathcal{A}(Q)$ его путей; это конечномерная алгебра, базис которой состоит из всех путей. (В предыдущем пункте мы определили конечномерную алгебру по любой конечномерной k-категории, и если эту конструкцию применить к k-категории kQ, то получим как раз алгебру $\mathcal{A}(Q)$.)

Представление $\overline{U}$ колчана $Q = (Q_0, Q_1)$ над полем k состоит из конечномерных векторных k-пространств $U_i, i \in Q_0$, и линейных отображений $\gamma_\alpha : U_x \to U_y$, где $\alpha : x \to y$ пробегает Q_1. Вектор $\overline{d} = (d_x), x \in Q_0$, где $d_x = \dim U_x$ $(i = 1, \dots, n)$, называется вектор-размерностью представления $\overline{U}$. Морфизм φ из $\overline{U}$ в $\overline{U'}$ состоит линейных отображений $\varphi_x : U_x \to U'_x, x \in Q_0$, таких, что для каждой стрелки $\alpha : x \to y$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\gamma_\alpha} & U_y \\ {\scriptstyle\varphi_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_y} \\ U'_x & \xrightarrow{\gamma'_\alpha} & U'_y \end{array}$$

коммутативна.

Для представления $\overline{U}$ колчана Q положим $U = \{U_x \,|\, x \in Q_0\}$ и $\gamma = \{\gamma_\alpha \,|\, \alpha \in Q_1\}$. Используя эти наборы, $\overline{U}$ можно записать в краткой форме: $\overline{U} = (U, \gamma)$.

Категорию представлений колчана Q (которая является категорией Крулля-Шмидта) будем обозначать через $Rep\,Q$.

Очевидно, что между представлениями колчана Q и k-категории kQ имеется естественное взаимно однозначное соответствие; более того, их категории представлений изоморфны. Отсюда и из сказанного в предыдущем пункте следует, что взаимно однозначное соответствие имеется между представлениями конечного колчана Q и представлениями конечномерной алгебры $\mathcal{A}(Q)$.

Переходим теперь к представлениям колчанов с соотношениями.

Соотношением для колчана $Q = (Q_0, Q_1)$ называют произвольную k-линейную комбинацию его паралельных путей. Пусть $\lambda = \{\lambda_i \,|\, i \in I\}$ — некоторый набор соотношений для Q. Представлением колчана Q с соотношениями λ_i, $i \in I$, называется произвольное представление $\overline{U} = (U, \gamma)$ колчана Q, такое, что при подстановке в каждое λ_i вместо всех его стрелок соответствующих им линейных отображений получается нулевое отображение (если в λ_i входит какой-либо путь 1_x длины 0, то ему сопоставляется тождественное отображение пространства U_x). Исходя из последнего определения, в этой ситуации часто говорят, что мы имеем колчан Q с соотношениями $\lambda_i = 0$ $(i \in I)$.

Заметим, что колчан с соотношениями $(Q, \lambda) = (Q_0, Q_1, \lambda)$ определяет k-категорию $kQ/\mathcal{I}$, где $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\lambda)$ — идеал в kQ, порожденный λ_i $(i \in I)$. Обратно, если рассмотреть идеал $\mathcal{I}$ категории kQ и зафиксировать в нем морфизмы λ_i, которые его порождают (в частности, в качестве таких морфизмов можно взять все морфизмы из $\mathcal{I}$), то мы будем иметь колчан с соотношениями (Q, λ), где λ обозначает множество всех λ_i.

Представлением колчана с соотношениями (Q, λ) образуют категорию, которая является полной подкатегорией категории $Rep\,Q$. Очевидно, что между представлениями колчана Q с соотношениями $\lambda_i = 0$ $(i \in I)$ и представлениями k-категории $kQ/\mathcal{I}$, где $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\lambda)$, существует естественное взаимно однозначное соответствие; более того, соответствующие категории представлений изоморфны. То же самое можно сказать и о связи между представлениями рассматриваемого колчана с соотношениями и представлениями алгебры $\mathcal{A}(Q)/\mathcal{I}^\circ$, где $\mathcal{I}^\circ = \mathcal{I}^\circ(\lambda)$ — идеал в $\mathcal{A}(Q)$, порожденный λ_i (заметим, что $\mathcal{A}(Q)/\mathcal{I}^\circ \cong \mathcal{A}(kQ/\mathcal{I})$).

