УДК 512.562

М.В. Стьопочкіна, к.ф.-м.н., доц.
ПВНЗ "Інститут підприємництва та сучасних технологій"

УМОВИ СІЛЬВЕСТРА ДЛЯ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН

Отримано опис частково впорядкованих множин із додатно визначеною формою Тітса та мінімальних частково впорядкованих множин, форма Тітса яких не є додатно визначеною.

Вступ. Квадратичні форми виникають при розв'язанні багатьох задач в алгебрі, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, функціональному аналізі та інших галузях математики. Серед квадратичних форм важливу роль відіграють квадратичні форми Тітса для різноманітних об'єктів – графів, частково впорядкованих множин, алгебр тощо, які й розглядаються в даній роботі.

У роботі [1] П.Габріель зіставив сагайдаку (орієнтованому графу) деяку квадратичну форму, яку він назвав квадратичною формою Тітса і яка відіграє важливу роль у теорії скінченномірних зображень графів. В цій же роботі показано, що граф має скінченний тип (тобто скінченне, з точністю до ізоморфізму, число нерозкладаних зображень) тоді і тільки тоді, коли відповідна йому форма Тітса є додатно визначеною. Ця робота поклала початок новому напрямку в алгебрі, який вивчає зв'язок між властивостями зображень різноманітних об'єктів та властивостями пов'язаних з ними квадратичних форм.

Наступними роботами в цьому напрямку є роботи Ш.Бреннер [2] та Ю.А. Дрозда [3], в яких даються означення квадратичних форм Тітса відповідно для сагайдаків з відношеннями та частково впорядкованих множин. У роботі [3] показано, що частково впорядкована множина має скінченний тип тоді і тільки тоді, коли її форма Тітса слабо додатна.

Основні поняття. Всі розглянуті в цій роботі частково впорядковані множини є скінченними. Під підмножиною X частково впорядкованої множини S ми завжди розуміємо підмножину, повну відносно відношення часткового порядку (тобто, якщо $a, b \in X$, то $a \geq b$ в X тоді і тільки тоді, коли $a \geq b$ в S).

Нагадаємо, що якщо частково впорядкована множина S є об'єднанням своїх підмножин, які попарно не перетинаються, $A_1, ..., A_s, s \geq 1$, то вважають, що S є сумою цих підмножин та записують $S = A_1 + ... + A_s$; якщо при цьому елементи різних доданків завжди непорівнянні, то S називається прямою сумою заданих підмножин.

Нехай частково впорядкована множина S є сумою підмножин $A_1, ..., A_s$. Ця сума називається односторонньою, якщо (з точністю до перенумерації доданків) $i < j$ щоразу, коли існують елементи $b \in A_i$ і $c \in A_j$, $i \neq j$, такі, що $b < c$. Далі сума $S = A_1 + ... + A_s$ називається мінімаксною, якщо x є мінімальним, а y – максимальним елементом множини S щоразу, коли x і y належать різним доданкам і при цьому $x < y$. Формально пряма сума підмножин є мінімаксною, однак в подальшому, говорячи про мінімаксну суму, завжди вважатимемо, що вона не є прямою.

Частково впорядкована множина з єдиною парою непорівнянних елементів називається майже ланцюговою (ланцюговою називається будь-яка лінійно впорядкована множина).

Елементи (a, b), де $a < b$, назвемо сусідніми, якщо не існує такого елемента x, що $a < x < b$. Кількість сусідніх пар елементів таких, що $a \in A_i$ і $b \in A_j$, $i \neq j$, де A_i і A_j – різні ланцюги, назвемо рангом і позначимо $r(A_i, A_j)$.

Нагадаємо, нарешті, означення квадратичної форми Тітса $q_S(z)$ для будь-якої частково впорядкованої множини S. Згідно з означенням, це квадратична форма $q_S(z): Z_0^{S\cup 0} \to Z$, що задається рівністю

$$q(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j,\, i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i \ .$$

Назвемо цю форму додатно визначеною або просто додатною, якщо вона набуває додатних значеннь для всіх ненульових $z \in Z_0^{S\cup 0}$, і слабо додатною, якщо вона додатна на множині всіх векторів $z \in Z_0^{S\cup 0}$, що мають невід'ємні координати.

Частково впорядковану множину S назвемо P-критичною або просто критичною, якщо форма Тітса будь-якої її власної підмножини є додатною, але форма Тітса самої S такою не є.

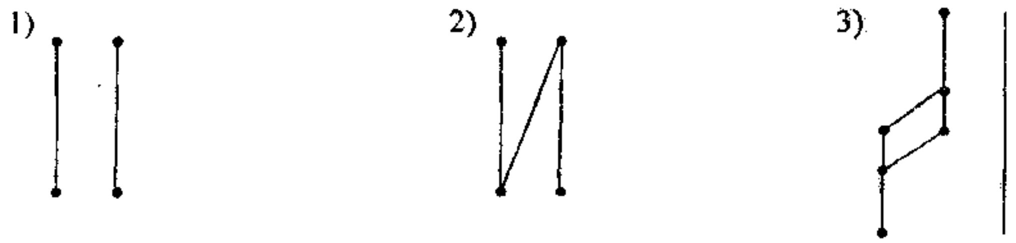
Гіпотеза Бондаренка. Якщо S – частково впорядкована множина порядку $n \ge 8$ з додатно визначеною формою Тітса, то виконується одна з наступних умов:

1) S – пряма сума двох ланцюгових підмножин;

2) S – одностороння мінімаксна сума двох ланцюгових підмножин;

3) S – пряма сума ланцюгової та майже ланцюгової підмножин.

