UDC 517.983

В. Ф. Журавлев
(Житомирский национальный агроэкологический университет)

ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННО ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА К МАТРИЧНОМУ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The paper considers the conditions of existence and a mode of constructing a limited generalized inverse operator to a linear limited matrix operator in Banach space. The example is in details considered.

В роботі розглянуто умови існування та спосіб побудови обмеженого узагальнено оберненого оператора до лінійного обмеженого матричного оператора у банаховому просторі. Детально розглянуто приклад.

1. Постановка задачи. Пусть $Q : \mathbf{B}_1^s \to \mathbf{B}_2^s$ — матричный оператор, действующий из некоторого банахова пространства числовых последовательностей $\mathbf{B}_1^s$ в банахово пространство числовых последовательностей $\mathbf{B}_2^s$ (символ s — от англ. sequence), который определяется с помощью бесконечномерной матрицы $\{q_{ij}\}_{i=1}^{\infty}{}_{j=1}^{\infty}$.

Известно [1, с. 29], что в фиксированном базисе соответствие между операторами и матрицами взаимно однозначно и обладает обычными алгебраическими свойствами. В различных базисах одному оператору можно поставить в соответствие множество матриц. С другой стороны, в отличие от конечномерного случая, не каждой бесконечномерной матрице соответствует оператор.

Будем рассматривать матрицу $Q = \{q_{ij}\}_{i=1}^{\infty}{}_{j=1}^{\infty}$ как линейный матричный оператор при условии, что он удовлетворяет условию ограниченности

$$\|Qx\|_{\mathbf{B}_2^s} \leq M\|x\|_{\mathbf{B}_2^s}, \forall x \in \mathbf{B}_1^s,$$

где $M < \infty$ — постоянная.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что ядро $N(Q)$ и образ $R(Q)$ матричного оператора Q дополняемы [2] в банаховых пространствах $\mathbf{B}_1^s$ и $\mathbf{B}_2^s$, соответственно. Это условие является необходимым и достаточным условием существования ограниченных проекторов $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{B}_1^s \to N(Q)$ и $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{B}_2^s \to Y_Q$, которые индуцируют разбиение $\mathbf{B}_1^s$ и $\mathbf{B}_2^s$ в прямые топологические суммы замкнутых подпространств

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1^s &= N(Q) \oplus X_Q, \\ \mathbf{B}_2^s &= Y_Q \oplus R(Q). \end{aligned} \tag{1}$$

Это значит, что оператор Q принадлежит классу линейных ограниченных нормально разрешимых обобщенно обратимых операторов [3, с. 139], [4], который будем обозначать $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1^s, \mathbf{B}_2^s)$ ($\mathbf{GI}$ — Generalized Inverses).

Ставится задача о построении ограниченного обобщенно обратного оператора к линейному ограниченному матричному оператору, действующему из банахова пространства последовательностей $\mathbf{B}_1^s$ в банахово пространство последовательностей $\mathbf{B}_2^s$.

2. Обозначения. Известно [5], что сопряженный оператор $Q^* : (\mathbf{B}_2^s)^* \to \to (\mathbf{B}_1^s)^*$ определяется соотношением

$$(Q^*\varphi)(x) = \varphi(Qx),$$

где $(\mathbf{B}_1^s)^*$, $(\mathbf{B}_2^s)^*$ — банаховы пространства сопряженные к банаховым пространствам $\mathbf{B}_1^s$, $\mathbf{B}_2^s$, соответственно. Определим $Q^* : (\mathbf{B}_2)^* \to (\mathbf{B}_1)^*$ — матричный оператор сопряженный к матричному оператору Q следующим образом. Пусть $\varphi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \ldots) \in (\mathbf{B}_2)^*$– функционал, определенный на пространстве $\mathbf{B}_2^s$, $x = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \ldots) \in \mathbf{B}_1^s$. Тогда при условии, что все ряды сходящиеся, равенство

$$\varphi(Qx) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{(i)}(q_{ij}\xi^{(j)}) = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi^{(i)}q_{ij})\xi^{(j)} = \sum_{i=1}^{\infty} (q_{ji}\varphi^{(i)})\xi^{(j)} = (Q^*\varphi)(x)$$

определяет сопряженный оператор Q^*, который в вещественном случае представляет собой транспонированную матрицу Q^T.

Если банаховы пространства $\mathbf{B}_1^s$ и $\mathbf{B}_2^s$ имеют базисы, то ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(Q)}$ и $\mathcal{P}_{Y_Q}$, индуцирующие разбиения (1), можно построить аналитически.