1.4. Колчан с соотношениями категории Крулля-Шмидта. Пусть Ψ — спектроид. Будем считать, что число его объектов конечно. Колчан Q_Ψ категории Ψ определяется следующим образом. Q_Ψ имеет в качестве вершин объекты из Ψ. Число стрелок из вершины X в вершину Y равно размерности пространства $\mathcal{R}_\Psi(X,Y)/\mathcal{R}^2_\Psi(X,Y)$. Далее, сопоставим каждой стрелке $\alpha : X \to Y$ колчана Q_Ψ радикальный морфизм $\overline{\alpha} \in \mathcal{R}_\Psi(X,Y)$ таким образом, чтобы для каждой пары (X,Y) пространство $\mathcal{R}_\Psi(X,Y)$ являлось прямой суммой подпространства $\mathcal{R}^2_\Psi(X,Y)$ и подпространства, порожденного всеми морфизмами $\overline{\alpha} : X \to Y$. Мы имеем функтор $F : kQ_\Psi \to \Psi$, такой, что $XF = X$ для каждой вершины X и $\alpha F = \overline{\alpha}$ для каждой стрелки α. Поскольку k-категория Ψ конечномерна и число ее объектов конечно, то $\mathcal{R}^s_\Psi = 0$ для некоторого натурального s, и легко видеть, что функтор F полный. Значит мы имеем эквивалентность категорий $kQ_\Psi/\mathrm{Ker}F \to \Psi$.

Если теперь зафиксировать в идеале $\mathrm{Ker}F$ морфизмы λ_i, $i \in I$, которые его порождают, то мы будем иметь колчан с соотношениями $\overline{Q}_\Psi = (Q_\Psi, \lambda)$, где λ обозначает множество всех λ_i (см. предыдущий пункт). Будем его называть колчаном с соотношениями спектроида Ψ. Заметим, что колчан Q_Ψ определяется категорией Ψ однозначно, а колчан с соотношениями $\overline{Q}_\Psi$ — нет.

В случае, когда Φ — k-категория Крулля-Шмидта, имеющая (с точностью до изоморфизма) конечное число неразложимых объектов, мы называем ее колчаном с соотношениями $\overline{Q}_\Phi$ колчан с соотношениями $\overline{Q}_{\Phi_0}$, где Φ_0 — главный спектроид Φ.

1.5. Форма Титса колчана с соотношениями и категории Крулля-Шмидта. Пусть $\overline{Q} = (Q, \lambda)$ — конечный колчан с соотношениями и пусть $\lambda = \{\lambda_i \,|\, i \in I\}$. Положим $\Gamma = kQ$ и обозначим через $\mathcal{R}$ радикал Γ. Обозначим, далее, через $\mathcal{I}$ идеал в Γ, порожденный всеми λ_i, через $\mathcal{J}$ идеал в Γ, порожденный всеми стрелками и через $\mathcal{K}$ идеал в Γ, порожденный идеалами $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$. Будем считать, что каждое λ_i принадлежит $\mathcal{R}^2$ и что категория $\Gamma = kQ/\mathcal{I}$ конечномерна (тогда Γ — спектроид). Квадратичной формой Титса колчана с соотношениями $\overline{Q}$ называется следующая форма $q_{\overline{Q}} : \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$:

$$q_{\overline{Q}}(z) = \sum_{x \in Q_0} z_x^2 - \sum_{x \to y} z_x z_y + \sum_{x,y \in Q_0} r_{xy} z_x z_y,$$

где $x \to y$ пробегает множество Q_1 и $r_{xy} = \dim\mathcal{I}(x,y) - \dim\mathcal{K}(x,y)$.

