

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

На правах рукопису

ЖУРАВЛЬОВ ВАЛЕРІЙ ПИЛИПОВИЧ

УДК 517.9

**УЗАГАЛЬНЕНО ОБОРІТНІ ОПЕРАТОРИ
ТА НОРМАЛЬНО РОЗВ'ЯЗНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ
У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ**

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант:
Бойчук Олександр Андрійович
доктор фізико-математичних наук,
професор, член-кореспондент
НАН України

Київ — 2013

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	6
ВСТУП	10
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	24
1.1. Огляд та аналіз основних етапів дослідження крайових задач .	24
1.2. Гільбертові та банахові простори	34
1.3. Лінійні та проектуючі оператори	43
1.4. Узагальнено оборотні та псевдооборотні оператори	49
РОЗДІЛ 2. ЗАГАЛЬНИЙ ВИГЛЯД УЗАГАЛЬНЕНО ОБОРОТНИХ ОПЕРАТОРІВ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ	54
2.1. Допоміжні твердження	54
2.2. Аналог леми Е. Шмідта для топологічно нетерових операторів	65
2.3. Узагальнення теорем С. М. Нікольського та Ф. В. Аتكінсона на випадок узагальнено оборотних операторів	71
Висновки до другого розділу	80
РОЗДІЛ 3. УЗАГАЛЬНЕНЕ ОБЕРНЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ	81
3.1. Узагальнене обернення операторів у банахових просторах . . .	82
3.1.1. Узагальнено-обернені оператори до нормально розв'язних. . .	82
3.1.2. Побудова проекторів у загальному вигляді.	96
3.2. Псевдообернені оператори до нормально розв'язних у гільбертовому просторі	103
3.2.1. Лівий (правий) псевдообернені оператори.	103

3.2.2. Псевдообернений оператор.	106
3.3. Узагальнено-обернені та псевдооберні оператори до інтегральних операторів Фредгольма	121
3.3.1. Узагальнено-обернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у банаховому просторі.	121
3.3.2. Псевдообернений оператор до інтегрального оператора Фред- гольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі.	136
3.3.3. Аналог конструкції Шмідта для побудови псевдооберненого оператора до інтегрального оператора Фредгольма з вирод- женим ядром.	144
Висновки до третього розділу	150
РОЗДІЛ 4. ЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ	152
4.1. Умови існування та загальний вигляд розв'язків нормально розв'язних операторних рівнянь	152
4.2. Розв'язок інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром	166
4.2.1. Розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром у банаховому просторі.	166
4.2.2. Розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі.	172
4.3. Лінійні крайові задачі для нормально розв'язних операторних рівнянь	176
4.3.1. Лінійні крайові задачі для операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами у банахових просторах.	176
4.3.2. Лінійні крайові задачі для нетерових операторних рівнянь у банахових просторах.	182
4.4. Крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма	186

4.4.1. Крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах.	187
4.4.2. Крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у гільбертових просторах.	195
4.5. Узагальнений оператор Гріна та його властивості	210

Висновки до четвертого розділу	215
--------------------------------	-----

РОЗДІЛ 5. СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГ- РАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА У БАНАХОВИХ ПРОС- ТОРАХ 217

5.1. Слабконелінійні операторні рівняння з узагальненою оборотною лінійною частиною	218
5.1.1. Необхідна умова існування розв'язків.	219
5.1.2. Достатні умови існування розв'язків.	221
5.2. Слабконелінійні рівняння Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах	233
5.3. Слабконелінійні крайові задачі для операторних рівнянь з нетеровою лінійною частиною у банахових просторах	242
5.3.1. Необхідна умова існування розв'язків.	244
5.3.2. Достатні умови існування розв'язків.	247
5.4. Слабконелінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у гільбертових просторах	256

Висновки до п'ятого розділу	265
-----------------------------	-----

РОЗДІЛ 6. КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ 267

6.1. Лінійні крайові задачі для нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією	267
---	-----

6.1.1. Умови існування та загальний розв'язок лінійного імпульсного нетерового операторного рівняння.	269
6.1.2. Умови існування та загальний розв'язок лінійної крайової задачі для нетерового операторного рівняння з імпульсною дією.	274
6.2. Крайові задачі для диференціальних систем із запізненням аргументу та імпульсною дією	281
6.2.1. Відомості з теорії функціонально-диференціальних рівнянь. .	281
6.2.2. Розв'язок диференціальної системи з відхиленням аргументу та імпульсною дією.	283
6.2.3. Критерій існування та структура загального розв'язку лінійної крайової задачі.	286
6.3. Слабконелінійні крайові задачі для диференціальних систем із запізненням та імпульсною дією	292
Висновки до шостого розділу	300
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ	301
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	305

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\mathbf{R}^n$ – n -вимірний евклідів простір;
- $\mathcal{I}$ – скінченний проміжок $[a, b]$;
- $\mathbf{H}(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ – гільбертовий простір вектор-функцій $z : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^n$;
- $\mathbf{B}(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ – банаховий простір вектор-функцій $z : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^n$;
- $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ – простір неперервних на проміжку $\mathcal{I}$ вектор-функцій $z : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^n$;
- $\mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ – простір неперервно-диференційовних на проміжку $\mathcal{I}$ вектор-функцій $z : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^n$;
- $\mathbf{L}_p^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ – банаховий простір сумовних зі степенем p ($1 < p < \infty$) вектор-функцій $z : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^n$ з нормою
- $$\|z\|_{\mathbf{L}_p^n} = \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n |z_i(t)|^p dt \right)^{1/p};$$
- $\mathbf{D}_p^n(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ – банаховий простір абсолютно неперервних на проміжку $\mathcal{I}$ вектор-функцій $z : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^n$ з нормою $\|z\|_{\mathbf{D}_p^n} = \|\dot{z}\|_{\mathbf{L}_p^n} + \|z(a)\|_{\mathbf{R}^n}$;
- $\mathbf{D}(\mathcal{I} \setminus \{\tau_i\}_I, \mathbf{R}^n)$ – простір абсолютно неперервних на кожному з проміжків $[a, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), \dots, [\tau_\eta, b]$ вектор-функцій $z(t)$, неперервних справа в точках $\tau_i, i = \overline{1, \eta}$, які мають у цих точках розриви першого роду, таких, що $\dot{z}(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$;
- $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B})$ – банахів простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій $z(t)$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}$;
- $\mathbf{H}(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ – гільбертів простір вектор-функцій $z(t)$

	зі значеннями в гільбертовому просторі $\mathbf{H}_1$;
$\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B})$	– банаховий простір обмежених вектор-функцій $z(t)$, які визначені на скінченному проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}$ з рівномірною нормою $\ z(t)\ = \sup_{t \in \mathcal{I}} \ z(t)\ _{\mathbf{B}}$;
$\mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$	– простір лінійних обмежених операторів L ;
$\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$	– клас лінійних обмежених нормально розв'язних узагальнено-оборотних операторів L ;
$\mathbf{l}_2$	– гільбертовий простір числових послідовностей з нормою $\ x\ = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$;
$\mathbf{l}_p$	– банаховий простір числових послідовностей з нормою $\ x\ = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} x_i ^p}$;
$\mathbf{c}$	– банаховий простір обмежених збіжних до скінченної границі числових послідовностей з нормою $\ x\ = \sup_j \eta_j $,
$\mathbf{c}_0$	– банаховий простір збіжних до нуля числових послідовностей з нормою $\ x\ = \sup_j \eta_j $;
$\mathbf{m}$	– банаховий простір обмежених числових послідовностей з нормою $\ x\ = \sup_j \eta_j $;
$\text{im } L \ (R(L))$	– образ лінійного оператора L ;
$\ker L \ (N(L))$	– ядро (нуль-простір) лінійного оператора L ;
$\dim \text{im } L$	– розмірність образу оператора L ;
$\dim \ker L$	– розмірність ядра оператора L ;
δ_{ij}	– символ Кронеккера;
$(G^*)(t)$	– узагальнений оператор Гріна напіводнорідної крайової задачі;

- $G(t, \tau)$ – узагальнена матриця Гріна;
- $\Gamma(X)$ – стала матриця $\{\gamma_j(x_i)\}$ значень вектор-функціоналів $\gamma_j(\cdot) = [\gamma_{j1}(\cdot) \cdots, \gamma_{jm}(\cdot)]$, які складають матрицю $\Gamma(\cdot) = \text{col} [\gamma_1(\cdot), \dots, \gamma_m(\cdot)]$, на вектор-стовпцях $x_i = \text{col} [x_{1i}, \dots, x_{mi}]$ матриці $X = [x_1, \dots, x_m]$;
- $\Gamma(x)$ – сталий вектор-стовпець $\{\gamma_j(x)\}$ значень вектор-функціоналів $\gamma_j(\cdot) = [\gamma_{j1}(\cdot) \cdots, \gamma_{jm}(\cdot)]$, які складають вектор-стовпець $\Gamma(\cdot) = \text{col} [\gamma_1(\cdot), \dots, \gamma_m(\cdot)]$ на елементі $x = \text{col} [x_1, \dots, x_m]$;
- $(x, y)_{\mathbf{H}}$ – скалярний добуток елементів $x \in \mathbf{H}$ та $y \in \mathbf{H}$;
- $(X^*, X)_{\mathbf{H}}$ – стала матриця, яка складена із скалярних добутків $\{(x_j, x_i)\}$;
- $(X^*, x)_{\mathbf{H}}$ – сталий вектор-стовпець, який складений із скалярних добутків $\{(x_j, x)\}$;
- $K(t, \tau)$ – матриця Коші;
- ℓ – лінійний векторний функціонал;
- S_h – оператор внутрішньої суперпозиції;
- L^{-1} – обернений оператор до оператора L ;
- L^{-} – узагальнено-обернений оператор до оператора L ;
- L^{+} – псевдообернений оператор до оператора L ;
- $L_{l(r)}^{+}$ – лівий (правий) псевдообернений оператор до оператора L ;

- $L_{l(r)}^{-1}$ – лівий (правий) оператор, обернений до оператора L ;
- $\mathcal{P}_{N(L)}$ – лінійний оператор (косий проектор), який проектує банаховий простір $\mathbf{B}$ на нуль-простір $N(L)$ оператора L ;
- $P_{N(L)}$ – лінійний оператор (ортопроектор), який проектує гільбертовий простір $\mathbf{H}$ на нуль-простір $N(L)$ оператора L ;
- $\oplus$ – знак прямої топологічної суми;
- $\ominus$ – знак прямої топологічної різниці.

ВСТУП

Багато задач математичного моделювання природних, фізичних технічних, економічних, соціальних та інших процесів зводяться до лінійних, нелінійних або слабконелінійних крайових задач для різноманітних класів операторних рівнянь. Розробка конструктивних методів аналізу лінійних та слабконелінійних крайових задач для широкого класу систем функціонально-дифференціальних рівнянь: систем звичайних дифференціальних рівнянь, систем дифференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, систем з імпульсним впливом, інтегральних, інтегро-дифференціальних систем та ін. займає одне з центральних і принципово важливих місць в якісній теорії дифференціальних та інтегральних рівнянь [9], [29], [53], [56], [75], [76], [126], [127], [138], [142], [217], [236], [280] та ін.

Періодичні крайові задачі для систем звичайних дифференціальних рівнянь вивчалися М. М. Боголюбовим, Ю. О. Митропольським, А. М. Самойленком [25] [26], І. Г. Малкіним [148], [149], Є. О. Гребеніковим, Ю. О. Рябовим, Д. К. Лікою [69] [141], А. А. Андроновим, А. А. Віттом, С. Е. Хайкіним [7], В. А. Якубовичем, В. М. Старжинським [217].

Періодичні крайові задачі для систем дифференціальних рівнянь із запізненням досліджувалися А. Д. Мишкісом [157], С. М. Шимановим [214], Ю. О. Митропольським, Д. І. Мартинюком [153], В. П. Рубаніком [180], Л. Е. Ельсгольцем, С. Б. Норкіним [216], Дж. К. Хейлом (J. K. Hale) [207], фредгольмові загальні крайові задачі — М. В. Азбелевим В. П. Максимовим, Л. Ф. Рахматулліною [4].

Системи звичайних дифференціальних рівнянь з імпульсним впливом і періодичні крайові задачі для них вивчалися А. Д. Мишкісом, А. М. Самойленком, М. О. Перестюком [158], [190], А. Халанаєм (А. На-

lanay), Д. Векслером (D. Wexler) [204], загальні нетерові крайові задачі А. М. Самойленком, М. О Перестюком, О. А. Бойчуком [36], [186].

Розв'язність інтегро-дифференціальних рівнянь вивчалась Ю. К. Ландо [139], [140], проекційно-ітеративні методи побудови розв'язків крайових задач для систем інтегро-дифференціальних рівнянь розроблені А. Ю. Лучкою [143] і його учнями, методи, які засновані на застосуванні функціонального аналізу — А. Б. Антоневицем, Я. В. Радино [8].

При дослідженні перелічених вище крайових задач використовувались класичні методи дослідження. Класична теорія крайових задач почала свій розвиток задовго до появи методів функціонального аналізу. Постановка крайових задач у загальному операторному вигляді стали можливими з використанням функціонального аналізу, який все частіше почав застосовуватися в якості апарату для дослідження загальних крайових задач для різних класів операторних рівнянь (Й. Мавін (J. Mawhin) [245], С. Швабик (Š. Schwabik), М. Тврди (M. Tvrdy), О. Вейвода (O. Veivoda) [274], [277], [280], Д. Векслер (D. Wexler)) [281].

Застосовуючи апарат узагальнено-обернених матриць, було доведено загальні теореми про розв'язність та представлення розв'язків критичних крайових задач для різних класів лінійних і нелінійних рівнянь та узагальнено простори, в яких розглядалися ці крайові задачі. О. А. Бойчуком та його учнями [27] [28], [29], [33], [41] розроблено конструктивні методи аналізу крайових задач для автономних та неавтономних систем звичайних дифференціальних рівнянь, дифференціальних рівнянь із зосередженим запізненням, дифференціальних рівнянь з імпульсною дією у загальному нетеровому випадку, коли кількість крайових умов m не співпадає з порядком n дифференціальної системи.

Подальшим узагальненням стала теорія крайових задач для звичайних дифференціальних рівнянь у банахових просторах, коли скінченновимірний

евклідовий простір значень шуканої функції замінювався на загальний банахів простір [73]. Так, К. Г. Валєєвим та О. А. Жаутиковим [54] вперше було доведено теореми існування та єдиності розв'язків для лінійних та нелінійних нескінченних систем диференціальних рівнянь. А. М. Самойленком, Ю. В. Теплінським [194] досліджено умови існування періодичних розв'язків диференціальних і різницевих рівнянь у банаховому просторі обмежених числових послідовностей $\mathbf{m}$. Щільність множини нерозв'язних задач Коші у множині усіх задач Коші у нескінченновимірних банахових просторах досліджено В. Ю. Слюсарчуком [198]. О. А. Бойчуком та О. О. Покутним отримані умови біфуркації множини обмежених на всій осі $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ розв'язків лінійних та слабкозбурених диференціальних рівнянь у банаховому просторі, О. М. Станжицьким досліджено експоненціальну дихотомію стохастичних систем Іто за допомогою квадратичних форм [199], а В. Ю. Слюсарчуком експоненціальну дихотомію розв'язків дискретних систем [195].