Пусть $N(Q)$ и $N(Q^*)$ — нуль-пространства соответственно операторов Q и Q^*. Обозначим через $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset N(Q) \subset \mathbf{B}_1^s$, $f_i = \mathrm{col}(f_i^{(1)}, f_i^{(2)}, f_i^{(3)}, \ldots)$ — множество числовых последовательностей, которое является полной системой базисных элементов нуль-пространства $N(Q)$, $\|f_i\|_{\mathbf{B}_1^s} = f_i^0 < \infty, (i = 1, 2, 3, \ldots)$, а через $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty} \subset N(Q^*) \subset \mathbf{B}_2^s$, $\varphi_s = \mathrm{col}(\varphi_s^{(1)}, \varphi_s^{(2)}, \varphi_s^{(3)}, \ldots)$, $\|\varphi_s\|_{(\mathbf{B}_2^s)^*} = \varphi_s^0$, $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ — множество числовых последовательностей, которое является тотальной [6] системой функционалов, составляющих базис нуль-пространства $N(Q^*)$.

Пусть $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty} \subset N^*(Q) \subset (\mathbf{B}_1^s)^*$, $\gamma_j = \mathrm{col}(\gamma_j^{(1)}, \gamma_j^{(2)}, \gamma_j^{(3)}, \ldots)$, $\|\gamma_j\|_{(\mathbf{B}_1^s)^*} = \gamma_j^0 < < \infty$ сопряженно биортогональная к $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ система последовательностей, $\gamma_j(f_i) = \delta_{ji}$, а система последовательностей $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Y_Q \subset \mathbf{B}_2^s$, $\psi_k = \mathrm{col}(\psi_k^{(1)}, \psi_k^{(2)}, \psi_k^{(3)}, \ldots)$, $\|\psi_k\|_{\mathbf{B}_2^s} = \psi_k^0 < \infty$ сопряженно биортогональная к $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$, $\varphi_s(\psi_k) = \delta_{sk}$.

Далее введем в рассмотрение:

$$\begin{aligned} X &= (f_1, f_2, \cdots, f_i, \cdots) && - \quad (\infty \times \infty)-, \\ \Gamma &= (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_j, \cdots)^T && - \quad (\infty \times \infty)-, \\ \Phi &= (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k, \cdots)^T && - \quad (\infty \times \infty)-, \\ \Psi &= (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_k, \cdots) && - \quad (\infty \times \infty)- \end{aligned} \tag{2}$$

мерные числовые матрицы, где $\gamma_j(f_i) = \delta_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, $\varphi_k(\psi_s) = \delta_{ks}$, $s, k = = 1, 2, \ldots$

Действие матрицы функционалов Γ на элемент $x \in \mathbf{B}_1^s$, $\|x\|_{\mathbf{B}_1^s} < \infty$ определим как произведение матрицы Γ на вектор-столбец

$$x = \mathrm{col}(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(j)}, \ldots),$$

результатом которого будет бесконечномерный вектор-столбец чисел

$$\Gamma x = \mathrm{col}(\gamma_1 x, \gamma_2 x, \gamma_3 x, \ldots) = \mathrm{col}(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_1^{(j)} \xi^{(j)}, \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_2^{(j)} \xi^{(j)}, \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_3^{(j)} \xi^{(j)}, \ldots).$$

Каждый из рядов $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_i^{(j)} \xi^{(j)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ является абсолютно сходящимся, т.к.

$$|\gamma_i x| \le \|\gamma_i\|_{(\mathbf{B}_1^s)^*} \cdot \|x\|_{\mathbf{B}_1^s} \le \gamma_i^0 \|x\|_{\mathbf{B}_1^s} \le \infty.$$

Аналогично определим действие $(\infty \times \infty)$-мерной матрицы функционалов Γ на $(\infty \times \infty)$-мерную матрицу элементов X как произведение матрицы на матрицу, результатом которого будет $(\infty \times \infty)$-мерная единичная матрица E_∞ с элементами $\gamma_j(f_i)$. Таким образом $\Gamma X = E_\infty$. Аналогично $\Phi\Psi = E_\infty$.