Определим теперь форму Титса $q_\Psi(z)$ для спектроида Ψ с конечным числом объектов: $q_\Psi(z)$ — это форма Титса $q_{\overline{Q}}(z)$ для колчана с соотношениями $\overline{Q}$ спектроида Ψ (см. предыдущий пункт).

В случае, когда Φ — k-категория Крулля-Шмидта, имеющая (с точностью до изоморфизма) конечное число неразложимых объектов, мы называем ее формой Титса $q_\Phi(z)$ форму Титса $q_{\Phi_0}(z)$, где Φ_0 — главный спектроид Φ.

1.6. Представления частично упорядоченных множеств. Напомним определение представления ч. у. множества A [4] в терминах градуированных векторных пространств 5 (в [4] используется матричный язык).

Пусть A — ч. у. множество и k — произвольное поле.

Дадим сначала определение категории A-градуированных векторных пространств над k [5]. A-градуированное векторное пространство над k (или просто A-градуированное k-пространство) — это прямая сумма $U = \bigoplus_{x \in A} U_x$ векторных k-пространств U_x. Целочисленный вектор $\overline{d} = \overline{d}(U) = (d_x), x \in A$, где $d_x = \dim U_x$, называется вектор-размерностью пространства U; его размерность $\dim U = \sum_{x \in A} d_x$ обозначается сокращенно через $d = d(U)$.

Линейное отображение $\varphi : U \to U'$, где U, U' — A-градуированные k-пространства, называется A-отображением, если $\varphi_{bc} = 0$ всякий раз, когда $b \not\leq c$, где φ_{xy} обозначает линейное отображение U_x в U'_y, индуцированное отображением φ (т. е. $\varphi_{xy} = i_x \varphi \pi'_y$, где i_x — вложение U_x в U, а π'_y — проекция U' на U'_y). Множество всех A-отображений U в U' (которое есть подпространством в $\mathrm{Hom}(U, U')$) обозначаем через $\mathrm{Hom}_A(U, U')$. A-отображение φ естественно отождествлять с матрицей (φ_{xy}), $x, y \in A$; тогда сумма и произведение A-отображений определяются соответственно суммой и произведением этих матриц (откуда, в частности, следует, что сумма и произведение A-отображений являются A-отображениями).

Категория A-градуированных векторных пространств над полем k — это категория, объектами которой есть A-градуированные векторные пространства над k, а морфизмами — A-отображения. Эту категорию, которая является категорией Крулля-Шмидта, будем обозначать через $\mathrm{mod}_A k$, по аналогии с категорией конечномерных векторных k-пространств $\mathrm{mod}\, k$.

"Диагональная часть" отображения $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(U, U')$ обозначается через φ^∂, т. е. φ^∂ — это следующее A-отображение: $\varphi^\partial_{xx} = \varphi_{xx}$ и $\varphi^\partial_{xy} = 0$ при $x \neq y$. В случае, когда $\varphi = \varphi^\partial$, A-отображение φ будем называть диагональным (A-)отображением.

Очевидно, что A-отображение $\varphi : U \to U'$ является биективным тогда и только тогда, когда биективным является отображение $\varphi^\partial : U \to U'$ (или, что то же самое, биективными являются все отображения φ_{xx}). Но в случае, когда речь идет об инъективных или сюръективных A-отображениях, аналогичные свойства уже не выполняются. A-отображение $\varphi : U \to U'$ назовем ∂-инъективным или ∂-мономорфизмом в $\mathrm{mod}_A k$, если отображение φ^∂ инъективно (или, что то же самое, — мономорфизм в $\mathrm{mod}\, k$). Далее, A-отображение $\varphi : U \to U'$ назовем ∂-сюръективным или ∂-эпиморфизмом в $\mathrm{mod}_A k$, если отображение φ^∂ сюръективно (или, что то же самое, — эпиморфизм в $\mathrm{mod}\, k$).

Заметим, что термин "∂-мономорфизм" (соответственно "∂-эпиморфизм") оправдывается тем, что такой морфизм является мономорфизмом (соответственно эпиморфизмом) в $\mathrm{mod}_A k$.