З точки зору теорії операторів у функціональних просторах вище зазначені крайові задачі мають наступну особливість — операторні рівняння $Lz = f$ цих крайових задач мають розв'язки при будь-якій правій частині. За термінологією С. Г. Крейна [132] такі рівняння називаються всюди розв'язними. Значна частина цих результатів фактично отримана при умові, що лінійний оператор L вихідного рівняння лінійної породжуючої крайової задачі має обернений L^{-1} . А інша частина цих задач досліджувалась у припущенні, що вони фредгольмові. До таких задач належать і задачі про умови існування та представлення розв'язків рівнянь у частинних похідних [15, 16, 17]. Як було підкреслено в монографії М. В. Азбєлева, В. П. Максимова, Л. Ф. Рахматулліної [4, с. 29] „Відмова від фредгольмовості головної частини оператора L робить клас рівнянь $Lz = f$ настільки широким, що для цього класу не вдається побудувати скільки-небудь змістовної теорії.“ Проте множина

фредгольмових операторів складає досить вузький клас у множині нормально розв'язних операторів з доповнювальним ядром та образом.

Таким чином, клас крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь значно ширший ніж той, що розглядався раніше. До таких задач належать, наприклад, крайові задачі для інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь [187], задачі для сингулярних диференціальних систем [51, 52, 213, 227, 267] та ін.

Актуальність теми. Актуальність вивчення крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь обумовлена, перш за все, важливістю їх практичного застосування у різних областях знань: теорії нелінійних коливань [7], [9], [25], [26], [28], [29], [69], [124], [134], [141], [146], [149], [190], [203], [206], [207], теорії стійкості руху [73], [76], [146], [154], теорії керування [211], [259], задачах економіки, радіотехніки, механіки, біології, імунології, медицини [55] [60], [124], [134], [150], [151], [20] та ін.

Крайові задачі, в яких вихідне операторне рівняння не є всюди розв'язним, а оператор діє у нескінченновимірних банахових або гільбертових просторах, вивчались дуже мало. Тому актуальною є потреба побудови загальної концепції дослідження крайових задач для операторних рівнянь, лінійні частини яких не мають обернених операторів у банахових та гільбертових просторах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась згідно загального плану досліджень відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України в рамках держбюджетної теми „Аналітичні та якісні методи теорії нелінійних диференціальних рівнянь“ (номер державної реєстрації №0105U007978).

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова загальної концепції дослідження лінійних та слабконелінійних крайових задач для операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах.

торах з нормально розв'язними операторами, які мають доповнювальні ядра та образи.

Обрана мета зумовила наступні завдання дослідження:

1. Довести леми, які узагальнюють лему Е. Шмідта (E. Schmidt) на випадок нормально розв'язних операторів з доповнювальними образами та ядрами і, використовуючи ці твердження, довести теореми про загальний вигляд нормально розв'язних операторів з доповнювальним ядром та образом у функціональних просторах, які узагальнюють теореми С. М. Нікольського про загальний вигляд фредгольмових та Ф. В. Аткинсона про загальний вигляд нетерових операторів.
2. Використовуючи теореми про загальний вигляд нормально розв'язних операторів з доповнювальними образами та ядрами, отримати формули для побудови узагальнено-обернених операторів у банахових, псевдообернених та односторонньо псевдообернених операторів у гільбертових просторах до узагальнено оборотних операторів.
3. Використовуючи загальні підходи до побудови узагальнено-обернених операторів у банахових, псевдообернених операторів у гільбертових просторах знайти умови узагальненої оборотності та побудувати узагальнено-обернений та псевдообернений оператори до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах.
4. Дослідити умови розв'язності та отримати формули для представлення загальних розв'язків лінійних операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами у банахових та гільбертових просторах з використанням проекторів, узагальнено-обернених та псевдообернених операторів. Отримати умови розв'язності та формули для представлення загальних розв'язків інтегральних

- рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах.
5. Отримати умови існування та вигляд загальних розв'язків лінійних крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами. Дослідити умови існування та побудувати загальні розв'язки лінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах із застосуванням узагальненого оператора Гріна.
 6. Дослідити властивості узагальненого оператора Гріна лінійних крайових задач для операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами та його зв'язок з узагальнено-оберненим оператором до оператора лінійної крайової задачі.
 7. З використанням умов існування та загальних формул побудови розв'язків лінійних крайових задач отримати необхідні та достатні умови існування, запропонувати ітераційні процедури побудови єдиного та принаймні одного розв'язку слабконелінійних операторних рівнянь та слабконелінійних крайових задач з нормально розв'язною лінійною частиною та довести їх збіжність. Дослідити умови існування та розробити збіжні ітераційні процедури побудови розв'язків слабконелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром та крайових задач для них у банахових та гільбертових просторах.
 8. Побудувати узагальнено-обернений оператор до лінійного нетерового оператора з імпульсною дією та узагальнений оператор Гріна лінійної крайової задачі для нетерового операторного рівняння з імпульсною дією.
 9. Отримати умови існування та загальний вигляд розв'язків лінійних крайових задач для диференціальних систем із запізненням та

імпульсною дією, дослідити необхідні та достатні умови існування розв'язків та запропонувати збіжні ітераційні процедури побудови розв'язків слабконелінійних крайових задач для диференціальних систем із запізненням та імпульсною дією.

Об'єктом дослідження є операторні рівняння з узагальнено оборотними операторами, лінійні крайові задачі для них та слабконелінійні (з узагальнено оборотною лінійною частиною) крайові задачі у банахових та гільбертових просторах. У роботі досліджуються інтегральні рівняння Фредгольма з виродженими ядрами та лінійні і слабконелінійні крайові задачі для них у банахових та гільбертових просторах, а також крайові задачі для нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією та диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсною дією.

Предмет дослідження: умови існування та формули для представлення загальних розв'язків лінійних крайових задач для операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами, необхідні та достатні умови існування, а також збіжні ітераційні процедури для побудови розв'язків слабконелінійних крайових задач з узагальнено оборотною лінійною частиною у банахових та гільбертових просторах.

Методи дослідження: методи теорії операторів та функціонального аналізу, апарат узагальнено-обернених та псевдообернених матриць та операторів, методи теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією. При аналізі слабконелінійних крайових задач використовуються методи теорії збурень: малого параметра Ляпунова–Пуанкаре, асимптотичних методів нелінійної механіки, методів розв'язку некоректних задач.

Наукова новизна дослідження: На захист виносяться наступні основні результати, що визначають наукову новизну:

1. Вперше доведено аналог леми Е. Шмідта (E. Schmidt) для топологічно нетерових, топологічно фредгольмових, n -нормальних та d -нормальних операторів та теореми про загальний вигляд

- операторів кожного з цих класів у банахових просторах, які узагальнюють теореми С. М. Нікольського для фредгольмових та Ф. В. Аткинсона для нетерових операторів, відповідно. Отримано нові конструкції узагальнено-обернених, лівих, правих псевдообернених та псевдообернених операторів до топологічно нетерових, топологічно фредгольмових, n -нормальних та d -нормальних операторів у банахових та гільбертових просторах, відповідно. Вперше побудовано узагальнено-обернені та псевдообернені оператори до інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром.
2. Вперше визначено критерії розв'язності та запропоновано формули для представлення загальних розв'язків операторних рівнянь з нормально розв'язними операторами з доповнюваними ядром та образом, на основі яких доведено теореми про необхідні і достатні умови існування та загальний вигляд розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах.
 3. Вперше знайдено необхідні та достатні умови існування та загальний вигляд розв'язків лінійних крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь з нормально розв'язними операторами з доповнювальними ядрами та образами у банахових та гільбертових просторах, побудовано узагальнені оператори Гріна для цих задач. Отримано умови існування та представлення розв'язків лінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах. Досліджено властивості узагальненого оператора Гріна та його зв'язок з узагальнено-оберненим оператором лінійної крайової задачі.
 4. Для слабконелінійних операторних рівнянь (лінійна частина яких — нормально розв'язний оператор з доповнювальними ядром та образом) вперше досліджено необхідні умови існування розв'язків,

- побудовано операторне рівняння для породжуючих елементів, визначено достатні умови існування єдиного та принаймні одного розв'язків, запропоновано ітераційні алгоритми для їх побудови та доведено їх збіжність. Встановлено необхідні умови існування розв'язків слабконелінійних операторних рівнянь, лінійна частина яких — не всюди розв'язне операторне рівняння Фредгольма з виродженим ядром, отримано достатні умови існування розв'язків, запропоновано збіжні ітераційні процедури для їх побудови у банахових просторах.
5. Встановлено необхідні та достатні умови існування єдиного та принаймні одного розв'язків слабконелінійних крайових задач, лінійні частини вихідних рівнянь яких — нетерові оператори. Запропоновано збіжні ітераційні процедури для побудови цих розв'язків. Побудовано систему операторних рівнянь для породжуючих констант та визначено необхідні умови існування розв'язків. Встановлено достатні умови існування принаймні одного розв'язку слабконелінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у скінченновимірних гільбертових просторах. Запропоновано збіжні ітераційні процедури для побудови цих розв'язків.
 6. Вперше побудовано узагальнено-обернений оператор до лінійного нетерового операторного рівняння з імпульсною дією, знайдено необхідні та достатні умови розв'язності та формулу для представлення загального розв'язку (за допомогою побудованого узагальненого оператора Гріна) лінійної крайової задачі для нетерового операторного рівняння з імпульсною дією.
 7. Вперше побудовано оператор Гріна задачі Коші лінійної диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією. Визначено необхідні та достатні умови існування та представлення

загальних розв'язків лінійної нетерової крайової задачі для диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією.

8. Для слабконелінійних крайових задач для диференціальних систем з запізненням та імпульсною дією у скінченновимірних банахових просторах знайдено необхідні умови існування розв'язків, побудовано операторне рівняння для породжуючих констант, із застосуванням проекторів встановлено достатні умови існування принаймні одного розв'язку та запропоновано збіжні ітераційні процедури для знаходження розв'язків таких задач.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати, які отримані в роботі, можуть бути використані в якісній теорії крайових задач для різноманітних класів операторних рівнянь з урахуванням їх специфіки, теорії керування та теорії стійкості у випадках, коли вихідне операторне рівняння не є всюди розв'язним, дослідженні умов існування обмежених на всій числовій осі розв'язків крайових задач у банахових просторах, при моделюванні та дослідженні різноманітних фізичних, економічних, біологічних та інших процесів.

Особистий внесок здобувача. Загальний план дослідження та його основний напрямок визначено спільно з науковим консультантом — членом-кореспондентом НАН України О. А. Бойчуком. У спільних роботах співавторам належить постановка задач та обговорення можливих шляхів їх розв'язання. В цих роботах особистий внесок автора полягає у доведенні теорем про існування та загальний вигляд розв'язків лінійних та слабконелінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь та теорем про умови (достатні та необхідні) існування розв'язків слабконелінійних крайових задач з нетеровою лінійною частиною [41], у встановленні умов розв'язності та побудові загальних розв'язків нетерових рівнянь у банахових просторах [35], у доведенні теореми про

конструкцію псевдооберненого оператора у гільбертових просторах [39], у доведенні теорем про розв'язок задачі Коші та лінійної крайової задачі для диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією та побудова узагальненого оператора Гріна відповідної напіводнорідної лінійної крайової задачі [40], у доведенні теорем про існування та загальний вигляд розв'язків лінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією та теорем про умови (достатні та необхідні) існування розв'язків слабконелінійних крайових задач з нетеровою лінійною частиною та імпульсною дією [189], у доведенні аналога леми Е. Шмідта на випадок топологічно нетерових операторів, теорему про конструкцію узагальнено-оберненого оператора до топологічно нетерового у банаховому просторі [43].

Апробація результатів дисертації. Результати, викладені у дисертації доповідались та обговорювались на:

- науково-технічному семінарі "Моделювання і дослідження стійкості фізичних процесів"(м. Київ, 1991 р.);
- конференції "Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь і математичної фізики — другі Боголюбовські читання"(м. Київ, 1992 р.);
- Міжнародній науковій конференції: International Conference Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation (м. Київ, 1993 р.);
- Міжнародній науковій конференції: International Conference "Nonlinear Differential Equations"(Kiev, 1995);
- Міжнародній науковій конференції: International Conference Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation (м. Київ, 1995 р.);
- Міжнародній науковій конференції: International Conference Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation (м. Київ, 1996 р.);
- Всеукраїнській конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування"(Чернівці, 1996 р.);

- П'ятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 1996);
- Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 70-ти річчя академіка А. М. Самойленка (м. Мелітополь, 2008 р.);
- Міжнародній науковій конференції: International Conference "Dynamical system modeling and stability investigation" (м. Київ, 2009 р.);
- Міжнародній науковій конференції до 100-річчя М. М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди (м. Чернівці, 2009 р.);
- Українському математичному конгресі – 2009 (до 100-річчя М. М. Боголюбова) (м. Київ, 2009 р.);
- XIII Міжнародній конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, 2010 р.);
- десятій Кримській міжнародній математичній школі "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Крим, Алушта, 2010 р.);
- міжнародній науково-технічній конференції SAIT 2011 "Системный анализ и информационные технологии" (Київ, 2011 г.);
- міжнародній конференції "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", присвячену видатному математику І. Г. Петровському (Москва, 2011 г.);
- міжнародній конференції "Моделирование и исследование устойчивости динамических систем" (Київ, 2011 г.);
- міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвячена 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (Київ, 2011 р.);
- конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача КМУ СПММ-2011 (Львів, 2011 р.);

- Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2012 р.);
- Міжнародній конференції до 50-річчя кафедри прикладної математики (Чернівці, 2012 р.);
- Conference on Differential and Difference Equations and Applications (Terechova, Slovakia, 2012);
- Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications"(Mersin, Turkey, 2012);
- XVI International Conference "Dynamical system modelling and stability investigation"(Kiev, 2013);
- міжнародній науковій конференції "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Севастополь, 2013 р.);
- міжнародній математичній конференції "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка" (Слов'янськ, 2013 р.),

наукових семінарах:

- спільному науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань (Інститут математики НАН України) та кафедри диференціальних та інтегральних рівнянь (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), керівники — академік НАН України А. М. Самойленко та академік НАН України М. О. Перестюк, жовтень 2012 р., березень 2013 р.;
- науковому семінарі кафедри загальної математики (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), керівник — доктор фізико-математичних наук, професор О. М. Станжицький, квітень 2013 р.;

- Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь, керівники: доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України Б. Й. Пташник, доктори фізико-математичних наук, професори М. І. Іванчов, П. І. Каленюк, листопад 2013 р.
- науковому семінарі кафедри математичної фізики (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), керівники — доктори фізико-математичних наук, професори Т. А. Мельник та В. Г. Самойленко, грудень 2013 р.

Публікації. За темою дисертаційного дослідження опубліковані: монографія у співавторстві [41], 19 статей в періодичних іноземних та фахових вітчизняних періодичних наукових журналах та збірниках праць [35], [40], [43], [84], [87], [88], [89], [91], [95], [96], [97], [98], [101], [102], [103], [104], [110], [111], [189] та 2 статті у збірниках наукових праць [39], [81]. З них 15 самостійних робіт автора [84], [87], [88], [89], [91], [95], [96], [97], [98], [101], [102], [103], [104], [110], [111]. 13 статей опубліковано у виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази: [35], [40], [43], [84], [87] — [89], [91], [95], [96], [110], [111], [189].

Результати дисертації також опубліковані у збірниках матеріалів і тез міжнародних та всеукраїнських конференцій [78] — [80], [82], [83], [85], [86], [90], [92] — [94], [99], [100], [105] — [109], [112] — [116], [228], [282], [283].

Всі результати, які включено до дисертаційного дослідження отримані автором самостійно.

Автор висловлює щирі подяку науковому консультанту члену-кореспонденту НАН України О. А. Бойчуку за підтримку, цінні зауваження та поради, постійну увагу до роботи, плідне співробітництво та обговорення одержаних результатів.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У цьому розділі розглянуто основні етапи дослідження крайових задач, зроблено їх аналіз з точки зору теорії операторів та функціонального аналізу. Також розглянуто деякі питання теорії лінійних операторів, пов'язані з узагальненим оберненням та псевдооберненням нормально розв'язних операторів у банахових та гільбертових просторах, які суттєво використовуються в роботі.