Используя матрицы (2) линейный непрерывный матричный оператор проектирования $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{B}_1^s \to N(Q)$ определим равенством

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = X\Gamma,$$

а линейный непрерывный матричный оператор проектирования $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{B}_2^s \to Y_Q$. определим равенством

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \Psi\Phi.$$

По формулам [7] построим матричные операторы

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}} = \overline{\Psi}\, \overline{\Gamma}, \qquad \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}} : \mathbf{B}_1^s \to Y_Q^{(1)} \subseteq Y_Q, \\ &\overline{\mathcal{P}}_{N^{(1)}(Q)} = \overline{X}\, \overline{\Phi}, \quad \overline{\mathcal{P}}_{N^{(1)}(Q)} : \mathbf{B}_2^s \to N^{(1)}(Q) \subseteq N(Q), \end{aligned} \tag{3}$$

где матрица $\overline{\Psi}$ составлена из элементов $\{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, на которую натянуто подпространство $Y_Q^{(1)}$, матрица $\overline{\Phi}$ — из функционалов $\{\overline{\varphi}_s(\cdot)\}_{s=1}^{\infty} \subset \{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{\infty}$, которые удовлетворяют соотношению $\overline{\varphi}_i(\overline{\psi}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots$, матрица $\overline{X}$ составлена из элементов $\{\overline{f}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, на которую натянуто подпространство $N^{(1)}(Q)$, а матрица $\overline{\Gamma}$ — из функционалов $\{\overline{\gamma}_s(\cdot)\}_{s=1}^{\infty} \subset \{\gamma_s(\cdot)\}_{s=1}^{\infty}$, которые удовлетворяют соотношению $\overline{\gamma}_i(\overline{f}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots$.

Оператор $\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}}$ является расширением на пространство $\mathbf{B}_1^s$ оператора, который осуществляет изоморфизм $N^{(1)}(Q)$ на $Y_Q^{(1)}$, а $\overline{\mathcal{P}}_{N^{(1)}(Q)}$ — оператор, являющийся расширением оператора обратного изоморфному на все пространство $\mathbf{B}_2^s$. Операторы $\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}}$ и $\overline{\mathcal{P}}_{N^{(1)}(Q)}$ будут ограниченными, если подпространство $Y_Q^{(1)}$ будет дополняемым в пространстве Y_Q, а подпространство $N^{(1)}(Q)$ — дополняемым в пространстве $N(Q)$. В дальнейшем это нами и будет предполагаться.

Используя обозначения матриц $\overline{X}, \overline{\Gamma}, \overline{\Phi}, \overline{\Psi}$ проектирующий оператор $\mathcal{P}_{Y_Q^{(1)}}$: $\mathbf{B}_2^s \to Y_Q^{(1)} \subset Y_Q$ определим по формуле

$$\mathcal{P}_{Y_Q^{(1)}} = \overline{\Psi}\, \overline{\Phi}. \tag{4}$$

Оператор $\mathcal{P}_{Y_Q^{(1)}}$ ограничен и разбивает подпространство Y_Q в прямую топологическую сумму подпространств

$$Y = Y_Q^{(1)} \oplus Y_Q^{(2)}, \tag{5}$$

где $Y_Q^{(2)} = \mathcal{P}_{Y_Q^{(2)}}\mathbf{B}_2^s = (\mathcal{P}_{Y_Q} - \mathcal{P}_{Y_Q^{(1)}})\mathbf{B}_2^s$.

Проектирующий оператор $\mathcal{P}_{N^{(1)}(Q)} : \mathbf{B}_1^s \to N^{(1)}(Q) \subset N(Q)$ определим по формуле

$$\mathcal{P}_{N^{(1)}(Q)} = \overline{X}\,\overline{\Gamma}. \qquad (6)$$

Оператор $\mathcal{P}_{N^{(1)}(Q)}$ также ограничен и разбивает подпространство N_Q в прямую топологическую сумму подпространств

$$N(Q) = N^{(1)}(Q) \oplus N^{(2)}(Q), \qquad (7)$$

где $N^{(2)}(Q) = \mathcal{P}_{N^{(2)}(Q)}\mathbf{B}_2^s = (\mathcal{P}_{N(Q)} - \mathcal{P}_{N^{(1)}(Q)})\mathbf{B}_2^s$.

3. Основной результат. Пусть подпространство $N(Q)$ изоморфно некоторой части $Y_Q^{(1)}$ подпространства Y_Q, $N(Q) \cong Y_Q^{(1)}$, причем подпространство $Y_Q^{(1)}$ дополняемо в банаховом пространстве Y_Q. Или наоборот подпространство Y_Q изоморфно некоторой части $N^{(1)}(Q)$ подпространства $N(Q)$, $Y_Q \cong N^{(1)}(Q)$, причем подпространство $N^{(1)}(Q)$ дополняемо в банаховом пространстве $N(Q)$. Тогда имеет место лемма.