В дальнейшем нам понадобятся следуюшие утверждения.

Лемма 1. *Если A-отображение $\varphi : U \to V$ является ∂-биективным, то отображение φ^{-1} также является A-отображением (а следовательно φ — изоморфизмом* *в* $\mathrm{mod}_A k$*).*

Действительно, произведение A-отображений $(\varphi^\partial)^{-1} : V \to U$ и $\varphi : U \to V$ является A-отображеним вида $1_V + \psi$, где $1_V : V \to V$ — тождественное отображение и $\psi : V \to V$ — нильпотентное A-отображение (а именно $\psi^n = 0$, где $n = |A|$); значит $\varphi^{-1} = (\varphi^\partial)^{-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \psi^i$, откуда имеем требуемое утверждение.

Лемма 2. *Произвольное ∂-инъективное A-отображение $\varphi : U \to V$ можно представить в виде произведения (инъективного) отображения φ^∂ и биективного A-отображения $\alpha : V \to V$. Более того, можно считать, что $\alpha^\partial = 1_V$.*

Действительно, поскольку все φ_{xx} — мономорфизмы, то для любых $a, b \in A$, $a \neq b$, существует отображение $\alpha_{ab} : U_a \to V_b$, такое, что $\varphi_{ab} = \varphi_{aa}\alpha_{ab}$. А тогда в качестве α можно взять A-отображение $(\alpha_{ab}), a, b \in A$, где $\alpha_{aa} = 1_{V_a}$.

Лемма 3. *Пусть $\varphi : U \to V$ и $\psi : U \to W$ — морфизмы в $\mathrm{mod}_A k$, причем φ является ∂-мономорфизмом. Тогда существует морфизм $\lambda : V \to W$, такой, что $\varphi\lambda = \psi$.*

Действительно, в силу предыдущей леммы $\varphi = \varphi^\partial\alpha$, где $\alpha : V \to V$ — изоморфизм в $\mathrm{mod}\,\mathrm{k}$. И легко видеть, что уравнение $\varphi\lambda = \psi$ имеет следующее решение: $\lambda = \alpha^{-1}\lambda'$, где λ' — такое A-отображение, для которого произвольное $\lambda'_{xy} : V_x \to W_y$ задается равенством $\varphi_{xx}\lambda'_{xy} = \psi_{xy}$.

Переходим теперь к определению представлений ч. у. множеств.

Представление ч. у. множества A — это тройка $X = (V, U, \gamma)$, состоящая из пространств $V \in \mathrm{mod}\,k$, $U \in \mathrm{mod}_A k$ и линейного отображения $\gamma : V \to U$. Мы отождествляем отображение γ с вектором (γ_a), $a \in A$, где γ_a — отображение V в U_a, индуцированное γ. Прямой суммой представлений $X = (V, U, \gamma)$ и $X' = (V', U', \gamma')$ называется представление $X \oplus X' = (V \oplus V', U \oplus U', \gamma \oplus \gamma')$.

Вектор $\overline{d} = \overline{d}(X) = (d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n)$, где $d_0 = \dim V$ и $d_i = \dim U_i$, называется вектор-размерностью представления X, а число $d = d(X) = \dim V + \dim U$ — его размерностью.

Морфизмом из (V, U, γ) в (V', U', γ') есть произвольная пара (μ, ν) линейных отображений $\mu \in \mathrm{Hom}(V, V')$ и $\nu \in \mathrm{Hom}_A(U, U')$, таких, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mu"'] & U \arrow[d, "\nu"] \\ V' \arrow[r, "\gamma'"] & U' \end{tikzcd}$$

коммутативна. Перемножаются морфизмы покоординатно. Очевидно, что морфизм (μ, ν) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда μ — изоморфизм в $\mathrm{mod}\,k$ и ν — изоморфизм в $\mathrm{mod}_A k$.

Категория представлений (над полем k) ч. у. множества A обозначается нами через $Rep_k A$ или просто через $Rep A$. В силу основного результата работы [6] она является категорией Крулля-Шмидта.