Частково впорядковані множини, геометрично вказані в умові гіпотези, мають наступний вигляд:



Тут кожний вертикальний відрізок є ланцюгом довжини $d \ge 0$, а похилі відрізки проміжних точок не містять.

Оскільки частково впорядкована множина $K_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ (чотири непорівняні точки) є критичною, то додатні частково впорядковані множини слід шукати серед множин ширини 1, 2 або 3.

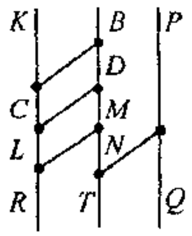
Якщо S ширини 1, то отримаємо ланцюг, який за гіпотезою Бондаренка є додатно визначеним.

Лема 1. Нехай S – частково впорядкована множина ширини 2–3 з додатно визначеною формою Тітса. Тоді S можна представити у вигляді односторонньої суми ланцюгів.

Лема 2. Нехай S – частково впорядкована множина ширини 3 з додатно визначеною формою Тітса. Тоді S можна представити таким чином, що $r(A_1, A_3) = 0$, тобто не існує рангу між першим та третім ланцюгами.

Теорема 1. Нехай S – частково впорядкована множина ширини 3 з додатно визначеною формою Тітса. Тоді S можна представити у вигляді односторонньої суми трьох ланцюгів таким чином, що елементи першого та третього ланцюгів не порівняні.

Наслідок. Нехай S – частково впорядкована множина ширини з додатно визначеною формою Тітса. Тоді S можна представити у вигляді односторонньої суми ланцюгів таким чином, що $r = r(A_1, A_2, A_3) < 4$.



Постановка завдання. Знайдемо всі додатно визначені частково впорядковані множини за допомогою умови Сільвестра. За наслідком з теореми 1 частково впорядкована множина має $r(A_1, A_2, A_3) < 4$. Щоб врахувати всі можливі випадки з точністю до перевороту (бо можливо $r(A_1, A_2) = 3$ або $r(A_1, A_2) = 2$ та $r(A_1, A_2) = 1$ і т.д.), розглянемо наступну множину: $S = \{R < L < C < K,\ T < N < M < D < B,\ Q < P,\ R < M,\ L < D,\ C < S,\ T < P\}$, де відсутні певні підмножини так, щоб виконувалась умова $r < 4$ (тут вертикальний відрізок R є ланцюгом довжини $r \geq 0$, відрізок L є ланцюгом довжини $l \geq 0$ і т.д., а похилі відрізки проміжних точок не містять).

Якщо підмножина з x елементів частково впорядкованої множини S – ланцюг, то її визначник позначатимемо $\frac{1}{2^x} A_x$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 & \dots & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & \dots & 0{,}5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0{,}5 & 0{,}5 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^x} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^x} A_x .$$

Тоді визначник, що відповідає множині S, матиме вигляд

$$\det S = \begin{vmatrix}
1 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\
-0{,}5 & \frac{1}{2^r}A_r & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\
-0{,}5 & 0{,}5 & \frac{1}{2^l}A_l & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & \frac{1}{2^c}A_c & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & \frac{1}{2^k}A_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^p}A_p & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\
-0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & \frac{1}{2^q}A_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^b}A_b & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\
-0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & \frac{1}{2^d}A_d & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\
-0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & \frac{1}{2^m}A_m & 0{,}5 & 0{,}5 \\
-0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & \frac{1}{2^n}A_n & 0{,}5 \\
-0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & \frac{1}{2^t}A_t
\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2^{r+l+c+k+p+q+b+d+m+n+t+1}} \times$$

$$\times\begin{vmatrix}
2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & A_l & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & A_c & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & A_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_p & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & A_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & A_b & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & A_d & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & A_m & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & A_n & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & A_t
\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2^{r+l+c+k+p+q+b+d+m+n+t+1}}\cdot\det S'.$$