Лемма 1. *Пусть $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1^s, \mathbf{B}_2^s)$. Тогда матричный оператор $\overline{Q} = Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}}$ имеет ограниченный обратный на подпространстве $R(\overline{Q})$*

$$\overline{Q}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}})_l^{-1} - & \textit{левый, если} \quad N(Q) \cong Y_Q^{(1)} \subset Y_Q, \\ \\ (Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q})_r^{-1} - & \textit{правый, если} \quad N(Q) \supset N^{(1)}(Q) \cong Y_Q. \end{cases}$$

Общий вид односторонне обратных операторов $\overline{Q}_{l_0,r_0}^{-1}$ задается формулой

$$\overline{Q}_{l_0,r_0}^{-1} = \begin{cases} \overline{Q}_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(2)}}) - & \textit{левый, если} \quad N(Q) \cong Y_Q^{(1)} \subset Y_Q, \\ \\ (I_{\mathbf{B}_1^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q)})\overline{Q}_r^{-1} - & \textit{правый, если} \quad N(Q) \supset N^{(1)}(Q) \cong Y_Q, \end{cases}$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q)} : \mathbf{B}_1 \to N^{(2)}(Q)$ и $\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(2)}} : \mathbf{B}_2^s \to Y_Q^{(2)}$ — произвольные ограниченные бесконечномерные ограниченные проекторы.

Доказательство. Пусть $N(Q)$ изоморфно подпространству $Y_Q^{(1)} \subset Y_Q$. Покажем, что матричный оператор $Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}}$ имеет ограниченный левый обратный. Для этого необходимо и достаточно показать, что [3]:

1) $N(\overline{Q}) = \{0\}$.

2) $R(\overline{Q})$ дополняемо в $\mathbf{B}_2^s$.

1) Пусть существует элемент $x_0 \in \mathbf{B}_1^s$, $x_0 \neq 0$ такой, что

$$(Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}})x_0 = Qx_0 + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}}x_0 = 0. \qquad (8)$$

Из (8) имеем, что

$$Qx_0 \in R(Q), \quad \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}}x_0 \in Y_Q^{(1)}.$$

Поскольку подпространства $R(Q)$ и Y_Q взаимно дополняют друг друга, а $Y_Q^{(1)} \subset Y_Q$, то $R(Q) \bigcap Y_Q^{(1)} = \{0\}$. Откуда следует, что у них может быть только один общий элемент — нулевой, т.е. $Qx_0 = 0$ и $\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}} x_0 = 0$, т. е. $x_0 \in N(Q)$ и $x_0 \in$ $\in N(\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}}) \subset X_Q$ одновременно. Но подпространства $N(Q)$ и X_Q также взаимно дополняют друг друга. Следовательно, $N(Q) \bigcap X_Q = \{0\}$. Отсюда следует, что $x_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $N(Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}}) = \{0\}$.

2) Дополняемость $R(Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}})$ следует из ограниченности проектора (4) $\mathcal{P}_{Y_Q^{(1)}}$ и соотношения (5).

Таким образом, оператор $Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}}$ имеет левый обратный.

Образом оператора $\overline{Q}$ является подпространство $R(\overline{Q}) = R(Q) \oplus Y_Q^{(1)}$. Поэтому ограниченность оператора $\overline{Q}_l^{-1}$ на всем пространстве $\mathbf{B}_2^s$ не обеспечивается. Так как подпространство $\mathbf{B}_2^s \ominus Y_Q^{(2)}$ замкнуто, то оно само является банаховым пространством. Оператор $\overline{Q}$ осуществляет взаимнооднозначное соответствие пространства $\mathbf{B}_1^s$ на пространство $\mathbf{B}_2^s \ominus Y_Q^{(2)}$. Поэтому ограниченность оператора $\overline{Q}_l^{-1}$ обеспечивается только если рассматривать действие оператора $\overline{Q}$ из банахова пространства $\mathbf{B}_1^s$ в банахово пространство $\mathbf{B}_2^s \ominus Y_Q^{(2)}$ [8, с. 134].