Морфизм (μ, ν) категории $Rep A$ будем называть диагональным, если ν — диагональный морфизм категории $\mathrm{mod}_A k$. Далее, морфизм (μ, ν) назовем ∂-мономорфизмом (соответственно ∂-эпиморфизмом), если μ — мономорфизм (соответственно эпиморфизм) в $\mathrm{mod}\,k$ и ν — ∂-мономорфизм (соответственно ∂-эпиморфизм) в $\mathrm{mod}_A k$. Очевидно, что морфизм (μ, ν) является изоморфизмом в $Rep A$ тогда и только тогда, когда он является ∂-мономорфизмом и ∂-эпиморфизмом.

Заметим, что термин "∂-мономорфизм" (соответственно "∂-эпиморфизм") оправдывается тем, что такой морфизм является мономорфизмом (соответственно эпиморфизм) в $RepA$.

Лемма 4. *Произвольный ∂-мономорфизм $(\mu,\nu) : X = (V,U,\gamma) \to X' = (V',U',\gamma')$ категории $RepA$ можно представить в виде произведения диагонального ∂-мономорфизма $(\mu_1,\nu_1) : X \to X''$ и изоморфизма $(\mu_2,\nu_2) : X'' \to X'$. Более того, можно считать, что $X'' = X'$ и $(\nu_2)^\partial = 1_{U'}$.*

Действительно, в силу леммы 2 $\nu = \nu^\partial \nu_0$, где $\nu_0 : U' \to U'$ — изоморфизм в $\mathrm{mod}_A k$, такой, что $\nu_0^\partial = 1_{U'}$. Тогда (μ,ν) есть произведение диагонального ∂-мономорфизма $(\mu,\nu^\partial) : (V,U,\gamma) \to (V',U',\gamma'\nu_0^{-1})$ и изоморфизма $(1_{V'},\nu_0) : (V',U',\gamma'\nu_0^{-1}) \to (V',U',\gamma')$.

2. Основной результат. В этом параграфе ми сформулируем и докажем основной результат настоящей работы.

2.1. Формулировка основного результата. В случае, когда морфизм $\alpha = (\mu,\nu) : X \to Y$ категории $RepA$ является ∂-мономорфизмом, мы будем писать $0 \Rightarrow X \overset{\alpha}{\to} Y$, а в случае, когда он является эпиморфизмом, — $X \overset{\alpha}{\to} Y \Rightarrow 0$. Мы называем ∂-точной последовательностью в $RepA$ любую точную последовательностью вида

$$0 \Rightarrow X \to Y \to Z \Rightarrow 0.$$

Представление X ч. у. множества A назовем инъективным, если каждая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \Rightarrow & R' & \to & R \\ & & \downarrow & & \\ & & X & & \end{array}$$

вкладывается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \Rightarrow & R' & \to & R \\ & & \downarrow & \swarrow & \\ & & X & & \end{array}.$$

Очевидно, что представление $X_1 \oplus \ldots \oplus X_s$ является инъективным тогда и только тогда, когда таковым есть каждое из представлений $X_1,\ldots,X_s$. Категорию инъективных представлений ч. у. множества A (т. е. полную подкатегорию в $RepA$, состоящую из всех инъективных представлений) будем обозначать через $InjA$.

Проективные представления ч. у. множества A определяются двойственным образом. Мы не будем подробно говорить о таких представлениях, так как в этой статье они не рассматриваются.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть A — произвольное конечное ч. у. множество и k — произвольное поле. Пусть, далее, $\overline{A}$ обозначает ч. у. множество $A \cup \{+\infty\}$, где $a < +\infty$ для любого $a \in A$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

A) *$InjA$ — категория конечного типа;*

B) *алгебра инцидентности ч. у. множества $\overline{A}$ имеет конечный тип;*

C) *форма Титса категории $InjA$ слабо положительна.*

2.2. Описание инъективных представлений. Среди неразложимых представлений ч. у. множества A наиболее простыми есть следующие представления, которые называются элементарными:

a) $I_{a0} = (0,U,0)$, где $U = U_a = k$ $(a \in A)$;

b) $I_0 = (k,0,0)$;

c) $I_{a1} = (k, U, 1)$, где $U = U_a = k$, $1 = 1_k$ $(a \in A)$.