1.1. Огляд та аналіз основних етапів дослідження крайових задач

Побудова розв'язків слабконелінійних крайових задач

$$Lz(t) = f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad (1.1)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot), \cdot, \varepsilon), \quad (1.2)$$

де відповідно L, ℓ – лінійні, а Z, J – нелінійні обмежені оператори і функціонали, для різних класів функціонально-диференціальних рівнянь є задачею, розв'язок якої залежить від розв'язності відповідного (1.1) породжуючого ($\varepsilon = 0$) лінійного рівняння $Lz(t) = f(t)$ та відповідної (1.1), (1.2) породжуючої ($\varepsilon = 0$) лінійної крайової задачі

$$Az(t) = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} z(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Найбільш повно і глибоко такі крайові задачі вивчені у випадку, коли L звичайний диференціальний оператор

$$\begin{aligned} Lz(t) &\equiv \dot{z}(t) - A(t)z(t) = f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \\ \ell z(\cdot) &= \alpha + \varepsilon J(z(\cdot), \cdot, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.3)$$

де $L : C^1([a, b]; \mathbf{R}^n) \rightarrow C([a, b]; \mathbf{R}^n)$; $\ell : C([a, b]; \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^m$. Такі задачі у періодичному (фредгольмовому ($m = n$)) випадку вивчалися А. М. Ляпуновим [146], М. М. Боголюбовим, Ю. О. Митропольским, А. М. Самойленком [25], [26], І. Г. Малкіним [149], Е. О. Гребеніковим, Ю. О. Рябовим, Д. К. Лікою [69], [141], А. А. Андроновим, А. А. Віттом, С. Э. Хайкіним [7], В. А. Якубовичем, В. М. Старжинським [217] та ін. Переважна більшість досліджень періодичних крайових задач проводилася у, так званому, некритичному випадку. Для дослідження періодичних систем звичайних диференціальних рівнянь А. М. Самойленком було запропоновано чисельно-аналітичний метод [182, 183], який завдяки своїй простоті і ефективності був застосований А. М. Самойленком, М. О. Перестюком, М. Й. Ронто, С. І. Трофімчуком до дослідження широкого кола крайових задач з різного роду крайовими умовами [184, 185, 261, 262, 266]. В серії оглядових робіт М. Й. Ронто, А. М. Самойленка, С. І. Трофімчука [176] — [179] зроблено детальний аналіз розвитку чисельно-аналітичного методу та його застосування до розв'язання різних типів крайових задач.

У нетеровому випадку, коли кількість крайових умов не співпадає з порядком диференціальної системи ($m \neq n$), конструктивні методи аналізу слабконелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь розроблені О. А. Бойчуком [27], [28], [29] [41].

Крайові задачі для диференціальних рівнянь із запізненням

$$Lz(t) \equiv \dot{z}(t) - A(t) = f(t) + \varepsilon Z(S_h z, t, \varepsilon), \quad (1.4)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon J((S_h z)(\cdot), \cdot, \varepsilon)$$

де $L : \mathbf{D}_p^n \rightarrow \mathbf{L}_p^n$; $\ell : \mathbf{D}_p^n \rightarrow \mathbf{R}^m$; $S_h : \mathbf{L}_p^n \rightarrow \mathbf{L}_p^n$ — оператор внутрішньої суперпозиції [4], у періодичному випадку вивчалися О. Д. Мишкісом [157], С. М. Шимановим [214], Ю. О. Митропольским Д. І. Мартинюком [153], Л. Е. Ельсгольцем, С. Б. Норкіним [216], Дж. К. Хейлом [207] та

ін. У випадку всюди розв'язності крайової задачі — М. В. Азбелевим, В. П. Максимовим, Л. Ф. Рахматулліною та їх учнями [2, 3, 4, 147]. У нетеровому випадку О. А. Бойчуком та його учнями [41]. Цікаві результати для нетерових крайових задач з сталим запізненням отримані О. А. Бойчуком, Й. Дібліком, М. Ружечковою, Д. Я. Хусаїновим [226], з використанням роботи [209]. У нескінченновимірних банахових просторах експоненціал із запізненням побудований О. О. Покутним, В. В. Семеновим [165].

Системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і крайові задачі для них вигляду

$$\begin{aligned} Lz(t) &\equiv \dot{z}(t) - A(t)z(t) = f(t) + \varepsilon Z(z(t), t, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i, i = \overline{1, \eta}, \\ \Delta|_{t=\tau_i} - S_i z(\tau_i - 0) &= a_i + \varepsilon J_i(z(\tau_i - 0, \varepsilon), \tau_i - 0, \varepsilon), \\ \ell z(\cdot) &= \alpha + \varepsilon J(z(\cdot), \cdot, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.5)$$

де $L : \mathbf{C}^1([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I; \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{C}([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I; \mathbf{R}^n)$; $\ell : \mathbf{C}([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I; \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\det(E + S_i) \neq 0$, $i = \overline{1, \eta}$ у періодичному (фредгольмовому) некритичному випадку вивчалися О. Д. Мишкісом, А. М. Самойленком, М. А. Перестюком [158], [190], А. Халанаєм, Д. Векслером [204] та ін. У періодичному критичному і загальному нетеровому випадках — А. М. Самойленком, М. О. Перестюком, О. А. Бойчуком [36], [186]. А. М. Самойленком, М. О. Перестюком, С. І. Трофімчуком [266] для систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу введено поняття узагальненого розв'язку, запропоновано класифікацію імпульсних систем і вказано умови, достатні для належності імпульсної системи до того чи іншого класу. У випадку $\det(E + S_i) = 0$, $i = \overline{1, \eta}$ такі крайові задачі вивчалися О. А. Бойчуком, С. М. Чуйком [42], [212].

Умови існування та побудову розв'язків крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} Lz(t) &\equiv \dot{z}(t) - A(t)z(t) - \int_a^b B(s)\dot{z}(s)ds = f(t) + \varepsilon Z(\dot{z}, z, t, \varepsilon), \\ \ell z(\cdot) &= \alpha + \varepsilon J(\dot{z}(\cdot)z(\cdot), \cdot, \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.6)$$

у класі вектор-функцій: $z(\cdot, \varepsilon) \in D_2^n[a, b]$, $\dot{z}(\cdot, \varepsilon) \in L_2^n[a, b]$, $z(t, \cdot) \in C(0, \varepsilon_0]$ досліджували А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С.А. Кривошея [187] та їх учні, проєкційно-ітеративні методи розроблені Ю. Д. Соколовим, А. Ю. Лучкою [143]. Питання нормальної розв'язності та індексу інтегро-диференціальних рівнянь розглянуті Ю. К. Ландо [139], [140], методи, що засновані на застосуванні функціонального аналізу до дослідження цих задач А. Б. Антоневи́чем, Я. В. Радино [8].

Специфіка перелічених крайових задач вигляду (1.1), (1.2) у скінченновимірних банахових просторах полягає в тому, що в більшості випадків їх лінійна частина є оператором, який не має оберненого, що не дозволяє безпосередньо застосовувати традиційні методи дослідження крайових задач, засновані на використанні принципу нерухомої точки. Необоротність оператора A , що задає лінійну частину крайової задачі, вносить істотні труднощі в її дослідження і є наслідком того, що або кількість крайових умов не співпадає з порядком операторної системи, або оператор L лінійної частини вихідного операторного рівняння не має оберненого, або те і інше разом. Більшість такого типу задач для операторних рівнянь є задачами з нормально розв'язною лінійною частиною і включають як недовизначені, так і перевизначені, як некритичні, так і критичні крайові задачі [29], [69].

Із застосуванням теорії узагальнено-обернених та псевдообернених матриць і проєкторів методи дослідження періодичних крайових задач успішно були узагальнені на крайові задачі для різних класів функціонально-диференціальних рівнянь: звичайних автономних [37] та неавтономних

[27], [29] диференціальних систем у критичних випадках; диференціальних систем із зосередженим запізненням в [41]; звичайних диференціальних систем з імпульсною дією [36], [225]. Таким чином, з одного боку, були розроблені теорії різних узагальнень крайових задач для диференціальних систем, доведені загальні фундаментальні теореми про розв'язність і представлення загальних розв'язків не всюди розв'язних крайових задач для різних класів всюди розв'язних функціонально-диференціальних рівнянь. А з іншого — узагальнювались простори, в яких розглядалися ці крайові задачі.

Так розв'язки крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь розглядаються у просторі неперервно диференційовних функцій, розв'язки крайових задач для систем диференціальних рівнянь із запізненням — у просторі абсолютно неперервних функцій, похідні яких належать простору сумовних функцій. Розв'язки крайових задач з імпульсною дією розглядаються у просторі функцій, які можна представити у вигляді суми абсолютно неперервної функції та функції стрибків. Більш глобальним узагальненням стала теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь у банаховому просторі, коли скінченновимірний евклідів простір значень шуканої функції замінюється на загальний банахів простір.

Так, Ю. Л. Далецьким, М. Г. Крейном [73] отримано формулу загального розв'язку неоднорідної звичайної диференціальної системи у банаховому просторі, К. Г. Валєєвим та О. А. Жаутиковим [54] уперше доведено теореми існування та єдиності розв'язків для лінійних та нелінійних нескінченних систем звичайних диференціальних рівнянь та теореми про неперервну залежність розв'язків від параметра. У монографії А. М. Самойленка, Ю. В. Теплінського [194] досліджено умови існування періодичних розв'язків різницевих рівнянь і зліченновимірних крайових задач у некритичних випадках у банаховому просторі обмежених числових

послідовностей **m.** О. А. Бойчуком, Є. В. Панасенком [46], [47], [48] отримано критерій існування розв'язків лінійних та слабконелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь у банаховому просторі. Існування та неєдиність розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь досліджувались В. Ю. Слюсарчуком [197].

Якщо проаналізувати задачі (1.3 – 1.6) з точки зору теорії операторів у функціональних просторах, то з'ясуються їх наступні особливості:

- у задачах (1.3 – 1.5) вихідні рівняння є всюди розв'язними [132];
- у задачах (1.3 – 1.6) нуль-простори операторів, що задають лінійні частини вихідних рівнянь мають скінченну розмірність;
- образи операторів, що задають лінійні частини рівнянь (1.3 – 1.6) і крайових задач для них, у більшості випадків замкнуті, тобто оператори є нормально розв'язними.

Підхід до крайових задач, як до операторних рівнянь дозволяє застосувати методи функціонального аналізу до їх дослідження. Як підкреслено в [74, с. 93] "... до початку нашого (XX) століття в роботах Вольтерра і Фредгольма в області інтегральних рівнянь було виявлено усю перевагу цієї "операторної" техніки". Фундаментальна робота Ф. Рісса (F. Riesz) [171], яка присвячена оберненню лінійних операторів $L = I - A$, (I – тотожний, а A – цілком неперервний оператори, що діють у просторі $C([a, b], \mathbf{R}^n)$ – неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій зі значеннями в евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$, узагальнювалась у двох напрямках. З одного боку простір $C([a, b], \mathbf{R}^n)$ замінювався більш загальними функціональними просторами, а з іншого – на оператор $A(L)$ накладалися менш обмежувальні умови.

Ю. Шаудер (J. Schauder) [275] узагальнив теорію Ф. Рісса на банахові простори, ввівши до неї спряжений оператор. С. М. Нікольський [160] показав, що теорія Рісса-Шаудера залишається справедливою, якщо замість цілком неперервності оператора A припускати, що його деяка

n -а ітерація $A^n = AA^{n-1}$ цілком неперервна, а в [161] дав необхідні і достатні умови, яким повинен задовольняти оператор L щоб ця теорія була справедливою. Цей клас операторів, які називаються фредгольмовими, і описує теорема, відома як теорема С. М. Нікольського [201, с. 233]. Ф. С. Алієв [5], а пізніше А. Г. Рамм (A. G. Ramm) [256] узагальнили теорему С. М. Нікольського на випадок замкнених операторів.

Відомо (Ф. Р. Аткинсон [10], М. М. Вайнберг В. О. Треногін [53], Ю. П. Пит'єв [169], А. Ф. Турбін [202], М.З.Нашед (M. Z. Nashed), Г. Ф. Вотруба (G. F. Votruba) [237], [247], [248], Е. Шмідт (E. Schmidt) [273]), що при побудові узагальнено-обернених операторів до нормально розв'язних класична конструкція Е. Шмідта [53, с. 339] застосовна лише для фредгольмових операторів. Тому її застосування до дослідження крайових задач для функціонально-диференціальних рівнянь, як до операторних рівнянь з обмеженими нормально розв'язними операторами в лінійній частині, обмежувалося вимогою їх фредгольмовості.

Саме з цієї причини більшість робіт, присвячених вивченню таких задач, виконувались у припущенні їх всюди розв'язності [132] (Ю. А. Митропольський, Д. І. Мартинюк [153], А. М. Самойленко М. О. Перестюк, М. Й. Ронто [190], [184], І. Г. Малкін [149], Е. О. Гребенніков, Ю. О. Рябов, Д. К. Ліка [141], [69], М. В. Азбелєв, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматулліна [4], О. Вейвода [280], Д. Векслер [281] та ін.). Більше того, значна частина результатів фактично отримана у припущенні, що оператор L вихідного рівняння лінійної породжуючої крайової задачі має обернений.

Позначимо $\dim N(L) = \mu$, $\dim N(L^*) = \nu$, де μ та ν – додатні цілі числа або нескінченність. Залежно від значень μ та ν , розрізняють узагальнено оборотні оператори наступних класів:

- фредгольмові ($\mu = \nu < \infty$), (I. Fredholm, 1903);
- нетерові ($\mu \neq \nu, \mu < \infty, \nu < \infty$), (F. Noether, 1921);

- n -нормальні ($\mu < \infty, \nu = \infty$) з доповнювальним образом $R(L)$, (С. Г. Крейн, 1971);
- d -нормальні ($\mu = \infty, \nu < \infty$) з доповнювальним ядром $N(L)$, (С. Г. Крейн, 1971);
- топологічно фредгольмові ($\mu = \infty, \nu = \infty, N(L) \cong Y_L$), (А. Р. Абдуллаєв, А. Б. Бурмістрова, 1994);
- звідно оборотні ($\mu = \infty, \nu = \infty$), якщо оператор діє з банахового простору $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$, (Королук В. С., Турбін А. Ф., 1978);
- топологічно нетерові ($\mu = \infty, \nu = \infty$), (А. Р. Абдуллаєв, А. Б. Бурмістрова, 1994).

Лема Е. Шмідта [273] та її розвинення теорема С. М. Нікольського про представлення обмеженого фредгольмового оператора у лінійних нормованих просторах у вигляді суми неперервно оборотного та скінченновимірних операторів [160], [161] дають можливість будувати узагальнено-обернені оператори до фредгольмових у банахових просторах. Теорема, що узагальнює теорему С. М. Нікольського, про те, що будь-який нетеровий оператор представляється у вигляді суми односторонньо оберненого та скінченновимірних, доведена Ф. В. Аتكінсоном [10]. Але конструкції для побудови узагальнено-оберненого оператора до нетерогового, аналогічної конструкції Е. Шмідта [53] запропоновано не було. Для інших класів узагальнено оборотних операторів були отримані деякі результати у цьому напрямі В. С. Королуком, А. Ф. Турбіним [130], І. Я. Цуркісом [210], А. Р. Абдуллаєвим, А. Б. Бурмістровою [1].

Результати огляду з цього питання приведені в наступній таблиці.

Таблиця 1.

Питання по узагальненому оберненню нормально розв'язних операторів

Клас узагальнено оборотних операторів	Конструкція узагальнено оберненого оператора	Теорема про загальний вигляд операторів
Фредгольмові	Е. Шмідт	С. М. Нікольський
Нетерові	?	Ф. Р. Аتكінсон
$n - (d-)$ нормальні	?	?
Топологічно фредгольмові	?	А. Р. Абдуллаєв, А. Б. Бурмістрова
Звідно- оборотні	В. С. Королук А. Ф. Турбін, І. Я. Цуркіс	?
Топологічно нетерові	?	?