Левые обратные операторы в общем виде записываются следующим образом $\overline{Q}_{l_0}^{-1} = \overline{Q}_l^{-1} \mathcal{P}_{R(\overline{Q})}$, [3] где $\mathcal{P}_{R(\overline{Q})}$ — некоторый проектор, обладающий свойством $R(\mathcal{P}_{R(\overline{Q})}) = R(\overline{Q})$. Как следует из (5), таким свойством обладает проектор $I_{\mathbf{B}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(2)}}$, т.е. $R(I_{\mathbf{B}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(2)}}) = R(\overline{Q})$, где $\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(2)}}$ — произвольный бесконечномерный ограниченный проектор. Значит общее представление левых обратных операторов можно записать в виде

$$\overline{Q}_{l_0}^{-1} = \overline{Q}_l^{-1} (I_{\mathbf{B}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(2)}}).$$

Для случая, когда Y_Q изоморфно подпространству $N^{(1)}(Q) \subset N(Q)$ необходимо и достаточно показать что:

1) $R(\overline{Q}) = R(Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q}) = \mathbf{B}_2^s$,

2) $N(Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q})$ дополняемо в $\mathbf{B}_1^s$.

Доказательство проводится аналогично.

Используя лемму 1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1^s, \mathbf{B}_2^s)$. *Тогда на подпространстве* $R(Q)$ *матричный оператор*

$$Q^- = \overline{Q}_{l,r}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N^{(1)}(Q)} \tag{9}$$

является ограниченным обобщенно обратным к матричному оператору Q.

Общий вид ограниченных обобщенно обратных операторов Q_0^- *к матричному оператору* Q *дается формулой*

$$Q_0^- = (I_{\mathbf{B}_1^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N(Q)}) Q^- (I_{\mathbf{B}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q}), \tag{10}$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N(Q)} : \mathbf{B}_1^s \to N(Q)$ *и* $\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q} : \mathbf{B}_2^s \to Y_Q$ *— произвольные ограниченные бесконечномерные проекторы.*

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо и достаточно проверить, что Q^- удовлетворяет свойствам, определяющим обобщенно обратный оператор [4]

$$\begin{aligned} Q^- &= Q^- Q Q^-, \\ Q &= Q Q^- Q. \end{aligned} \tag{11}$$

Для обобщенно обратных операторов справедливы соотношения [4]

$$\begin{aligned} QQ^- &= I_{\mathbf{B}_2^s} - \mathcal{P}_{Y_Q}; \\ Q^-Q &= I_{\mathbf{B}_1^s} - \mathcal{P}_{N(Q)}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\mathcal{P}_{Y_Q}$, $\mathcal{P}_{N(Q)}$ — бесконечномерные ограниченные проекторы.

С учетом (12) проверим выполнение свойств (11). Имеем

$$QQ^-Q = Q\left(I_{\mathbf{B}_1^s} - \mathcal{P}_{N(Q)}\right) = Q - Q\mathcal{P}_{N(Q)} = Q,$$

$$Q^-QQ^- = \left(I_{\mathbf{B}_1^s} - \mathcal{P}_{N(Q)}\right) Q^- = Q^- - \mathcal{P}_{N(Q)}Q^- = Q^-,$$

так как $\mathcal{P}_{N(Q)}Q^- = \mathcal{P}_{N(Q)}\overline{Q}_{l_0,r_0}^{-1} - \mathcal{P}_{N(Q)}\overline{\mathcal{P}}_{N_1(Q)} = \overline{\mathcal{P}}_{N_1(Q)} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(Q)} = 0$ в силу определения операторов $\overline{Q}_{l_0,r_0}^{-1}$, $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(Q)}$ и $\mathcal{P}_{N(Q)}$. Ограниченность оператора Q^- следует из ограниченности оператора $\overline{Q}_{l_0,r_0}^{-1}$ и оператора $\mathcal{P}_{N_1(Q)}$.

Из теоремы 5.2 [3, с. 140] следует, что обобщенно обратные операторы Q_0^- в общем виде записываются следующим образом $Q_0^- = \mathcal{P}_1 Q^- \mathcal{P}_2$, где произвольные проекторы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ удовлетворяют свойствам $(I_{\mathbf{B}_1^s} - \mathcal{P}_1)\mathbf{B}_1^s = N(Q)$, а $\mathcal{P}_2\mathbf{B}_2^s = R(Q)$. В качестве таких проекторов можно взять проекторы $(I_{\mathbf{B}_1^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N(Q)})$ и $(I_{\mathbf{B}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q})$, где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N(Q)} : \mathbf{B}_1^s \to N(Q)$ — произвольный бесконечномерный проектор банахова пространства $\mathbf{B}_1^s$ на нуль-пространство оператора $N(Q)$, а $\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q} : \mathbf{B}_2^s \to Y_Q$ — произвольный бесконечномерный проектор банахова пространства $\mathbf{B}_2^s$ на подпространство Y_Q.