Следующее утверждение описывает инъективные объекты категории $RepA$.

Предложение 2. *Пусть $X = (V, U, \gamma)$ — представление ч. у. множества A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *представление X является инъективным;*
2) *отображение γ сюръективно;*
3) *представление X изоморфно прямой сумме представлений вида I_0 и I_{a1}:*

$$X \cong (I_0)^s \oplus \left(\bigoplus_{a \in A} (I_{a1})^{s_a} \right)$$

(s, s_a — целые неотрицательные числа).

Доказательство. Обозначим через Rep_0A подкатегорию в $RepA$, состоящую из всех объектов и всех диагональных морфизмов $RepA$. Категория Rep_0A изоморфна категории $RepQ$ представлений колчана Q с множеством вершин $Q_0 = \{p_a \,|\, a \in A \cup 0\}$ и множеством стрелок $Q_1 = \{\alpha_a : 0 \to p_a \,|\, a \in A\}$; $RepQ$ — абелева категория Крулля-Шмидта. В качестве функтора $F : Rep_0A \to RepQ$, являющегося изоморфизмом категорий, естественно взять функтор, сопоставляющий объекту $(V, U, \gamma) \in Rep_0A$ объект $(W, \lambda) \in RepQ$, где $W_0 = V, W_a = U_a$, $\lambda_{\alpha_a} = \gamma_a$ $(a \in A)$ и морфизму $(\mu, \nu) : (V, U, \gamma) \to (V', U', \gamma')$ из Rep_0A морфизм $\lambda = \{\lambda_x \,|\, x \in Q_0\}$ из $RepQ$, где $\lambda_0 = \mu$ и $\lambda_a = \nu_{aa}$ $(a \in A)$. Обратный функтор $F^{-1} : RepQ \to Rep_0A$ задается следующим образом: $(W, \lambda)F^{-1} = (V, U, \gamma)$, где $V = W_0$, $U_a = W_a$ и $\gamma_a = \lambda_{\alpha_a}$ $(a \in A)$, и $\lambda F^{-1} = (\mu, \nu)$, где $\mu = \lambda_0$ и $\nu_{aa} = \lambda_a$ $(a \in A)$. В дальнейшем мы отождествляем категории $RepQ$ и Rep_0A.

Заметим, что поскольку категория $RepQ$ изоморфна (конечномерной) k-алгебре $\mathcal{A}(Q)$ путей колчана Q, то при рассмотрении свойств представлений колчана Q мы можем использовать известные факты из теории конечномерных алгебр (например, о явном виде неразложимых инъективных представлений алгебр и т. п.); мы будем делать это, не говоря об указанном изоморфизме.

Нам понадобится следующая лемма об инъективных объектах категории Rep_0A.

Лемма 5. a) *Неразложимые инъективные объекты категории Rep_0A исчерпываются (с точностью до изоморфизма) объектами I_{a1}, где a пробегает A, и I_0.*

b) *Объект $X = (V, U, \gamma)$ категории Rep_0A является инъективным тогда и только тогда, когда отображение γ сюръективно.*

Доказательство. Утверждение а) хорошо известно. Утверждение о сюръективности отображения γ для любого инъективного объекта $X = (V, U, \gamma)$ следует из утверждения а) (с учетом того, что Rep_0A — категория Крулля-Шмидта).

Нам осталось показать, что объект $X = (V, U, \gamma)$ является инъективным, если γ сюръективно.

Положим $V_0 = \mathrm{Ker}\gamma$ и зафиксируем подпространство W в V, такое, что $V = V_0 \oplus W$. Тогда, очевидно, $X \cong (V_0, U, \gamma_0) \oplus (W, 0, 0)$, где γ_0 — ограничение γ на V_0; и так как γ — сюръективное отображение, то отображение γ_0 биективно. Следовательно, если положить $d_a = \mathrm{dim}U_a$ и $h = \mathrm{dim}W$, то $(V_0, U, \gamma_0) \cong \bigoplus_{a \in A} (I_{a1})^{d_a}$ и $(W, 0, 0) \cong (I_0)^h$; значит в силу утверждения а) объект X инъективный.