У дисертаційній роботі усі питання, які наведені в таблиці 1 — розв’язані. Доведені леми, які узагальнюють лему Шмідта і теореми С. М. Нікольського та Ф. В. Аتكінсона про загальний вигляд фредгольмових та нетерових операторів на випадки операторів з усіх перерахованих класів узагальнено оборотних операторів. Ці теореми дозволили запропонувати конструкції узагальнено-обернених (у банахових просторах) та псевдообернених і односторонньо псевдообернених (у гільбертових просторах) операторів до операторів кожного з класів узагальнено оборотних операторів.

Отримані формули для узагальнено-обернених та псевдообернених операторів до нормально розв’язних з доповнювальними ядром та образом використовуються при побудові узагальнено-обернених та псевдообернених операторів до інтегральних операторів Фредгольма з виродженими ядрами у банахових та гільбертових просторах.

Використовуючи і розвиваючи апарат узагальнено-обернених операторів [169], [219], [237] і матриць [136], [202], [246], [252], отримано критерії розв’язності і структуру загальних розв’язків лінійних крайових

задач для операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами. З єдиних позицій викладено методи побудови узагальнених операторів Гріна напівводнорідних крайових задач для цих рівнянь. Вивчено основні властивості узагальненого оператора Гріна, зокрема, показано, як з його допомогою будувати узагальнений оборотний оператор до оператора вихідної крайової задачі.

При аналізі слабконелінійних крайових задач вигляду (1.1), (1.2) в значній мірі використовуються методи теорії збурень: малого параметру Ляпунова–Пуанкаре [146], [168], асимптотичних методів нелінійної механіки [25], [26], [135]. Як підкреслено у [25] "Методи Ляпунова-Пуанкаре мають ... ту істотну перевагу, що є методами строго обґрунтованими, придатними не лише для кількісного, але також і для якісного дослідження". Метод малого параметра Ляпунова-Пуанкаре був використаний І. Г. Малкіним [149] при встановленні необхідної і достатньої умов існування періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь типу (1.3), що обертаються при $\varepsilon \rightarrow 0$ в розв'язок лінійної породжуючої крайової задачі, яка отримується з (1.3) при $\varepsilon = 0$. При цьому розв'язок будувався у вигляді рядів за степенями малого параметра ε . Е. О. Гребенніков, Ю. О. Рябов [69] запропонували ітераційний спосіб побудови розв'язків таких задач з допомогою зведення їх до еквівалентної операторної системи. У [69] повністю досліджений, так званий, критичний випадок першого порядку, коли відповідь на питання про існування періодичних розв'язків дається після аналізу крайової задачі, що служить для знаходження першого наближення до шуканого розв'язку. О.А. Бойчук і його учні розвинули ці ідеї на випадок критичних (порядку вище першого) нетерових крайових задач для звичайних диференціальних систем [29], [41], диференціальних систем з зосередженим запізнюванням [31], [30], систем з імпульсною дією [36], [186], автономних диференціальних систем [33], [37], [38] з крайовими

умовами, які задані у вигляді лінійного або слабконелінійного обмеженого вектор-функціоналу.

У представленій роботі, використовуючи апарат проекторів та узагальнено-обернених операторів, встановлено умови існування та формули для побудови загальних розв'язків лінійних крайових задач з узагальнено оборотними операторами, отримано необхідні умови існування, а також достатні умови існування єдиного та принаймні одного розв'язку слабконелінійних операторних рівнянь та слабконелінійних крайових задач з узагальнено оборотною лінійною частиною, лінійних та слабконелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром та крайових задач для них у банахових та гільбертових просторах, слабконелінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією та диференціальних систем із запізненням та імпульсною дією. Запропоновано ітераційні процедури побудови цих розв'язків, доведено їх збіжність.

1.2. Гільбертові та банахові простори

Далі зробимо огляд першоджерел з теорії гільбертових і банахових просторів, теорії лінійних операторів, які використовуються при подальшому викладенні матеріалу. Всі твердження даються без доведень. Матеріал викладений з використанням монографій [21], [53], [61], [68], [120], [123], [129], [130], [132], [172], [181], [201], [219], [237], а також робіт [119], [240], [247], [248], [252] та ін.

Гільбертові простори — це найпростіший тип нескінченновимірних нормованих просторів. Їх порівняльна простота пояснюється наявністю в них додаткової структури — скалярного добутку, який узагальнює звичайний скалярний добуток з векторної алгебри.

Означення 1.1. Гільбертовим простором (дійсним) називається повний нормований дійсний простір, в якому норма породжується скалярним добутком.

Означення 1.2. Два вектори x та y у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$ називаються ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю, $(x, y)_{\mathbf{H}} = 0$.

Означення 1.3. Сукупність всіх векторів h , ортогональних до підпростору M утворює (замкнений) підпростір $M^{\perp}$, який називається ортогональним доповненням простору M . При цьому говорять, що підпростір M доповнювальний у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$.

Якщо кожен елемент x гільбертового простору $\mathbf{H}$ можна представити у вигляді $x = z + h$, $z \in M$, $h \in M^{\perp}$, то говорять, що $\mathbf{H}$ є прямою топологічною сумою взаємно ортогональних просторів M та $M^{\perp}$ і пишуть

$$\mathbf{H} = M \oplus M^{\perp}.$$

У гільбертовому просторі будь-яка замкнена підмножина доповнювальна.

Означення 1.4. Систему елементів $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ гільбертового простору $\mathbf{H}$ називають ортонормованою, якщо для будь-яких $i, j \in \mathbf{N}$

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Нехай G — замкнена лінійна оболонка системи векторів $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Означення 1.5. Ортонормована система $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{H}$ називається ортонормованим базисом у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$, якщо її замкнена лінійна оболонка співпадає з $\mathbf{H}$.

Якщо $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормований базис у $\mathbf{H}$, то внаслідок того, що $G = \mathbf{H}$, будь-який вектор $x \in \mathbf{H}$ однозначно можна записати у вигляді:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, f_i)_{\mathbf{H}} f_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i,$$

де $x_i = (x, f_i)_{\mathbf{H}}$.

Необхідну і достатню умову існування ортонормованого базису у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$ дає наступна теорема.

Теорема 1.1. *Ортонормована система елементів $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{H}$ є ортонормованим базисом у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $x \in \mathbf{H}$ виконується рівність Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$, $\forall x \in \mathbf{H}$.*

Означення 1.6. *Гільбертовий простір $\mathbf{H}$ називається сепарабельним, якщо в ньому існує зліченна всюди щільна множина, тобто така множина, замикання якої за метрикою $\mathbf{H}$ співпадає з усім простором $\mathbf{H}$.*

Лема 1.1. [201] *Будь-яка нескінченна множина M у сепарабельному просторі сепарабельна.*

Відмітимо, якщо простір $\mathbf{H}$ має базис, то він сепарабельний.

Означення 1.7. *Систему елементів гільбертового простору $\mathbf{H}$ називають повною у $\mathbf{H}$, якщо вона породжує весь простір, тобто, якщо довільний елемент $\mathbf{H}$ може бути скільки завгодно точно наближений за нормою лінійними комбінаціями елементів цієї системи.*

Теорема 1.2. [181] *У сепарабельному гільбертовому просторі будь-яка повна ортонормована система векторів $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ є базисом, тобто для будь-якого $x \in \mathbf{H}$ виконується рівність*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, f_i)_{\mathbf{H}} f_i,$$

причому $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, f_i)|_{\mathbf{H}}^2$ (рівність Парсеваля). Числа (x, f_i) називаються коефіцієнтами Фур'є розкладання вектора x за ортонормованою системою $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Далі сформулюємо один з фундаментальних результатів теорії гільбертових просторів.

Теорема 1.3. [21, с. 238] *Будь-який нескінченновимірний сепарабельний гільбертовий простір $\mathbf{H}$ ізометрично ізоморфний простору $\mathbf{l}_2$.*

Звідси маємо, що усі сепарабельні гільбертові простори ізометрично ізоморфні між собою.

Поняття ортонормованої системи можна визначити і для системи векторів довільної потужності. У випадку, коли простір $\mathbf{H}$ довільної потужності система ортонормованих векторів визначається так [21, с. 239].

Нехай $\mathfrak{U}$ — множина довільній потужності.

Означення 1.8. Систему векторів $\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathfrak{U}} \subset \mathbf{H}$ називають ортонормованою, якщо $(f_{\alpha}, f_{\beta})_{\mathbf{H}} = 0$, для всіх $\alpha \in \mathfrak{U}$, $\beta \in \mathfrak{U}$, $\alpha \neq \beta$ і $\|f_{\alpha}\| = 1$, $\alpha \in \mathfrak{U}$.

Якщо $\mathfrak{U}$ незліченна, то $\mathbf{H}$ не може бути сепарабельним.

Лема 1.2. [21] *Нехай у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$ існує ортонормована система $\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$, де множина $\mathfrak{U}$ незліченна. Тоді для будь-якого $x \in \mathbf{H}$ не більш ніж зліченна кількість коефіцієнтів $x_{\alpha} = (x, f_{\alpha})_{\mathbf{H}}$ відмінні від нуля.*

Ці коефіцієнти, як і у випадку зліченної системи, називають коефіцієнтами Фур'є вектора x , а систему $\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ — ортонормованим базисом у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$. У цьому випадку для будь-якого елемента $x \in \mathbf{H}$ виконується рівність Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}} |x_{\alpha}|^2$, що забезпечує замкненість лінійної оболонки множини $\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$. При цьому будь-який елемент $x \in \mathbf{H}$ можна представити у вигляді:

$$x = \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}} (x, f_{\alpha})_{\mathbf{H}} f_{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}_x} x_{\alpha} f_{\alpha}$$

причому для кожного $x \in \mathbf{H}$ множина $\mathfrak{U}_x = \{\alpha \in \mathfrak{U}, x_\alpha \neq 0\}$ не більше ніж зліченна.

Якщо в несепарабельному гільбертовому просторі $\mathbf{H}$ вибрати всюди щільну множину векторів F мінімальної потужності, то ортогоналізуючи її, отримаємо ортонормований базис тієї ж потужності, що і множина F . Потужність цього базису називається розмірністю гільбертового простору $\mathbf{H}$.

Для несепарабельних гільбертових просторів справедливе твердження, яке аналогічне теоремі 1.3.

Для множини $\mathfrak{U}$ будь-якої потужності позначимо $\mathbf{l}_2(\mathfrak{U})$ множину функцій $\mathfrak{U} \ni \alpha \mapsto x(\alpha) \in R$, кожна з яких відмінна від нуля лише для зліченної множини значень α і таких, що

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{U}} |x(\alpha)|^2 < \infty.$$

Теорема 1.4. *Будь-який гільбертовий простір $\mathbf{H}$ ізометрично ізоморфний простору $\mathbf{l}_2(\mathfrak{U})$, де потужність множини $\mathfrak{U}$ дорівнює розмірності простору $\mathbf{H}$.*

Означення 1.9. *Пара послідовностей $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ і $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$ утворює спряжено біортогональну систему відносно одна до одної, якщо*

$$(\gamma_j, f_i)_{\mathbf{H}} = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots).$$

Теорема 1.5. *[67, с. 371] Біортогональна послідовність $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ до базису $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ банахового простору $\mathbf{H}$ також є базисом простору $\mathbf{H}$.*

Теорема 1.6. *[11] Послідовність векторів $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ має біортогонально спряжену послідовність у тому і тільки у тому випадку, коли ні при якому натуральному i вектор f_i не належить замкненій лінійній*

оболонці інших векторів

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots$$

Для виконання умов теореми необхідно і достатньо, щоб при кожному натуральному i була відмінна від нуля величина

$$\delta_i^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(f_i, f_{i+1}, \dots, f_n)}{\Gamma(f_{i+1}, f_{i+2}, \dots, f_n)},$$

де $\Gamma(g_1, g_2, \dots, g_n)$ — визначник Грама системи векторів $g_1, g_2, \dots, g_n$.

Означення 1.10. Нормований простір називається повним, якщо у ньому будь-яка фундаментальна послідовність збіжна. Повний нормований лінійний простір $\mathbf{B}$ називається банаховим.

Якщо X — довільна множина, то $\mathbf{l}_\infty(X)$ — лінійний простір, що складається з усіх обмежених функцій. Визначивши у ньому рівномірну норму [208, с. 81]

$$\|f(t)\|_\infty := \sup \{|f(t)| \mid t \in X\}$$

отримаємо банаховий простір. Якщо $X = \mathbf{N}$, то $\mathbf{l}_\infty(\mathbf{N})$ це $\mathbf{l}_\infty$, а якщо $X = [a, b]$, то у просторі $\mathbf{l}_\infty([a, b])$ можна виділити підпростір неперервних обмежених функцій, який позначається $\mathbf{C}[a, b]$, $\mathbf{C}[a, b] \subset \mathbf{l}_\infty([a, b])$.

У [208, с. 147] показано, що будь-який сепарабельний нормований простір з точністю до найвимогливішого ототожнення — ізометричного ізоморфізму — співпадає з деяким простором обмежених функцій, який наділений рівномірною метрикою.

Якщо $f(t)$ — вектор-функція, що визначена на скінченному проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у деякому банаховому просторі $\mathbf{B}$, $f(\cdot) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{B}$, то через $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B})$ позначатимемо банахів простір обмежених вектор-функцій $f(t)$ з рівномірною нормою

$$|||f(t)||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}}.$$

Якщо простір Y — повний, то $\mathcal{L}(X, Y)$ — банаховий простір лінійних обмежених операторів. У випадку, коли Y складається з дійсних чисел $Y = R$, простір $\mathcal{L}(X, R)$ позначається X^* і називається спряженим до X . Елементами X^* є обмежені лінійні функціонали визначені на просторі X . Спряжений простір є повним нормованим простором.

Теорема 1.7 (Хана-Банаха). [201] *Нехай M — лінійний підпростір банахового простору $\mathbf{B}$ і f^* — неперервний лінійний функціонал, визначений на M . Тоді f^* можна продовжити до неперервного лінійного функціонала на $\mathbf{B}$, норма якого співпадає з нормою f^* .*

Означення 1.11. *Нехай B_1 та B_2 два підпростори з $\mathbf{B}$, які перетинаються тільки в нулі, причому $\forall x \in \mathbf{B}, x = x_1 + x_2$, де $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2$. Прямою алгебраїчною сумою просторів B_1 та B_2 називається множина всіх векторів вигляду $x = x_1 + x_2$ і позначається*

$$\mathbf{B} = B_1 + B_2.$$

Якщо, крім того, B_1 та B_2 є замкненими підпросторами простору $\mathbf{B}$, то говорять про розкладання банахового простору $\mathbf{B}$ у пряму (топологічну) суму замкнених підпросторів і пишуть

$$\mathbf{B} = B_1 \oplus B_2.$$

Означення 1.12. *Якщо $B_1 \subset \mathbf{B}$ — замкнений підпростір і існує замкнений підпростір $B_2 \subset \mathbf{B}$, такий, що $\mathbf{B} = B_1 \oplus B_2$, то B_1 називається доповнювальним у $\mathbf{B}$, а B_2 — прямим доповненням до B_1 у $\mathbf{B}$.*

Пряме доповнення не єдине. Якщо підпростір доповнювальний, то він має нескінченну кількість різних доповнень. Так доповнювальним до B_1 буде будь-який підпростір вигляду $\tilde{B}_2 = \{Az + z : z \in B_2\}$, де $A : B_2 \rightarrow B_1$

— лінійний оператор [119, с. 77]. Пряма сума є лінійним многовидом, але, взагалі кажучи, не є простором (тобто може бути незамкненою).