Теорема доказана.

В случае, когда $N(Q)$ изоморфно Y_Q, операторы $\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q}$ и $\overline{\mathcal{P}}_{N^{(1)}(Q)} = \overline{\mathcal{P}}_{N(Q)}$ определяются по формулам

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q} = \Psi\ \Gamma, \qquad \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q} : \mathbf{B}_1^s \to Y_Q,$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} = X\ \Phi, \quad \overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} : \mathbf{B}_2^s \to N(Q).$$

В этом случае имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1^s, \mathbf{B}_2^s)$ и $N(Q)$ изоморфно Y_Q. Тогда на подпространстве $R(Q)$ матричный оператор*

$$Q^- = \overline{Q}^{\,-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} = (Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q})^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} \tag{13}$$

является ограниченным обобщенно обратным к матричному оператору Q.

Доказательство. Если $N(Q)$ изоморфно Y_Q, то подпространство $N^{(1)}(Q) \equiv N(Q)$, а подпространство $Y_Q^{(1)} \equiv Y_Q$. В этом случае существуют и левый и правый обратный операторы к оператору $\overline{Q}$, а значит существует ограниченный обратный оператор $\overline{Q}^{-1}$.

Рассмотрим случаи, когда одно из нуль-пространств операторов $N(Q)$ или $N(Q^*)$ конечномерное. Если $\dim\ker\ N(Q) = n$ — конечно, а $\dim\ker\ N(Q^*)$ — бесконечность, то Q — $n-$нормальный матричный оператор, а если наоборот $\dim\ker\ N(Q)$— бесконечность, а $\dim\ker\ N(Q^*) = d$ — конечно — $d-$нормальный [9].

Для $n-$ нормальных матричных операторов Q, которые представляются в виде $(n \times \infty)$-мерных матриц справедлива лемма.

Лемма 2. *Пусть $Q : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ — линейный ограниченный $n-$ нормальный матричный оператор. Тогда на подпространстве $R(\overline{Q})$ матричный оператор $\overline{Q} = Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}}$ имеет ограниченный левый обратный*

$$\overline{Q}_l^{-1} = (Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}})_l^{-1}.$$

Общий вид левых обратных операторов $\overline{Q}_{l_0}^{-1}$ задается формулой

$$\overline{Q}_{l_0}^{-1} = \overline{Q}_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(2)}}),$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q)} : \mathbf{B}_1 \to N^{(2)}(Q)$ и $\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(2)}} : \mathbf{B}_2^s \to Y_Q^{(2)}$ — произвольный бесконечномерный ограниченный проектор.

Для d-нормальных матричных операторов Q, которые представляются в виде $(\infty \times d)$-мерных матриц справедлива лемма.

Лемма 3. *Пусть $Q : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ — линейный ограниченный d-нормальный оператор. Тогда на подпространстве $R(\overline{Q})$ оператор $\overline{Q} = Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q}$ имеет ограниченный правый обратный*

$$\overline{Q}_r^{-1} = (Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q})_r^{-1}.$$

Общий вид правых обратных операторов $\overline{Q}_{r_0}^{-1}$ задается формулой

$$\overline{Q}_{r_0}^{-1} = (I_{\mathbf{B}_1^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q)})\overline{Q}_r^{-1},$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q)} : \mathbf{B}_1 \to N^{(2)}(Q)$ и $\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(2)}} : \mathbf{B}_2^s \to Y_Q^{(2)}$ — произвольный бесконечномерный ограниченный проектор.

Тогда для n- и d-нормальных операторов справедливы теоремы:

Теорема 3. *Пусть $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1^s, \mathbf{B}_2^s)$ — n-нормальный матричный оператор. Тогда на подпространстве $R(\overline{Q})$ матричный оператор*

$$Q^- = \overline{Q}_l^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} = (Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q^{(1)}})_l^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} \tag{14}$$

является ограниченным обобщенно обратным к матричному оператору Q.

Общий вид ограниченных обобщенно обратных операторов Q_0^- к n-нормальному матричному оператору Q дается формулой

$$L_0^- = (I_{\mathbf{B}_1^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N(Q)})Q^-(I_{\mathbf{B}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q}), \tag{15}$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N(Q)} : \mathbf{B}_1^s \to N(Q)$ — произвольный конечномерный проектор, $\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q} : \mathbf{B}_2^s \to$ $\to Y_Q$ — произвольный бесконечномерный ограниченный проектор.