Лемма 5 доказана.

Переходим теперь непосредственно к доказательству предложения.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $X = (V, U, \gamma)$ — представление ч. у. множества A с сюръективным отображением γ. Пусть, далее, $(\alpha, \beta) : Y = (M, N, \lambda) \to Z = (M', N', \lambda')$

— произвольный (фиксированный) ∂-мономорфизм и (μ, ν) — произвольный (фиксированный) морфизм из Y в X; тогда $\lambda\beta = \alpha\lambda'$ и $\lambda\nu = \mu\gamma$. Покажем, что существует морфизм $(\sigma, \delta) : Z \to X$, такой, что $(\alpha, \beta)(\sigma, \delta) = (\mu, \nu)$.

Поскольку X изоморфен (не только в $RepA$, но даже в Rep_0A) прямой сумме объектов (V_0, U, γ_0) и $(W, 0, 0)$, где $V_0 = \mathrm{Ker}\gamma$ и γ_0 — ограничение γ на V_0 (см. доказательство утверждения b) леммы 5), то достаточно показать, что X является инъективным объектом категории $RepA$ в следующих случаях:

a) γ — биективное отображение;

b) $U = 0$ (тогда $\gamma = 0$).

Рассмотрим сначала случай a).

В силу леммы 3 существует A-отображение $\delta : N' \to U$, такое, что $\beta\delta = \nu$; положим $\sigma = \lambda'\delta\gamma^{-1}$. Легко видеть, что (σ, δ) — морфизм из Z в X: $\sigma\gamma = (\lambda'\delta\gamma^{-1})\gamma = \lambda'\delta$. Кроме того, $\alpha\sigma = \mu$: $\alpha\sigma = \alpha(\lambda'\delta\gamma^{-1}) = (\alpha\lambda')\delta\gamma^{-1} = (\lambda\beta)\delta\gamma^{-1} = \lambda(\beta\delta)\gamma^{-1} = \lambda\nu\gamma^{-1} = (\lambda\nu)\gamma^{-1} = (\mu\gamma)\gamma^{-1} = \mu$. Таким образом, (σ, δ) — требуемый морфизм.

Рассмотрим теперь случай b).

Поскольку $U = 0$, то $\gamma = 0$ и $\nu = 0$. Зафиксируем отображение $\sigma : M' \to V$, такой, что $\alpha\sigma = \mu$ (оно существует в силу того, что отображение $\alpha : M \to M'$ инъективно). Легко видеть, что если положить $\delta = 0$, то $\lambda'\delta = \sigma\gamma = 0$, т. е. пара (σ, δ) является морфизмом из Y в X; кроме того, $(\alpha, \beta)(\sigma, \delta) = (\alpha, \beta)(\sigma, 0) = (\mu, 0) = (\mu, \nu)$. Таким образом, $(\sigma, 0)$ — требуемый морфизм.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 2). Эта импликация очевидна, поскольку каждое элементарное представление $X = (V, U, \gamma)$ вида $b)$ и $c)$ имеет в качестве γ сюръективное отображение.

Импликация 1) $\Rightarrow$ 3). Пусть теперь X — инъективный объект категории $RepA$. Рассмотрим его как объект категории Rep_0A и пусть i — мономорфизм из X в некоторый инъективный объект R (i и R принадлежат Rep_0A), который, как мы уже знаем, изоморфен прямой сумме объектов вида I_{a1} и I_0. Отметим, что всякий мономорфим из Rep_0A является ∂-мономорфизмом. Поскольку X — инъективный объект категории $RepA$, то для некоторого морфизма $\alpha : R \to X$ (из $RepA$) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \Rightarrow & X & \xrightarrow{i} & R \\ & & \| & \swarrow & {\scriptstyle\alpha} \\ & & X & & \end{array},$$

т. е. $i\alpha = 1_X$. И поскольку $RepA$ является категорией Крулля-Шмидта, то из последнего равенства следует, что X выделяется прямым слагаемым из R, т. е. $R \cong X \oplus X'$ для некоторого объекта X'. Значит (снова в силу того, что $RepA$ — категория Крулля-Шмидта) X является прямой суммой объектов вида I_{a1} и I_0, что и требовалось доказать.