Оскільки $2^{r+l+c+k+p+q+b+d+m+n+t+1}>0$, то достатньо розглянути лише визначник $\det S'$. Обчислюючи його, маємо

$$\begin{aligned}\det S' &=2+r+m+b+t+l+p+q+k+n+c+d-rmt-rml-rmk-rmn-rmc-rbt-rbk-rbn-rtq-\\
&-rtd-rpn-rqn-rkd-rnd-rcd-mbl-mbc-mtp-mlp-mlq-mld-mpk-mpc-mqk-mqc-\\
&-btl-btp-btc-blk-bln-bpk-bqk-bkc-bnd-bcd-tlq-tld-tpq-tpn-tpd-tqk-tqc-lpn-\\
&-lqn-lkd-lnd-lcd-pkn-pkd-pnc-pcd-qkn-qkd-qnc-qcd+rmbtl+rmbtc+rmblk+\\
&+rmbln+rmbkc+rmbnc+rmtlq+rmtld+rmtpn+rmtqk+rmtqc+rmlpn+rmlqn+rmlkd+\\
&+rmlnd+rmlcd+rmpkn+rmpnc+rmqkn+rmqnc+rbtpn+rbtqk+rbtcd+rbpkn+rbqkn+\\
&+rbkcd+rtpqn+rtpnd+rtqkd+rtqcd+rpknd+rpncd+rqknd+rqncd+mbtlp+mbtpc+\\
&+mblpk+mblqk+mblcd+mbpkc+mbqkc+mtlpq+mtlpd+mtpqk+mtpqc+mlpkd+\\
&+mlpcd+mlqk+mlqcd+btlpn+btlqk+btlcd+btpqk+btpnc+btpcd+btqkc+blpkn+\\
&+blpcd+blqkn+blnd+bpknc+bpkcd+bqknc+bqkcd+tlpqn+tlpnd+tlqkd+tlqcd+\\
&+tpqkn+tpqkd+tpqnc+tpqcd+lpknd+lpncd+lqknd+lqncd-rmbtlpn-rmbtlqk-\\
&-rmbtlcd-rmbtpnc-rmbtqkc-rmblpkn-rmblqkn-rmblkcd-rmblncd-rmbpknc-\\
&-rmbqknc-rmtlpqn-rmtlpkd-rmtlpnd-rmtlqkd-rmtlqcd-rmtpqkn-rmtpqnc-\\
&-rmlpncd-rmlpknd-rmlqncd-rbtpqkn-rbtpncd-rbtqkcd-rbpkncd-rbqkncd-\\
&-rtpqknd-rtpqncd-mbtlpqk-mbtlpcd-mbtpqkc-mblpkcd-mblqkcd-mtlpqkd-\\
&-mtlpqcd-btlpqkn-btlpncd-btlqkcd-btpqknc-btpqkcd-blpkncd-blqkncd-tlpqknd-\\
&-tlpqncd+rmbtlpqkn+rmbtlpncd+rmbtlqkcd+rmbtpqknc+rmblpkncd+rmblqkncd+\\
&+rmtlpqknd+rmtlpqncd+rbtpqkncd+mbtlpqkcd+btlpqkncd-rmbtlpqkncd.\end{aligned}$$

Теорема 2. Частково впорядкована множина S має додатно визначену форму Тітса тоді і тільки тоді, коли відповідний набір значень r, m, b, t, l, p, q, k, n, c, d та будь-які набори з меншими значеннями параметрів задовольняють умову $\det S'>0$.

За наслідком з теореми 1 можливі шість випадків:

1) частково впорядкована множина має $r(A_1,A_2,A_3)=0$;

2) частково впорядкована множина має $r(A_1,A_2)=1$, $r(A_2,A_3)=0$;

3) частково впорядкована множина має $r(A_1,A_2)=2$, $r(A_2,A_3)=0$;

4) частково впорядкована множина має $r(A_1,A_2)=r(A_2,A_3)=1$;

5) частково впорядкована множина має $r(A_1,A_2)=3$, $r(A_2,A_3)=0$;

6) частково впорядкована множина має $r(A_1,A_2)=2$, $r(A_2,A_3)=1$.

Теорема 3. Частково впорядкована множина S є критичною тоді, коли відповідний набір значень r, m, b, t, l, p, q, k, n, c, d задовольняє умову $\det S' = 0$, а будь-які набори з меншими значеннями параметрів задовольняють умову $\det S' > 0$.

Висновок. У статті [4] отримано опис частково впорядкованих множин із додатно визначеною формою Тітса та мінімальних частково впорядкованих множин, форма Тітса яких не є додатно визначеною.

Література:

1. *Gabriel P.* Unzerleghare Darstellungen // Manuscr. Math. – 1972.– № 6.– P. 71–103, 309.
2. *Brenner S.* Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // Proc. Int. Conf. Representations Algebras. – Ottawa, Ontario: Carleton Univ., 1974. – Paper № 5.
3. *Дрозд Ю.А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функциональный анализ и его приложение. – 1974. – № 8. – С. 34–42.
4. *Бондаренко В.М., Степочкина М.В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т. 2. – № 3. – С. 18–58.
5. *Бондаренко В.М., Стьопочкіна М.В.* Про серійні частково впорядковані множини з додатно визначеною квадратичною формою Тітса // Нелінійні коливання. – Інститут математики НАН України. – 2006. – Т. 3. – С. 21–27.

СТЬОПОЧКІНА Марина Валеріївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент секції вищої математики кафедри гуманітарних та природничих наук ПВНЗ "Інститут підприємництва та сучасних технологій".

Наукові інтереси:

– частково впорядковані множини;

– квадратичні форми Тітса.