Теорема 4. *Пусть $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1^s, \mathbf{B}_2^s)$ — d-нормальный матричный оператор. Тогда на подпространстве $R(Q)$ матричный оператор*

$$Q^- = \overline{Q}_r^{\,-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N^{(1)}(Q)} = (Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q})_r^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N^{(1)}(Q)} \tag{16}$$

является ограниченным обобщенно обратным к матричному оператору Q.

Общий вид ограниченных обобщенно обратных операторов Q_0^- к d-нормальному матричному оператору Q дается формулой

$$L_0^- = (I_{\mathbf{B}_1^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N(Q)})Q^-(I_{\mathbf{B}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q}), \tag{17}$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N(Q)} : \mathbf{B}_1^s \to N(Q)$ — произвольный бесконечномерный ограниченный проектор, $\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_Q} : \mathbf{B}_2^s \to Y_Q$ — произвольный конечномерный проектор.

4. Пример. Построим обобщенно обратный оператор Q^- к матричному оператору Q, где

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

действует из банахова пространства $\mathbf{c}$ — ограниченных сходящихся к конечному пределу последовательностей $x = \{\xi^{(i)}\}$ в пространство $\mathbf{c}$ таких же последовательностей $y = \{\eta^{(i)}\}$, $Q : \mathbf{c} \to \mathbf{c}$.

Проверим, является ли оператор Q ограниченным в этом пространстве?

$$\|Q\|_{\mathbf{c}} = \sup_{x \in \mathbf{c}, x \neq 0} \frac{\|Qx\|_{\mathbf{c}}}{\|x\|_{\mathbf{c}}} = \sup_{x \in \mathbf{c}, x \neq 0} \frac{\sup\limits_{j \in N} |\eta^{(j)}|}{\sup\limits_{i \in N} |\xi^{(i)}|} =$$

$$= \sup_{x \in \mathbf{c}, x \neq 0} \frac{\sup\limits_{j \in N}(|\xi^{(1)} + \xi^{(2)}|, 0, |\xi^{(3)} + \xi^{(4)}|, 0, \dots)}{\sup\limits_{i \in N} |\xi^{(i)}|} \leq$$

$$\sup_{x \in \mathbf{c}, x \neq 0} \frac{\sup\limits_{j \in N}(|\xi^{(1)}| + |\xi^{(2)}|, 0, |\xi^{(3)}| + |\xi^{(4)}|, 0, \dots)}{\sup\limits_{i \in N} |\xi^{(i)}|} \leq 2 \frac{\sup\limits_{j \in N} |\xi^{(j)}|}{\sup\limits_{i \in N} |\xi^{(i)}|} = 2,$$

так как $\sup\limits_{i \in N}(|\xi^{(i)}| + |\xi^{(i+1)}|) \leq 2 \sup\limits_{i \in N}(|\xi^{(i)}|, |\xi^{(i+1)}|)$. Оператор $Q : \mathbf{c} \to \mathbf{c}$ — ограничен.

Найдем матричный оператор Q^*, который будет сопряженным к оператору Q. Известно [10, с. 165], что пространство сопряженное к банаховому пространству $\mathbf{c}$ — это пространство $\mathbf{l}_1$ бесконечных числовых последовательностей $\varphi = \{\varphi^{(i)}\}$, удовлетворяющих условию $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\varphi^{(i)}| < \infty$. Поэтому сопряженный оператор Q^* будет действовать из пространства $\mathbf{l}_1$ в пространство $\mathbf{l}_1$. Используя тот факт, что общий вид функционала $\varphi = \{\varphi^{(i)}\} \in \mathbf{l}_1$ на элементе $y = \{y^{(i)}\} \in \mathbf{c}$

имеет вид $\varphi(y) = \Sigma_{i=1}^{\infty}\varphi^{(i)}y^{(i)}$ [11, с. 237] при условии, что последовательность $\{\varphi^{(i)}\}$ — ограничена в $\mathbf{l}_1$, найдем сопряженный матричный оператор Q^* к матричному оператору Q.