У банаховому просторі пряме доповнення має, взагалі кажучи, не кожен замкнений підпростір, проте, скінченновимірний підпростір завжди доповнювальний.

Наслідок 1.1. *Якщо один з підпросторів B_1, B_2 має скінченну розмірність, то пряма сума $B_1 \oplus B_2$ замкнена, тобто скінченновимірний підпростір банахового простору завжди доповнювальний.*

Існування недоповнювальних нескінченновимірних банахових просторів уперше встановили С. Банах (S. Banach) та С. Мазур (S. Mazur) [218]. Так, наприклад, банаховий простір $\mathbf{C}[0, 1]$ недоповнювальний у просторі $\mathbf{L}_\infty[0, 1]$ [234], а простір збіжних числових послідовностей $\mathbf{c}$ недоповнювальний у банаховому просторі обмежених числових послідовностей $\mathbf{m}$ [137, с. 144].

Якщо $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ — гільбертовий простір, то будь-який його замкнений підпростір H_1 має пряме доповнення. Таким є, наприклад, ортогональне доповнення до H_1 .

Цікаві результати, що значною мірою розв'язують питання про доповнювальність підпросторів у просторах сумовних послідовностей, були отримані Й. Лінденштраусом (J. Lindenstrauss) та О. Пелчінським (A. Pełczyński) [239].

Теорема 1.8. *Якщо нескінченновимірний підпростір E в $\mathbf{l}_p$, $1 \leq p < \infty$ доповнювальний, то він ізоморфний $\mathbf{l}_p$; якщо E ізометричний $\mathbf{l}_p$, то він має в $\mathbf{l}_p$ ортогональне доповнення.*

Теорема 1.9. [119] *Якщо E — нескінченновимірний підпростір у $\mathbf{B}$, де $\mathbf{B} = \mathbf{c}_0$ або $\mathbf{l}_\infty$, то E доповнювальний тоді і тільки тоді, коли він ізоморфний $\mathbf{B}$.*

Довгий час залишалося відкритим питання: чи існує банаховий простір, відмінний від гільбертового, в якому кожен замкнений підпростір має доповнення? Негативна відповідь була отримана Й. Лінденштраусом та Л. Цафрірі (L. Tzafriri).

Теорема 1.10. [240] *Для того, щоб нескінченновимірний банаховий простір був ізоморфний гільбертовому, необхідно і достатньо, щоб у ньому кожен замкнений підпростір мав доповнення.*

Дамо ще декілька означень і тверджень, що стосуються базиса та біортогональних систем у банахових просторах [133].

Означення 1.13. Система елементів $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ називається повною у банаховому просторі $\mathbf{B}$, якщо лінійна оболонка цієї системи елементів всюди щільна у $\mathbf{B}$.

Повна система елементів може існувати тільки у сепарабельному просторі. Наступна теорема є критерієм повноти системи елементів.

Теорема 1.11. Для того, щоб система $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ була повною в $\mathbf{B}$, необхідно і достатньо, щоб не існувало лінійного функціонала $\gamma \in \mathbf{B}^*, \gamma \neq 0$ рівного нулю на всіх елементах $f_i, i = 1, 2, \dots$.

Означення 1.14. Система елементів $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ називається мінімальною у $\mathbf{B}$, якщо жоден елемент цієї системи не належить замкненій лінійній оболонці інших елементів.

Відмітимо, що умова мінімальності виконується далеко не завжди навіть в гільбертовому просторі [12].

Теорема 1.12. Для того, щоб система $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ була мінімальною необхідно і достатньо, щоб існувала система лінійних функціоналів $\gamma_j \in \mathbf{B}^*, j = 1, 2, \dots$, яка б утворювала з даною спряжено біортогональну систему $\gamma_j(f_i) = \delta_{ji}$.

Якщо система $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — повна і мінімальна, то біортогональна система функціоналів $\gamma_j \in \mathbf{B}^*, j = 1, 2, \dots$ визначається однозначно.

Означення 1.15. [133, с. 66] Система елементів $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ утворює базис у банаховому просторі $\mathbf{B}$, якщо кожен елемент $x \in \mathbf{B}$ однозначно можна представити у вигляді ряду, який збіжний за нормою

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i(x) f_i,$$

де $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$ — система функціоналів з $\mathbf{B}^*$, яка є спряжено біортогональною базисній системі елементів $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\gamma_j(f_i) = \delta_{ji}$.

Такий простір обов'язково сепарабельний, а базис у ньому називається базисом Шаудера або топологічним базисом.

Критерій існування біортогональної системи у банаховому просторі дає наступна теорема.

Теорема 1.13. [120] Для того, щоб система векторів $\{e_{\alpha}, \alpha \in A\}$ допускала біортогоналізацію, необхідно і достатньо, щоб вона була мінімальною.

Більш тонкі ознаки існування базису та біортогональних послідовностей наведені, наприклад, у [6], [13], [14], [71], [72].

1.3. Лінійні та проектуючі оператори

Означення 1.16. Відображення L лінійного простору X у лінійний простір Y , $L : X \rightarrow Y$ називається лінійним оператором, якщо виконуються наступні аксіоми:

$$(a1) \quad L(x + y) = Lx + Ly, \quad \text{для будь-яких } x \text{ та } y \text{ з } X;$$

$$(a2) \quad L(\alpha x) = \alpha Lx, \quad \text{для будь-якого } x \in X \text{ та } \alpha \in \mathbf{R}^1.$$

Нехай $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ банахові простори. $\mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір лінійних обмежених операторів, які діють з $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_2$.

Означення 1.17. Множина $D(L) \subseteq \mathbf{B}_1$, на якій діє оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$, називається областю визначення оператора L .

Означення 1.18. Множина всіх розв’язків однорідного рівняння

$$Lx = 0$$

утворює підпростір $\ker L \subseteq \mathbf{B}_1$ і називається ядром оператора L . Для позначення ядра використовується також символ $N(L)$ — нуль-простір оператора L .

Означення 1.19. Множина всіх значень оператора $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ утворює лінійний многовид $\operatorname{im} L \subseteq \mathbf{B}_2$ і називається образом оператора L . Для позначення образу оператора L також використовується символ $R(L)$.

Зважаючи на ці означення, звернемо увагу на наступне. Коли говорять, що оператор L діє з $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_2$, допускається можливість, що $D(L)$ — підмножина $\mathbf{B}_1$. Надалі запис $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ завжди означатиме, що $D(L) = \mathbf{B}_1$.

Означення 1.20. Розмірністю оператора $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ називається розмірність його образу і позначається $\dim L$:

$$\dim L = \dim \operatorname{im} L.$$

Оператор називається скінченновимірним, якщо $\dim L < \infty$.

Означення 1.21. Оператор L називається неперервним в точці $x_0 \in \mathbf{B}_1$, якщо $Lx \rightarrow Lx_0$ при $x \rightarrow x_0$.

Означення 1.22. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ називається обмеженим, якщо існує незалежна від x константа $k \geq 0$ така, що $\|Lx\| \leq k\|x\|$, $x \in D(L)$, $x \neq 0$.

Найменша з таких констант називається нормою оператора L і позначається $\|L\|$:

$$\|L\| = \sup_{x \in \mathbf{B}_1, x \neq 0} \frac{\|Lx\|_{\mathbf{B}_2}}{\|x\|_{\mathbf{B}_1}}.$$

Означення 1.23. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ називається щільно визначеним, якщо його область визначення $D(L)$ щільна у $\mathbf{B}_1$.

Оператор, визначений на всьому просторі $\mathbf{B}_1$, є щільно визначеним. Для щільно визначеного оператора $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ однозначно визначається спряжений оператор $L^* : \mathbf{B}_2^* \rightarrow \mathbf{B}_1^*$:

$$(L^*g)(x) = g(Lx), \quad \forall x \in \mathbf{B}_1, \quad \forall g \in \mathbf{B}_2^*.$$

Для гільбертових просторів спряжений оператор $L^* : \mathbf{H}_2^* = \mathbf{H}_2 \rightarrow \mathbf{H}_1^* = \mathbf{H}_1$ визначається через скалярний добуток

$$(L^*y, x)_{\mathbf{H}_1} = (y, Lx)_{\mathbf{H}_2}.$$

Спряжений оператор завжди замкнений. Оператор L^* спряжений до лінійного обмеженого сам є лінійним обмеженим.

Означення 1.24. Щільно визначений оператор L , який діє з $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_2$, називається нормально розв'язним, якщо його область значень замкнена: $R(L) = \overline{R(L)}$.

Теорема 1.14. [130] Для того, щоб замкнений щільно визначений оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$, у якого $R(L) \neq \mathbf{B}_2$, був нормально розв'язним, необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна з наступних умов:

(b1)

$$N(L^*)^\perp = R(L); \tag{1.7}$$

(b2) рівняння $Lx = y$ розв'язне лише для $y \in \mathbf{B}_2$, що задовольняють умові:

$$\varphi(y) = 0, \quad (1.8)$$

де φ — будь-який розв'язок однорідного спряженого рівняння

$$L^*\varphi = 0.$$

Нехай функціонали $\{\varphi_s\}_{s=1}^\nu$ складають базис у $N(L^*)$, де ν — скінченне число або нескінченність. Тоді умова $\varphi(y) = 0$ еквівалентна ν лінійно-незалежним умовам:

$$\varphi_s(y) = 0, \quad s = 1, \dots, \nu. \quad (1.9)$$

Умови (1.7) — (1.9) є необхідними і достатніми умовами розв'язності рівняння $Lx = y$.

Означення 1.25. [1] Лінійний оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ називається топологічно нетеровим, якщо його ядро $\ker L$ і образ $\operatorname{im} L$ доповнювальні, відповідно у $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$. Якщо, крім того, ядро $\ker L$ ізоморфне ядру $\ker L^*$, то оператор називається топологічно фредгольмовим.

Означення 1.26. [130] Замкнений щільно визначений оператор $L : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ називається звідно-оборотним, якщо

$$\mathbf{B} = N(L) \oplus R(L).$$

Оскільки образ $R(L)$ — є замкненим простором, то звідно-оборотний оператор є нормально розв'язним і рівняння $Lx = y$, для $y \in N(L)$ і $y \neq 0$ нерозв'язне у $\mathbf{B}$.

Означення 1.27. [132] Нормально розв'язний замкнений оператор L , у якого ядро $\ker L$ скінченновимірне називається n -нормальним.

Означення 1.28. [132] Нормально розв'язний замкнений оператор L , у якого ядро $\ker L^*$ скінченновимірне називається d -нормальним.

В іноземній літературі n -, d -нормальні оператори називають напівфредгольмовими чи напівнетеровими, серед яких розрізняють Φ_+ — оператори ($\dim \ker L < \infty$) та Φ_- — оператори ($\dim \ker L^* < \infty$).

Для щільно визначеного замкнутого оператора L властивості n -нормальності та d -нормальності симетричні відносно операції спряження [132].

Означення 1.29. Лінійний оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ називається нетеровим оператором, якщо його область значень замкнена, а розмірності ядра і коядра скінченні.

Означення 1.30. Нетеровий оператор називається фредгольмовим, якщо $\dim \ker L = \dim \ker L^* < \infty$.

Очевидно, що кожен нетеровий оператор є топологічно нетеровим, а кожен фредгольмовий — топологічно фредгольмовим.

Розглянемо клас лінійних операторів спеціального виду, які мають важливе застосування у теорії лінійних операторів взагалі і при побудові узагальнено-обернених операторів, зокрема. Це клас лінійних операторів — проектори.

Означення 1.31. Лінійне відображення $\mathcal{P} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ називається проектором у просторі $\mathbf{B}$, якщо

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P},$$

тобто якщо $\mathcal{P}(\mathcal{P}x) = \mathcal{P}x$ для кожного $x \in \mathbf{B}$.

Лема 1.3. [170] Нехай $\mathcal{P}$ — проектор у $\mathbf{B}$ з ядром $N(\mathcal{P})$ та образом $R(\mathcal{P})$.

Тоді справедливі наступні твердження:

$$(a1) \quad R(\mathcal{P}) = N(I - \mathcal{P}) = \{x \in \mathbf{B} : \mathcal{P}x = x\}$$

$$(a2) \quad N(\mathcal{P}) = R(I - \mathcal{P})$$

$$(a3) \quad R(\mathcal{P}) \cap N(\mathcal{P}) = \{0\} \text{ і } \mathbf{B} = R(\mathcal{P}) \dot{+} N(\mathcal{P})$$

$$(a4) \quad \text{якщо } B_1 \text{ та } B_2 \text{ такі підпростори у } \mathbf{B}, \text{ що}$$

$$B_1 \cap B_2 = \{0\} \text{ і } \mathbf{B} = B_1 \dot{+} B_2, \text{ то існує}$$

$$\text{проектор } \mathcal{P}, \text{ для якого } B_1 = R(\mathcal{P}) \text{ та } B_2 = N(\mathcal{P}).$$

Теорема 1.15. [170] Якщо $\mathcal{P}$ — неперервний проектор у банаховому просторі $\mathbf{B}$, то

$$\mathbf{B} = R(\mathcal{P}) \oplus N(\mathcal{P}),$$

де $R(\mathcal{P})$ і $N(\mathcal{P})$ — замкнені підпростори $\mathbf{B}$.

Норма проектора $\mathcal{P}$ може служити для оцінки "якості" доповнення [119]: чим більше $\|\mathcal{P}\|$, тим "гірше" доповнення. Якщо $\|\mathcal{P}\| = 1$, то говорять, що підпростір B_2 є ортогональним доповненням до підпростору B_1 .

Побудову проекторів у загальному вигляді можна робити за лемою А. Собчика [276].

Лема 1.4. Будь-який проектор $\tilde{\mathcal{P}}$ з $\mathbf{B}$ на B_1 має вигляд

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}(I_{\mathbf{B}} + J + H)$$

де J — інволюція, H — довільне неперервне відображення в $\mathbf{B}$, що задовольняє умовам

$$JH = -HJ = H.$$

Нехай M замкнений підпростір гільбертового простору $\mathbf{H}$.

Означення 1.32. *Визначений у всьому гільбертовому просторі $\mathbf{H}$ оператор, який кожному $h \in \mathbf{H}$ ставить у відповідність його проекцію на підпростір M , називається проектуючим оператором на M (ортопроектором) і позначається P_M , так що*

$$h_1 = P_M h.$$

Проектуючий оператор, очевидно, лінійний. Крім того, він обмежений і його норма дорівнює одиниці.

Ортопроектор P задовольняє наступним властивостям:

$$(a1) P_M^2 = P_M, \quad (a2) P_M^* = P_M.$$

1.4. Узагальнено оборотні та псевдооборотні оператори

Розглянемо поняття і твердження, які пов'язані з питаннями обернення, узагальненого обернення і псевдообернення лінійних нормально розв'язних операторів у банахових та гільбертових просторах.

Означення 1.33. *Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ називається оборотним, якщо існує оператор $X \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1)$ такий, що*

$$XL = I_{\mathbf{B}_1}, \quad LX = I_{\mathbf{B}_2},$$

де $I_{\mathbf{B}_1}, I_{\mathbf{B}_2}$ — тотожсні оператори у банахових просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$, відповідно.

Оператор X називається оберненим до оператора L і позначається $X = L^{-1}$.

З означення маємо, що обернений оператор, так само як і даний, лінійний. Якщо існує обернений оператор L^{-1} , то оператор L здійснює

взаємно однозначне відображення простору $\mathbf{B}_1$ на простір $\mathbf{B}_2$. Вірне і обернене твердження. Таким чином, обернений оператор, якщо він існує, єдиний і $\ker L = \{0\}$.

Теорема 1.16 (С. Банаха). [129] *Нехай L лінійний обмежений оператор, що взаємно однозначно відображає банаховий простір $\mathbf{B}_1$ на банаховий простір $\mathbf{B}_2$. Тоді обернений оператор L^{-1} обмежений.*

Означення 1.34. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ називається оборотним зліва, якщо існує оператор $X \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1)$ такий, що $XL = I_{\mathbf{B}_1}$. Оператор X називається лівим оберненим до L і позначається L_l^{-1} .