Предложение 2 доказано.

2.3. Доказательство теоремы. В силу предложения 1 и определения формы Титса категории Крулля-Шмидта мы можем вместо категории $InjA$ рассматривать ее главный спектроид Inj_0A.

Опишем сначала категорию $\Lambda = Inj_0A$. Ее объектами являются элементарные представления I_{a1} (a пробегает A) и I_0. Единичный морфизм объекта I_{a1} (соответственно I_0) обозначаем через 1_{a1} (соответственно 1_0), а тождественное отображение $k \to k$ обозначаем (как и раньше) через 1_k. Далее, легко видеть, что $\Lambda(I_{a1}, I_{a1}) = 1_{a1}k$, $\Lambda(I_0, I_0) = 1_0k$, $\Lambda(I_0, I_{a1}) = 0$ и $\Lambda(I_{a1}, I_{b1}) = 0$ для любых $a \not\leq b$. Если же $a < b$, то

$\Lambda(I_{a1}, I_{b1}) = \alpha_{ab}k$, где $\alpha_{ab} = (1_k, 1_k)$. Наконец, $\Lambda(I_{a1}, I_0) = \alpha_{a0}k$, где $\alpha_{a0} = (1_k, 0)$. Заметим, что нулевой морфизм — это морфизм $(0, 0)$. Поскольку согласно определению категории $RepA$ морфизмы умножаются покоординатно — $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$, то имеем $\alpha_{ab}\alpha_{bc} = \alpha_{ac}$ и $\alpha_{ab}\alpha_{b0} = \alpha_{a0}$; в остальных случаях композиция неединичных морфизмов равна нулю.

Непосредственно из описания категории Inj_0A следует, что алгебра $\mathcal{A}(Inj_0A)$ изоморфна алгебре инцидентности ч. у. множества $\overline{A}$. Поэтому условия $A)$ и $B)$ теоремы эквивалентны.

Докажем теперь эквивалентность условий $A)$ и $C)$.

Легко видеть, что колчаном категории $\Lambda = Inj_0A$ является следующий колчан $Q = Q_\Lambda$: $Q_0 = \overline{A}$, а Q_1 состоит из стрелок вида $(a, 0) : a \to 0$, где a — максимальный елемент A, и стрелок вида $(a, b) : a \to b$, где a и b — соседние элементы A и при этом $a < b$ (элементы x и y называются соседними, если не существует элемента z, такого, что $x < z < y$ или $y < z < x$). Если говорить о колчане с соотношениями $\overline{Q} = \overline{Q}_\Lambda$ категории $\Lambda = Inj_0A$, то мы имеем коммутативный колчан, т. е. любые два пути в колчане $Q = Q_\Lambda$, начальные и концевые точки которых совпадают, равны. Коммутативные колчаны конечного типа описаны в [7]. Поскольку по определению форма Титса категории $\Lambda = Inj_0A$ — это форма Титса колчана $\overline{Q}_\Lambda$, то эквивалентность условий $A)$ и $C)$ вытекает из результатов работы [7]. Заметим, что в нашем случае колчан $\overline{Q}_\Lambda$ определяется категорией Λ однозначно.

Теорема доказана.

1. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – **6**. – P. 71–103.
2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.
3. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 264 p.
4. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.
5. *Bondarenko V. M.* Linear operator on S-graded vector spaces // Linear Algebra Appl. – 2003 – **365**. – P. 45–90.
6. *Дрозд Ю. А.* Матричные задачи икатегории матриц // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 144–153.
7. *Завадский А. Г., Шкабара А. С.* Коммутативные колчаны и матричные алгебры конечного типа (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 76-3). Киев: 1976. – 52 с.

Одержано 19.09.2005