По определению сопряженного оператора имеем:

$$\varphi(Qx) = \varphi(\xi^{(1)} + \xi^{(2)}, 0, \xi^{(2)} + \xi^{(3)}, 0, \xi^{(3)} + \xi^{(4)}, 0, \ldots) =$$
$$= \varphi^{(1)}\xi^{(1)} + \varphi^{(1)}\xi^{(2)} + \varphi^{(3)}\xi^{(2)} + \varphi^{(3)}\xi^{(3)} + \varphi^{(5)}\xi^{(3)} + \varphi^{(5)}\xi^{(4)} + \ldots) =$$
$$= (Q^*\varphi)(x).$$

Таким образом сопряженный матричный оператор $Q^* : \mathbf{l}_1 \to \mathbf{l}_1$ будет иметь вид:

$$Q^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Для операторов Q и Q^* матрицы базисных элементов X и Φ (2) будут иметь вид:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}; \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Далее построим биортогональную к матрице X матрицу Γ, которая состоит из системы тотальных функционалов и биортогональную к матрице Φ матрицу Ψ, которая состоит из полной системы элементов, соответственно, $\Gamma(X) = E_\infty$, $\Phi(\Psi) = E_\infty$.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}; \quad \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Построим проекторы $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{c} \to N(Q)$ и $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{c} \to Y_Q$:

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = X\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \Psi\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Проверим ограниченность проекторов $\mathcal{P}_{N(Q)}$ и $\mathcal{P}_{Y_Q}$ в пространстве $\mathbf{c}$.

$$\|\mathcal{P}_{N(Q)}\|_{\mathbf{c}} = \sup_{x\in\mathbf{c}, x\neq 0} \frac{\|\mathcal{P}_{N(Q)}x\|_{\mathbf{c}}}{\|x\|_{\mathbf{c}}} =$$

$$= \sup_{x\in\mathbf{c}, x\neq 0} \frac{\sup\limits_{j\in N}(|\xi^{(1)}|, |-\xi^{(1)}|, 0, 0, |\xi^{(3)}|, |-\xi^{(3)}|, 0, 0, \dots)}{\sup\limits_{i\in N}|x_i|} \leq 1\frac{\sup\limits_{j\in N}|\xi^{(j)}|}{\sup\limits_{i\in N}|\xi^{(i)}|} = 1,$$

$$\|\mathcal{P}_{Y_Q}\|_{\mathbf{c}} = \sup_{y\in\mathbf{c}, y\neq 0} \frac{\|\mathcal{P}_{Y_Q}y\|_{\mathbf{c}}}{\|y\|_{\mathbf{c}}} =$$

$$= \sup_{y\in\mathbf{c}, y\neq 0} \frac{\sup\limits_{j\in N}(0, |\eta^{(2)}|, 0, |\eta^{(4)}|, 0, |\eta^{(6)}|, 0, \dots)}{\sup\limits_{i\in N}|\eta^{(i)}|} \leq 1\frac{\sup\limits_{j\in N}|\eta^{(j)}|}{\sup\limits_{i\in N}|\eta^{(i)}|} = 1,$$

Проекторы $\mathcal{P}_{N(Q)}$ и $\mathcal{P}_{Y_Q}$ ограничены, следовательно подпространства $N(Q)$ и $R(Q)$ дополняемы в банаховом пространстве $\mathbf{c}$ и имеют место формулы (1).

Далее построим операторы (3) $\overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} : \mathbf{c} \to N(Q)$ и $\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q} : \mathbf{c} \to Y_Q$:

$$\overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} = X\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q} = \Psi\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что операторы $\overline{\mathcal{P}}_{N(Q)}$ и $\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q}$ также ограничены в пространстве $\mathbf{c}$.

Тогда матричный оператор $\overline{Q}$ будет иметь вид

$$\overline{Q} = Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\overline{\mathcal{P}}_{N(Q)}\Psi = X$, а $\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q}X = \Psi$. Это означает, что нуль-пространство $N(Q)$ линейно изоморфно подпространству Y_Q и, значит оператор $\overline{Q}$ имеет ограниченный обратный

$$\overline{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Следовательно ограниченный матричный обобщенный обратный оператор Q^- запишется в виде:

$$Q^- = \overline{Q}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

1. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 353 с.
2. *Попов М.М.* Доповнювальнi простори i деякi задачi сучасної геометрiї просторiв Банаха // Математика сьогоднi '07: Зб. наук. праць. – Київ, 1973. – С. 78–116.
3. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
4. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. – 320 с.
5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
6. *Гринблюм М.М.* К теории биортогональных систем //Докл. АН СССР. – 1947. – **55**, N4. – С. 291–295.
7. *Журавлев В.Ф.* Критерий разрешимости и представление решений линейных $n-$ $(d-)$ нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве //Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, №2. – С. 167–182.
8. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
9. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
10. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
11. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. – М.: Наука,1967. – 415 с.

Получено 21.10.2010