Означення 1.35. Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ називається оборотним справа, якщо існує оператор $Y \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1)$ такий, що $LY = I_{\mathbf{B}_2}$. Оператор Y називається правим оберненим до L і позначається L_r^{-1} .

Необхідні і достатні умови існування лівого L_l^{-1} і правого L_r^{-1} обернених операторів дають наступні теореми.

Теорема 1.17. [68] *Для того, щоб оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ був оборотним зліва, необхідно і достатньо, щоб:*

1. *Лінійний многовид $\operatorname{im} L$ був підпростором, що має пряме доповнення у $\mathbf{B}_2$;*

2. $\ker L = \{0\}$.

Якщо ці умови виконуються і L_l^{-1} — один з лівих обернених операторів до L , то загальний вигляд операторів, лівих обернених до L , дається формулою $L_l^{-1} \mathcal{P}$, де $\mathcal{P}$ — довільний проектор з властивістю $R(\mathcal{P}) = R(L)$.

Якщо ядро $\ker L^*$ скінченновимірне, то перша умова виконується, оскільки скінченновимірний підпростір завжди доповнювальний.

Теорема 1.18. [68] *Для того, щоб оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ був оборотним справа, необхідно і достатньо, щоб:*

1. $\text{im } L = \mathbf{B}_2$;
2. Підпростір $\ker L$ мав пряме доповнення у $\mathbf{B}_1$.

Якщо ці умови виконуються і L_r^{-1} — один з правих обернених до L операторів, то загальний вигляд операторів, правих обернених до L , дається формулою $\mathcal{P}L_r^{-1}$, де $\mathcal{P}$ — довільний проектор з властивістю $N(\mathcal{P}) = N(L)$.

Означення 1.36. *Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ називається узагальнено оборотним, якщо існує оператор $X \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1)$ такий, що*

$$LXL = L.$$

Оператор X називається узагальнено-оберненим до оператора L і позначається L^- .

Якщо оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ оборотний зліва і справа, то він оборотний. Лінійні обмежені односторонньо оборотні оператори є узагальнено оборотними.

Теорема 1.19. [68] *Для узагальненої оборотності оператора $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ необхідно і достатньо, щоб:*

1. L був нормально розв'язним оператором;
2. Підпростір $\ker L$ мав пряме доповнення у $\mathbf{B}_1$;
3. Підпростір $\text{im } L$ мав пряме доповнення у $\mathbf{B}_2$.

Наслідок 1.2. *Якщо простори $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ — гільбертові, то оператор L узагальнено оборотний тоді і тільки тоді, коли він нормально розв'язний.*

Всюди надалі клас лінійних обмежених узагальнено оборотних операторів $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$, які діють у банахових просторах, будемо позначати $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ (Generalized inverses), а клас лінійних обмежених нормально розв'язних $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$, які діють у гільбертових просторах — $\mathbf{GI}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$, оскільки з наслідку 1.2 теореми 1.19 маємо, що в гільбертових просторах оператор L узагальнено оборотний тоді і тільки тоді, коли він нормально розв'язний.

Наслідок 1.3. *Будь-який скінченновимірний оператор L з $\mathcal{L}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ узагальнено оборотний.*

Теорема 1.20. [68] *Нехай оператор $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ і нехай L^- один з узагальнено-обернених операторів до L . Тоді загальний вигляд узагальнено-обернених операторів L_0^- до оператора L дається формулою*

$$L_0^- = \mathcal{P}_1 L^- \mathcal{P}_2,$$

де $\mathcal{P}_1$ та $\mathcal{P}_2$ — довільні проектори з властивостями

$$(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_1)\mathbf{B}_1 = \ker L, \quad \mathcal{P}_2\mathbf{B}_2 = \operatorname{im} L.$$

Аналогічний результат з використанням леми Собчика 1.3 пізніше був отриманий М. Нашедом (М. Z. Nashed), та Г. Вотрубой (G. F. Votruba) [247]

Якщо оператор $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$, то оператор $L^- \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1)$ можна підібрати так, щоб виконувались рівності:

$$1. \quad LL^-L = L, \quad 2. \quad L^-LL^- = L^-, \quad (1.10)$$

причому друга рівність є наслідком першої і навпаки [68].

Нехай оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ діє з гільбертового простору $\mathbf{H}_1$ у гільбертовий простір $\mathbf{H}_2$. Тоді з множини узагальнено-обернених операторів $L^- \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1)$ можна вибрати єдиний, який буде задовольняти

умовам:

$$\begin{aligned} 1. \quad LL^{-}L &= L, & 3. \quad (LL^{-})^* &= LL^{-}, \\ 2. \quad L^{-}LL^{-} &= L^{-}, & 4. \quad (L^{-}L)^* &= L^{-}L. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Означення 1.37. Оператор $L^{-} : \mathbf{H}_2 \rightarrow \mathbf{H}_1$, який задовольняє умовам (1.11) називається псевдооберненим оператором до оператора L за Муром-Пенроузом (E. H. Moore, R. Penrose) [237], [246], [252] і позначається L^{+} .

РОЗДІЛ 2

ЗАГАЛЬНИЙ ВИГЛЯД УЗАГАЛЬНЕНО ОБОРОТНИХ ОПЕРАТОРІВ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Методи побудови розв'язків операторних рівнянь $Lx = y$ з обмеженим оператором у випадку, коли оператор L всюди і однозначно розв'язний (існує обмежений обернений оператор L^{-1}) добре розроблені. Якщо ж оператор L не є всюди розв'язним, виникають задачі по узагальненому оберненню операторів у функціональних просторах.

Для побудови узагальнено-обернених операторів до фредгольмових у скінченновимірних банахових просторах застосовна класична конструкція Е. Шмідта. Вона ґрунтується на леммі Е. Шмідта, яка тісно пов'язана з відомою теоремою С. М. Нікольського [161] про загальний вигляд фредгольмових операторів у функціональних просторах [120], [201].

У цьому розділі доведені леми, які узагальнюють лему Е. Шмідта [273] на випадок нормально розв'язних операторів: топологічно нетерових, топологічно фредгольмових, n - та d -нормальних, а також теореми про загальний вигляд нормально розв'язних операторів кожного з цих класів, які узагальнюють теореми С. М. Нікольського [161] та Ф. В. Аتكінсона [10].

2.1. Допоміжні твердження

Нехай $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ — лінійний обмежений нормально розв'язний оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банаховий простір $\mathbf{B}_2$, причому ядро $N(L)$ та образ $R(L)$ доповнювальні у просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$, відповідно. Це означає, що існують обмежені проектори [119], [166] $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ та $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$, які індукують розбиття $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ у прямі топологічні суми

$$\mathbf{B}_1 = N(L) \oplus X_L, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{B}_2 = Y_L \oplus R(L) \quad (2.2)$$

замкнених підпросторів $N(L)$ та X_L , Y_L та $R(L)$.

Для підпросторів $N(L)$ та Y_L розглянемо три випадки.

$$(a1). \text{ Підпростір } N(L) \text{ лінійно ізоморфний доповнювальному} \quad (2.3)$$

$$\text{в } Y_L \text{ підпростору } Y_1; N(L) \cong Y_1 \subset Y_L.$$

Це означає, що існують лінійний обмежений оборотний оператор $J_1 : N(L) \rightarrow Y_1$ такий, що $J_1 N(L) = Y_1$, $J_1^{-1} Y_1 = N(L)$ і обмежений проектор $\mathcal{P}_{Y_1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_2$, який розбиває підпростір Y_L у пряму топологічну суму замкнених підпросторів

$$Y_L = Y_1 \oplus Y_2 \quad (2.4)$$

де $Y_1 = \mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{B}_2$, $Y_2 = \mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{B}_2$, $\mathcal{P}_{Y_2} = (\mathcal{P}_{Y_L} - \mathcal{P}_{Y_1})$ — обмежений проектор. Тоді для тотожних операторів $I_{\mathbf{B}_1}$, $I_{\mathbf{B}_2}$ просторів $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$, відповідно, справедливі наступні розвинення:

$$I_{\mathbf{B}_1} = \mathcal{P}_{N(L)} + \mathcal{P}_{X_L},$$

$$I_{\mathbf{B}_2} = \mathcal{P}_{Y_1} + \mathcal{P}_{Y_2} + \mathcal{P}_{R(L)}. \quad (2.5)$$

$$(a2). \text{ Підпростір } Y_L \text{ лінійно ізоморфний доповнювальному} \quad (2.6)$$

$$\text{в } N(L) \text{ підпростору } N_1(L); Y_L \cong N_1(L) \supset N(L).$$

У цьому випадку існують обмежений проектор $\mathcal{P}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$, що розбиває підпростір $N(L)$ у пряму топологічну суму замкнених підпросторів

$$N(L) = N_1(L) \oplus N_2(L) \quad (2.7)$$

де $N_1(L) = \mathcal{P}_{N_1(L)} \mathbf{B}_1$, $N_2(L) = \mathcal{P}_{N_2(L)} \mathbf{B}_1$, $\mathcal{P}_{N_2(L)} = \mathcal{P}_{N(L)} - \mathcal{P}_{N_1(L)}$ — обмежений проектор. Тоді для тотожних операторів операторів $I_{\mathbf{B}_1}$, $I_{\mathbf{B}_2}$ справедливі розвинення:

$$I_{\mathbf{B}_1} = \mathcal{P}_{N_1(L)} + \mathcal{P}_{N_2(L)} + \mathcal{P}_{X_L}, \quad (2.8)$$

$$I_{\mathbf{B}_2} = \mathcal{P}_{Y_L} + \mathcal{P}_{R(L)}.$$

$$(a3). \text{ Нуль-простір } N(L) \text{ лінійно ізоморфний підпростору } Y_L; N(L) \cong Y_L. \quad (2.9)$$

У цьому випадку існує лінійний обмежений оборотний оператор $J_3 : N(L) \rightarrow Y_L$ такий, що $J_3 N(L) = Y_L$, $J_3^{-1} Y_L = N(L)$.

Зауваження 2.1. *Доповнювальність підпросторів Y_1 , $N_1(L)$ у Y та $N(L)$, відповідно, є істотною умовою і виконується у банахових просторах далеко не завжди (на відміну від гільбертових, які мають ортогональне доповнення до будь-якого замкненого підпростору).*

Продовжимо нулем оператори J_1 та J_3 на підпросторі X_L , а J_2 — на підпросторі $X_L \oplus N_2(L)$ і позначимо розширення операторів J_i , $i = 1, 2, 3$ на простір $\mathbf{B}_1$ через $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} : \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_1 \subseteq Y$. Аналогічно продовжимо нулем оператор J_1^{-1} на підпросторі $Y_2 \oplus R(L)$, а оператори J_2^{-1} , J_3^{-1} — на підпросторі $R(L)$ і позначимо через $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_2 \rightarrow N_1(L) \subseteq N(L)$ — розширення операторів J_i^{-1} , $i = 1, 2, 3$ на простір $\mathbf{B}_2$. У випадку (a3) $Y_1 \equiv Y$, $N_1(L) \equiv N(L)$ і тому $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv \overline{\mathcal{P}}_Y$, $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$.

Доведемо низку тверджень необхідних для подальшого викладення матеріалу, що стосуються проекторів у банахових, ортопроекторів у гільбертових просторах та операторів, які здійснюють ізоморфізм між нуль-простором $N(L) \subset \mathbf{B}_1$ та підпростором $Y_L \subset \mathbf{B}_2$.

Лема 2.1. *Проектори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$ і оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_2 \rightarrow N_1(L)$, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} : \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_1$ задовольняють співвідношенням:*

$$\begin{aligned} (a1) \quad & \mathcal{P}_{Y_L} \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}, \\ (a2) \quad & \mathcal{P}_{N(L)} \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} \mathcal{P}_{Y_L} = \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, \\ (a3) \quad & \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = \mathcal{P}_{Y_1}, \\ (a4) \quad & \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \mathcal{P}_{N_1(L)}. \end{aligned}$$

Доведення. Доведемо, наприклад, співвідношення (a1).

Нехай $x \in \mathbf{B}_1$. Тоді, з одного боку $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x \in Y_1 \subseteq Y_L, \forall x \in \mathbf{B}_1$, звідки $\mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x$, оскільки $\mathcal{P}_{Y_L}Y_L = Y_L$. Отже, $\mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$.

З іншого боку $\forall x \in \mathbf{B}_1, \mathcal{P}_{N(L)}x \in N(L) \subset \mathbf{B}_1$, звідки $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)}x = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x$ за означенням оператора $\mathcal{P}_{Y_1}$. Отже, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$.

Таким чином,

$$\mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}.$$

Інші співвідношення доводяться аналогічно.

Зауваження 2.2. Лема 2.1 справедлива, якщо замість проекторів $\mathcal{P}_{Y_L}$ та $\mathcal{P}_{N(L)}$ взяти проектори $\mathcal{P}_{Y_1}$ та $\mathcal{P}_{N_1(L)}$, відповідно.

Нехай $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ — лінійний обмежений нормально розв'язний оператор, який діє з гільбертового простору $\mathbf{H}_1$ у гільбертовий простір $\mathbf{H}_2$. У цьому випадку існують ортопроектори $P_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N(L), P_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \rightarrow N(L^*)$ та обмежені оператори $\overline{P}_{N_1(L)} : \mathbf{H}_2 \rightarrow N(L), \overline{P}_{N_1(L^*)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N(L^*)$. Тоді з леми 2.1 маємо наступне твердження.

Лема 2.2. Ортопроектори $P_{N(L)}, P_{N(L^*)}$ та оператори $\overline{P}_{N_1(L)}, \overline{P}_{N_1(L^*)}$ задовольняють співвідношенням:

$$(a1) \quad P_{N(L^*)}\overline{P}_{N_1(L^*)} = \overline{P}_{N_1(L^*)}P_{N(L)} = \overline{P}_{N_1(L^*)},$$

$$(a2) \quad P_{N(L)}\overline{P}_{N_1(L)} = \overline{P}_{N_1(L)}P_{N(L^*)} = \overline{P}_{N_1(L)}.$$

Доведення леми аналогічне доведенню леми 2.1.

Лема 2.3. Ортопроектори $P_{N(L)}, P_{N(L^*)}$ та проектори $\mathcal{P}_{N(L)}, \mathcal{P}_{N(L^*)}$ задовольняють співвідношенням:

$$\begin{aligned} (a1) \quad & P_{N(L)}\mathcal{P}_{N(L)} = \mathcal{P}_{N(L)}, \\ (a2) \quad & \mathcal{P}_{N(L)}P_{N(L)} = P_{N(L)}, \\ (a3) \quad & \mathcal{P}_{N(L^*)}P_{N(L^*)} = \mathcal{P}_{N(L^*)}, \\ (a4) \quad & P_{N(L^*)}\mathcal{P}_{N(L^*)} = P_{N(L^*)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Доведення.

(a1) Оскільки $P_{N(L)}x_0 = x_0, \forall x_0 \in N(L)$, а $x_0 = \mathcal{P}_{N(L)}x, \forall x \in \mathbf{H}_1$ то, підставивши замість x_0 його значення $P_{N(L)}x$ у перше співвідношення, отримаємо:

$$P_{N(L)}\mathcal{P}_{N(L)}x = \mathcal{P}_{N(L)}x, \forall x \in \mathbf{H}_1.$$

Співвідношення (a2) доводиться аналогічно.

Раніше було відмічено, що простори $\mathbf{H}_i^*$, $i = 1, 2$ співпадають з просторами $\mathbf{H}_i$, $i = 1, 2$ з точністю до ізоморфізму. Спряжені простори $\mathbf{H}_i^*$ — це простори вектор-рядків y^*, x^* . Оскільки розглядаються дійсні гільбертові простори, то операція спряження "*" еквівалентна операції транспонування " T ". Проектор $\mathcal{P}_{N(L^*)}$ ($L^*\mathcal{P}_{N(L^*)} = 0$) діє на вектор-рядок $y^* \in \mathbf{H}_2^*$ за правилом $y^*\mathcal{P}_{N(L^*)}^*$, а ортопроектор $P_{N(L^*)}$, враховуючи його самоспряженість — за правилом $y^*P_{N(L^*)}$. Тоді аналогічне (a1) співвідношення буде мати вигляд

$$y^*P_{N(L^*)}\mathcal{P}_{N(L^*)}^* = y^*\mathcal{P}_{N(L^*)}^*.$$

Взявши операцію спряження від обох частин останньої рівності, отримаємо співвідношення (a3).

Співвідношення (a4) доводиться аналогічно.

Проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_{Y_L}$ і оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}$ та $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ можуть бути представлені в аналітичному вигляді за умови, що простори, в яких вони діють, мають базиси Шаудера [131].

Нехай простори $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ мають базиси Шаудера. Тоді $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ — сепарабельні простори і проектори та оператори, про які йшла мова у лемах 2.1 – 2.3, можна представити в аналітичному вигляді. У цьому випадку підпростори $N(L)$ та $N(L^*)$, відповідно, мають зліченновимірні повні мінімальні нормовані системи базисних елементів

$$\{f_i\}_{i=1}^\mu \subset N(L), f_i = \text{col}(f_i^{(1)}, f_i^{(2)}, \dots, f_i^{(n)}, \dots),$$

$$\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^\nu \subset N(L^*), \varphi_s(\cdot) = \text{col}(\varphi_s^{(1)}(\cdot), \varphi_s^{(2)}(\cdot), \dots, \varphi_s^{(n)}(\cdot), \dots),$$

де μ та ν — скінченні числа або нескінченність в залежності від класу оператора L .

Оскільки системи базисних елементів $\{f_i\}_{i=1}^\mu$ та базисних функціоналів $\{\varphi_s\}_{s=1}^\nu$ повні та мінімальні, то для них існують спряжено біортогональні [71], [72], [120], [181] система функціоналів

$$\{\gamma_j(\cdot)\}_{j=1}^\mu \subset N^*(L) \subset \mathbf{B}_1^*, \gamma_j(\cdot) = \text{col}(\gamma_j^{(1)}(\cdot), \gamma_j^{(2)}(\cdot), \dots, \gamma_j^{(n)}(\cdot), \dots)$$

і повна система елементів

$$\{\psi_k\}_{k=1}^\nu \subset Y_L \subset \mathbf{B}_2, \psi_k = \text{col}(\psi_k^{(1)}, \psi_k^{(2)}, \dots, \psi_k^{(n)}, \dots),$$

яка утворює базис підпростору Y_L .

За теоремою Хана-Банаха кожен з функціоналів $\{\gamma_j\}_{j=1}^\mu$, який визначений на підпросторі $N(L) \subset \mathbf{B}_1$, може бути продовжений, із збереженням норми, на весь простір $\mathbf{B}_1$, а кожен з функціоналів $\{\varphi_s\}_{s=1}^\nu$ — на весь простір $\mathbf{B}_2$.

Тоді проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_{Y_L}$ можуть бути записані за допомогою біортогональних систем [120]

$$\mathcal{P}_{N(L)}z = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{N^{(n)}(L)}z, \quad \mathcal{P}_{Y_L}y = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{Y_L^{(m)}}y,$$

де $\mathcal{P}_{N^{(n)}(L)}$ та $\mathcal{P}_{Y_L^{(m)}}$ — монотонні послідовності проекторів на підпростори $N^{(n)}(L) \subset N(L)$ та $Y_L^{(n)} \subset Y_L$, відповідно,

$$\mathcal{P}_{N^{(n)}(L)}z = \sum_{i=1}^n \gamma_i(z) f_i, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\mathcal{P}_{Y_L^{(n)}}y = \sum_{j=1}^n \varphi_j(y) \psi_j, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Позначивши матриці

$$\begin{aligned}
 X &= (f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_\mu), \\
 \Gamma(\cdot) &= (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \dots, \gamma_j(\cdot), \dots, \gamma_\mu(\cdot)), \\
 \Phi(\cdot) &= (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_s(\cdot), \dots, \varphi_\nu(\cdot)), \\
 \Psi &= (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots, \psi_\nu),
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

запишемо проектори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ та $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$ формулами

$$\mathcal{P}_{N(L)} z = X \Gamma(z), \quad \mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L), \tag{2.12}$$

$$\mathcal{P}_{Y_L} y = \Psi \Phi(y), \quad \mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L,$$

де, наприклад, запис $\Gamma(z)$ означає μ -вимірний вектор-стовпець, який складається із значень вектор-функціоналів $\gamma_j, j = 1, 2, \dots, \mu$ на елементі z , $\Gamma(X) = E_\mu$, $\Phi(\Psi) = E_\nu$, E_μ, E_ν — одиничні матриці (скінченно або нескінченновимірні, в залежності від значень μ та ν).

Далі побудуємо лінійні обмежені оператори, які здійснюють ізоморфізм між просторами $N(L)$ та Y_L . Оскільки системи базисних елементів $\{\varphi_s\}_{s=1}^\nu \subset \mathbf{B}_2^*$ нуль-простору $N(L^*)$ та елементів $\{\psi_s\}_{s=1}^\nu \subset \mathbf{B}_2$ спряжено біортогональні $\varphi_s(\psi_k) = \delta_{sk}$, то між ними існує взаємно однозначна відповідність. Отже, підпростори $N(L^*)$ та Y_L лінійно ізоморфні і мають однакову розмірність, $\dim N(L^*) = \dim Y_L$. В залежності від співвідношень між μ та ν між підпросторами $N(L)$ та Y_L або їх підпросторами можна встановити ізоморфізм.

Якщо підпростір $N(L)$ лінійно ізоморфний доповнювальному в Y_L підпростору $Y_1 : N(L) \cong Y_1 \subset Y_L$, то оператори $J_1 : N(L) \rightarrow Y_1$ та $J_1^{-1} : Y_1 \rightarrow N(L)$ — визначимо за формулами

$$J_1 z = \lim_{n \rightarrow \infty} J_1^{(n)} z, \quad J_1^{-1} y = \lim_{m \rightarrow \infty} (J^{-1})^{(m)} y,$$

де $J_1^{(n)}z$ та $(J_1^{-1})^{(m)}$ — монотонні послідовності операторів на підпростори $Y_L^{(n)} \subset Y_L$ та $N^{(m)}(L) \subset N(L)$, відповідно,

$$J_1^{(n)}z = \sum_{i=1}^n \gamma_i(z)\bar{\psi}_i, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \mu,$$

$$(J_1^{-1})^{(m)}y = \sum_{j=1}^m \bar{\varphi}_j(y)f_j, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \mu,$$

де $\{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^\mu \subseteq \{\psi_k\}_{k=1}^\nu$ — лінійно-незалежна система елементів, на яку натягнутий підпростір Y_1 , $\{\bar{\varphi}_s\}_{s=1}^\mu \subseteq \{\varphi_s\}_{s=1}^\nu$ — система функціоналів, яка задовольняє умові $\bar{\varphi}_s(\bar{\psi}_k) = \delta_{sk}$. По аналогії з (2.11) позначимо

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\cdot) &= (\bar{\varphi}_1(\cdot), \bar{\varphi}_2(\cdot), \dots, \bar{\varphi}_\mu(\cdot)), \\ \bar{\Psi} &= (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_\mu). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Якщо підпростір $N_1(L) \subset N(L)$ доповнювальний у $N(L)$ і лінійно ізоморфний підпростору $Y_L : N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L$, то оператори $J_2 : N_1(L) \rightarrow Y_L$ та $J_2^{-1} : Y_L \rightarrow N_1(L)$ — визначимо за формулами

$$J_2z = \lim_{n \rightarrow \infty} J_2^{(n)}z, \quad J_2^{-1}y = \lim_{m \rightarrow \infty} (J_2^{-1})^{(m)}y,$$

де $J_2^{(n)}z$ та $(J_2^{-1})^{(m)}$ — монотонні послідовності операторів на підпростори $Y_L^{(n)} \subset Y_L$ та $N^{(m)}(L) \subset N(L)$, відповідно,

$$J_2^{(n)}z = \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i(z)\bar{\psi}_i, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \nu,$$

$$(J_2^{-1})^{(m)}y = \sum_{j=1}^m \varphi_j(y)\bar{f}_j, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \nu,$$

де $\{\bar{f}_i\}_{i=1}^\nu \subseteq \{f_i\}_{i=1}^\mu$ лінійно-незалежна система елементів, на яку натягнутий підпростір $N_1(L)$, а $\{\bar{\gamma}_j\}_{j=1}^\nu \subseteq \{\gamma_j\}_{j=1}^\mu$, система функціоналів, яка задовольняє умові $\bar{\gamma}(\bar{f}) = \delta_{ij}$. По аналогії з (2.11) позначимо

$$\begin{aligned} \bar{X} &= (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_\nu), \\ \bar{\Gamma}(\cdot) &= (\bar{\gamma}_1(\cdot), \bar{\gamma}_2(\cdot), \dots, \bar{\gamma}_\nu(\cdot)). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Продовжимо нулем оператори J_1 на підпросторі X_L , а J_2 — на підпросторі $X_L \oplus N_2(L)$ і позначимо розширення операторів $J_i, i = 1, 2$ на простір $\mathbf{B}_1$ через $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} : \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_1 \subseteq Y$. Аналогічно продовжимо нулем оператор J_1^{-1} на підпросторі $Y_2 \oplus R(L)$, а оператор J_2^{-1} на підпросторі $R(L)$ і позначимо через $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_2 \rightarrow N_1(L) \subseteq N(L)$ — розширення операторів $J_i^{-1}, i = 1, 2$ на простір $\mathbf{B}_2$.

Тоді

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} z = \overline{\Psi} \overline{\Gamma}(z), \quad z \in \mathbf{B}_1, \quad (2.15)$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} y = \overline{X} \overline{\Phi}(y), \quad y \in \mathbf{B}_2.$$

Використовуючи позначення (2.13), (2.14), формулами

$$\mathcal{P}_{N_1(L)} z = \overline{X} \overline{\Gamma}(z), \quad z \in \mathbf{B}_1, \quad \mathcal{P}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N_1(L), \quad (2.16)$$

$$\mathcal{P}_{Y_1} y = \overline{\Psi} \overline{\Phi}(y), \quad y \in \mathbf{B}_2, \quad \mathcal{P}_{Y_1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_1$$

визначимо, відповідно, обмежені проектори на підпростори $N_1(L)$ та Y_1 банахових просторів $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$.

Будь-який сепарабельний гільбертів простір має базис Шаудера, яким є кожна тотальна ортонормована система векторів (в той час як серед сепарабельних банахових просторів є простори, які не мають топологічного базису).

Нехай $\mathbf{H}_1$ та $\mathbf{H}_2$ — гільбертові простори і ядра $N(L)$ та $N(L^*)$ мають мінімальні ортонормовані системи

$$\{f_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}, \quad \{\varphi_\beta, \beta \in \mathfrak{S}\},$$

де $\mathfrak{A}$ та $\mathfrak{S}$ множини довільної потужності [21, с. 239]

Тоді ортопроектори на нуль-простори операторів L та L^* будуть мати вигляд:

$$P_{N(L)}z = \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}} (f_\alpha, z)_{\mathfrak{U}} f_\alpha, \quad (2.17)$$

$$P_{N(L^*)}y = \sum_{\beta \in \mathfrak{S}} (\varphi_\beta, y)_{\mathfrak{S}} \varphi_\beta,$$

де $f_\alpha : (f_\alpha, f_\rho)_{\mathfrak{U}} = (f_\alpha^* \cdot f_\rho)_{\mathfrak{U}} = \delta_{\alpha\rho}$, $\varphi_\beta^* : (\varphi_\beta, \varphi_\eta)_{\mathfrak{S}} = (\varphi_\beta^* \cdot \varphi_\eta)_{\mathfrak{S}} = \delta_{\beta\eta}$.

Позначивши

$$\begin{aligned} X &= (f_1, f_2, \dots, f_\alpha, \dots), \\ \Phi &= (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\beta, \dots), \end{aligned} \quad (2.18)$$

ортопроектори (2.17) запишемо формулами

$$P_{N(L)}(z) = X(X, z)_{\mathfrak{U}}, \quad (2.19)$$

$$P_{N(L^*)}(y) = \Phi(\Phi, y)_{\mathfrak{S}}.$$

де, наприклад, запис $(X, z)_{\mathfrak{U}} = (X^* \cdot z)_{\mathfrak{U}}$ означає нескінченновимірний вектор-стовпець, складений із скалярних добутків (f_α, z) , $\alpha \in \mathfrak{U}$, причому $\forall z$ множина $\{(f_\alpha, z)_{\mathfrak{U}} \neq 0\}$ не більше ніж зліченна.

Якщо системи базисних векторів зліченновимірні не ортонормовані, то ортопроектори на нуль-простори $N(L)$ та $N(L^*)$ можна знайти за формулами

$$P_{N(L)}z = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{N^{(n)}(L)}z, \quad P_{N(L^*)}y = \lim_{m \rightarrow \infty} P_{N^{(m)}(L^*)}y, \quad (2.20)$$

де

$$\begin{aligned} P_{N^{(n)}(L)}z &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}^{(-1)}(f_j, z) f_i, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ P_{N^{(m)}(L^*)}y &= \sum_{s,k=1}^m \beta_{sk}^{(-1)}(\varphi_k, y) \varphi_s, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$\alpha_{ij}^{(-1)}$ та $\beta_{sk}^{(-1)}$ — елементи матриць обернених до матриць Грама $\Gamma(f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\Gamma(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$. Існування границі і той факт, що таким

чином визначені оператори будуть проекторами, є наслідком теореми 7 [120, с. 230], оскільки послідовності проекторів $P_{N^{(n)}(L)}z$ та $P_{N^{(n)}(L^*)}y$ — монотонні. У випадку, коли $N(L)$ — скінченновимірний підпростір, конструкція ортопроектора переходить у відому для n -нормальних операторів [66].

Використовуючи позначення (2.18), формули для визначення ортопроекторів (2.20) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} P_{N(L)}z &= X\alpha^{-1}(X, z) = X\alpha^{-1}(X^* \cdot z), \\ P_{N(L^*)}y &= \Phi\beta^{-1}(\Phi, y) = \Phi\beta^{-1}(\Phi^* \cdot y), \end{aligned} \quad (2.21)$$

де α^{-1} та β^{-1} — матриці, обернені до симетричних матриць Грама

$$\alpha = (X^* \cdot X) \quad \text{та} \quad \beta = (\Phi^* \cdot \Phi).$$

Для визначення операторів $\bar{P}_{N_1(L^*)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N_1(L^*) \subseteq N(L^*)$, $\bar{P}_{N_1(L)} : \mathbf{H}_2 \rightarrow N_1(L) \subseteq N(L)$ у (2.15) покладемо

$$\bar{P}(z) = \bar{\alpha}^{-1}(\bar{X}^* \cdot z), \quad \bar{\Phi}(y) = \bar{\beta}^{-1}(\bar{\Phi}^* \cdot y), \quad \bar{\Psi} = \bar{\Phi}, \quad (2.22)$$

де $\bar{\alpha}^{-1} = (\bar{X}^* \cdot \bar{X})^{-1}$; $\bar{\beta}^{-1} = (\bar{\Phi}^* \cdot \bar{\Phi})^{-1}$.

Тоді, враховуючи (2.22), формули (2.15) у гільбертових просторах наберуть вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{N_1(L^*)}z &= \bar{\Phi}\bar{\alpha}^{-1}(\bar{X}^* \cdot z), \quad \bar{P}_{N_1(L^*)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N_1(L^*) \subseteq N(L^*); \\ \bar{P}_{N_1(L)}y &= \bar{X}\bar{\beta}^{-1}(\bar{\Phi}^* \cdot y), \quad \bar{P}_{N_1(L)} : \mathbf{H}_2 \rightarrow N_1(L) \subseteq N(L). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Якщо базиси у підпросторах $N(L)$ та $N(L^*)$ ортонормовані, то у формулах (2.23) $\bar{\alpha}^{-1}$, $\bar{\beta}^{-1}$ — одиничні матриці.

2.2. Аналог леми Е. Шмідта для топологічно нетерових операторів

Нехай $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ топологічно нетеровий оператор ($\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$), $N(L) \not\cong N(L^*)$, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банаховий простір $\mathbf{B}_2$. Тоді існують нескінченновимірні обмежені проекти $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_{Y_L}$, які розбивають простори $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ у прямі суми замкнених підпросторів за формулами (2.1), (2.2) і для підпросторів $N(L)$ та Y_L виконується одна з умов (а1) чи (а2) з підрозділу 2.1..

Лема 2.4. *Нехай L — топологічно нетеровий оператор і виконується одна з умов (2.3) або (2.6). Тоді оператор $\bar{L} = L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$ має обмежений обернений*

$$\bar{L}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1} - & \text{лівий, якщо } N(L) \cong Y_1 \subset Y_L, \\ (L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_L})_r^{-1} - & \text{правий, якщо } N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L. \end{cases}$$

Загальний вигляд односторонньо обернених операторів $\bar{L}_{l_0,r_0}^{-1}$ дається формулою

$$\bar{L}_{l_0,r_0}^{-1} = \begin{cases} \bar{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_2}) - & \text{лівий, якщо } N(L) \cong Y_1 \subset Y_L, \\ (I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)})\bar{L}_r^{-1} - & \text{правий, якщо } N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L, \end{cases}$$

де $\tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N_2(L)$ і $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_2} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_2$ — довільні нескінченновимірні обмежені проекти.

Доведення. Нехай підпростір $N(L)$ ізоморфний підпростору $Y_1 \subset Y_L$. Покажемо, що оператор $L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$ має обмежений лівий обернений. Для цього за теоремою 1.17 необхідно і достатньо показати, що:

- i) $N(\bar{L}) = N(L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}) = \{0\}$,
- ii) $R(L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1})$ доповнювальний у $\mathbf{B}_2$.

i) Нехай існує елемент $x_0 \in \mathbf{B}_1$, $x_0 \neq 0$ такий, що

$$(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})x_0 = Lx_0 + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x_0 = 0. \quad (2.24)$$

З (2.24) маємо, що

$$Lx_0 \in R(L), \quad \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x_0 \in Y_1.$$

Підпростори $R(L)$ та Y_L взаємно доповнюють один одного у банаховому просторі $\mathbf{B}_2$, а $Y_1 \subset Y_L$, отже $R(L) \cap Y_1 = \{0\}$. Таким чином, вони мають тільки один спільний елемент — нульовий: $Lx_0 = 0$ і $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x_0 = 0$, тобто $x_0 \in N(L)$ і $x_0 \in N(\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) \subset X_L$ одночасно. Підпростори $N(L)$ та X_L також взаємно доповнюють один одного. Отже, $N(L) \cap X_L = \{0\}$. Звідси маємо, що $x_0 = 0$. Отримане протиріччя доводить, що $N(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) = \{0\}$.

ii) Доповнювальність $R(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})$ витікає з обмеженості проектора $\mathcal{P}_{Y_2}$ та співвідношення (2.4).

Таким чином, оператор $L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ має обмежений лівий обернений.

За теоремою 1.17 [68] ліві обернені оператори в загальному вигляді записуються так: $\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_l^{-1} \mathcal{P}_{R(\overline{L})}$, де $\mathcal{P}_{R(\overline{L})}$ — деякий проектор, що має властивість $R(\mathcal{P}_{R(\overline{L})}) = R(\overline{L})$. З (2.7) маємо, що таку властивість має проектор $I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_2}$, тобто $R(I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_2}) = R(\overline{L})$, де $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_2}$ — довільний нескінченновимірний обмежений проектор. Це означає, що в загальному вигляді ліві обернені оператори можна записати

$$\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_l^{-1} (I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_2}).$$

У випадку, коли підпростір Y_L ізоморфний підпростору $N_1(L) \subset N(L)$ маємо, що $Y_1 \equiv Y_L$, а $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$. Щоб довести, що оператор $L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ має обмежений правий обернений, за теоремою 1.18 необхідно і достатньо показати що:

- i) $R(\overline{L}) = R(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}) = \mathbf{B}_2$,
- ii) $N(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})$ доповнювальний у $\mathbf{B}_1$.

i) За визначенням операторів $\bar{L}$ та $\bar{\mathcal{P}}_{Y_L}$ для довільного елемента $x \in \mathbf{B}_1$ маємо:

$$\bar{L}x = Lx + \bar{\mathcal{P}}_{Y_L}x.$$

Але $Lx \in R(L)$, $\bar{\mathcal{P}}_{Y_L}x \in Y_L$, а підпростори $R(L)$ та Y_L взаємно доповнюють один одного у просторі $\mathbf{B}_2$, отже $R(\bar{L}) \equiv \mathbf{B}_2$.

ii) Доповнювальність нуль-простору $N(\bar{L})$ виходить з визначення проектора $\mathcal{P}_{N_1(L)}$, співвідношення (2.7) та розвинення (2.8) тотожного оператора $I_{\mathbf{B}_1}$.

Таким чином, оператор $L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$ має обмежений правий обернений [68].

З теореми 1.18 маємо, що загальний вигляд правих обернених операторів має представлення $\mathcal{P}_{X_{\bar{L}}} \bar{L}_r^{-1}$, якщо проекційний оператор $\mathcal{P}_{X_{\bar{L}}}$ має властивість $N(\mathcal{P}_{X_{\bar{L}}}) = N(\bar{L})$. Таким чином, загальний вигляд правих обернених операторів має представлення $\mathcal{P}_{X_{\bar{L}}} \bar{L}_r^{-1}$. Як виходить із (2.5), таку властивість має проектор $I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)}$, тобто $N(I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)}) = N(\bar{L})$, де $\tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N_2(L)$ — довільний нескінченновимірний обмежений проектор. Це означає, що в загальному вигляді праві обернені оператори можна записати

$$\bar{L}_{r_0}^{-1} = (I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)}) \bar{L}_r^{-1}.$$

Лему доведено.

В гільбертових просторах топологічна нетеровість оператора еквівалентна його нормальній розв'язності. Крім того, угільбертовому просторі будь-який підпростір доповнювальний. Тому лема 2.4, яку було доведено для банахових просторів справедлива з деякими уточненнями і в гільбертових.

Лема 2.5. *Нехай $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ — нормально розв'язний оператор. Тоді оператор $\bar{L} = L + \bar{P}_{N_1(L^*)}$ має обмежений обернений*

$$\bar{L}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (L + \bar{P}_{N_1(L^*)})_l^{-1} - & \text{лівий, якщо } N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*), \\ (L + \bar{P}_{N(L^*)})_r^{-1} - & \text{правий, якщо } N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*). \end{cases}$$

Загальний вигляд односторонньо обернених операторів $\bar{L}_{l_0, r_0}^{-1}$ дається формулою

$$\bar{L}_{l_0, r_0}^{-1} = \begin{cases} \bar{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L^*)}) - & \text{лівий, якщо } N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*), \\ (I_{\mathbf{H}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)})\bar{L}_r^{-1} - & \text{правий, якщо } N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*), \end{cases}$$

де $\tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L^*)} : \mathbf{H}_2 \rightarrow N_2(L^*)$ і $\tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N_2(L)$ — нескінченновимірні обмежені проектори.

Як наслідки з доведеної леми сформулюємо аналогічні леми для решти класів узагальнено оборотних операторів.

Для топологічно фредгольмових операторів маємо твердження, яке узагальнює відому лему Е. Шмідта для фредгольмових операторів.

Лема 2.6. *Нехай L — топологічно фредгольмовий оператор. Тоді оператор $\bar{L} = L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_L}$ має обмежений обернений $\bar{L}^{-1}$.*

Доведення. Якщо оператор L — топологічно фредгольмовий, то підпростір $N(L)$ ізоморфний підпростору Y_L і вони мають однакову розмірність. У цьому випадку $\mathcal{P}_{Y_2} \equiv 0$ і $\mathcal{P}_{N_2(L)} \equiv 0$. А отже нуль-простір оператора $\bar{L}$ нульовий, $N(\bar{L}) = \{0\}$, а образ $R(\bar{L})$ оператора $\bar{L}$ співпадає з усім банаховим простором $\mathbf{B}_2$. Таким чином, існують і лівий $\bar{L}_l^{-1}$, і правий $\bar{L}_r^{-1}$ обернені оператори до оператора $\bar{L}$. Отже, існує єдиний обмежений обернений оператор $\bar{L}^{-1}$ до оператора $\bar{L}$.

Зауваження 2.3. *У випадку $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ лема 2.6 переходить у відому лему для звідно оборотних операторів [130, с. 28].*

Зауваження 2.4. *Якщо оператор L — фредгольмовий ($\text{ind } L = 0$, $\mu = \nu \neq \infty$) то лема 2.6 переходить у відому лему Е. Шмідта [53].*

При розгляді топологічно фредгольмових операторів у гільбертових просторах лема 2.6 залишається справедливою, проте завдяки особливій геометрії гільбертових просторів виникає ряд нюансів, які ми і розглянемо.

Нехай $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ лінійний обмежений топологічно фредгольмовий оператор, який діє з гільбертового простору $\mathbf{H}_1$ у гільбертовий простір $\mathbf{H}_2$ і $\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$. Тоді підпростір $N(L)$ лінійно ізоморфний $N(L^*)$.

Внаслідок доповнювальності у гільбертовому просторі будь-якої замкненої множини, будь-який топологічно фредгольмовий оператор є нормально розв'язним. У цьому випадку лема 2.6 формулюється наступним чином.

Лема 2.7. *Нехай $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ — нормально розв'язний оператор, $\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$, ядро $N(L)$ ізоморфне ядру $N(L^*)$. Тоді оператор $\bar{L} = L + \bar{P}_{N(L^*)}$ має обмежений обернений.*

Нехай, крім того, гільбертові простори $\mathbf{H}_1$ та $\mathbf{H}_2$ сепарабельні, $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ — лінійний обмежений нормально розв'язний оператор і $\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$. Оскільки оператор L — лінійний обмежений, а отже замкнений, то підпростори $N(L)$ і $N(L^*)$ замкнені і сепарабельні [201, с. 55]. Отже, $N(L)$ та $N(L^*)$ ізометрично ізоморфні як нескінченновимірні сепарабельні гільбертові простори [21, с. 238].

Таким чином, будь-який нормально розв'язний оператор, який діє у сепарабельних гільбертових просторах є топологічно фредгольмовим.

У цьому випадку в лемі 2.7 вимога ізоморфності підпросторів $N(L)$ та $N(L^*)$ автоматично виконується і вона формулюється так.

Лема 2.8. *Нехай L — нормально розв'язний оператор, який діє з сепарабельного гільбертового простору $\mathbf{H}_1$ у сепарабельний гільбертовий простір $\mathbf{H}_2$. Тоді оператор $\bar{L} = L + \bar{P}_{N(L^*)}$ має обмежений обернений.*

Для n -нормальних операторів лема 2.4 набуває вигляду.

Лема 2.9. *Нехай $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — n -нормальний оператор. Тоді оператор $\bar{L} = L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$ має обмежений лівий обернений*

$$\bar{L}_l^{-1} = (L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1}.$$

Загальний вигляд обернених зліва операторів $\overline{L}_{l_0}^{-1}$ дається формулою

$$\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_2}),$$

де $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_2} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_2$ — довільний нескінченновимірний обмежений проектор.

Доведення. Оскільки нуль-простір $N(L)$ — скінченновимірний, а підпростір Y_L — нескінченновимірний, то $N(L)$ ізоморфний скінченновимірному підпростору $Y_1 \subset Y_L$. Таким чином, виконується умова $N(L) \cong Y_1 \subset Y_L$ леми 2.4. Отже, оператор $\overline{L}$ має обмежений лівий обернений оператор $\overline{L}_l^{-1}$.

Зауваження 2.5. Якщо $\dim \ker L < \dim \ker L^* < \infty$, тобто оператор L — нетеровий від'ємного індексу, то лема 2.9 переходить у лему 3.4 [41, с. 66] при $\mu < \nu$.

Для d -нормальних операторів справедливе наступне твердження.

Лема 2.10. Нехай $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — лінійний обмежений d -нормальний оператор. Тоді оператор $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ має обмежений правий обернений

$$\overline{L}_r^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})_r^{-1}.$$

Загальний вигляд обернених справа операторів $\overline{L}_{r_0}^{-1}$ дається формулою

$$\overline{L}_{r_0}^{-1} = (I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)})\overline{L}_r^{-1},$$

де $\tilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N_2(L)$ — довільний нескінченновимірний обмежений проектор.

Доведення. Оскільки нуль-простір Y_L — скінченновимірний, а підпростір $N(L)$ — нескінченновимірний, то Y_L ізоморфний скінченновимірному підпростору $N_1(L) \subset N(L)$. Таким чином, виконується умова $N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L$ леми 2.4. Отже, оператор $\overline{L}$ має обмежений правий обернений оператор $\overline{L}_r^{-1}$.

Зауваження 2.6. Якщо оператор L – нетеровий додатнього індексу ($\dim \ker L^* < \dim \ker L < \infty$), то лема 2.10 переходить у лему 3.4 [41, с. 66] при $\nu < \mu$.

2.3. Узагальнення теорем С. М. Нікольського та Ф. В. Аткинсона на випадок узагальнено оборотних операторів

Розглянемо деякі співвідношення, що зв'язують проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{Y_L}$, лінійні оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}$, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ та лінійні обмежені оператори $\overline{L}_{l,r}^{-1}$.

Лема 2.11. Оператор $\overline{L}_{l,r}^{-1}$ задовольняє співвідношенням

$$\begin{aligned} (a1) \quad & \overline{L}_{l,r}^{-1} \overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = \mathcal{P}_{N(L)}, \\ (a2) \quad & \overline{\mathcal{P}}_{Y_L} \overline{L}_{l,r}^{-1} = \mathcal{P}_{Y_L}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Доведення. Нехай для визначеності підпростір $N(L)$ ізоморфний підпростору $Y_1 \subset Y_L \subset \mathbf{B}_2$. Тоді $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$, існує лівий обернений оператор $\overline{L}_l^{-1}$ і виконуються співвідношення [68]

$$\begin{aligned} \overline{L}_l^{-1} \overline{L} &= I_{\mathbf{B}_1}, \\ \overline{L} \overline{L}_l^{-1} &= I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}, \end{aligned}$$

де $I_{\mathbf{B}_1}$, $I_{\mathbf{B}_2}$ – тотожні оператори, відповідно, у просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$, $\mathcal{P}_{Y_2} = \mathcal{P}_{Y_L} - \mathcal{P}_{Y_1}$ – обмежений проектор.

Оскільки $L\mathcal{P}_{N(L)} = 0$ та $\mathcal{P}_{Y_2}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = 0$ і за властивістю (a1) леми 2.1 $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$, то застосувавши оператор $\overline{L}$ зліва до співвідношення (a1) з (2.25), отримаємо тотожність

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} &= (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2})\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{L}\overline{L}_l^{-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv \\ &\equiv \overline{L}\mathcal{P}_{N(L)} = L\mathcal{P}_{N(L)} + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}, \end{aligned}$$

з якої маємо рівність (a1) з (2.25).

Оскільки за властивістю (a1) леми 2.1 маємо, що $\mathcal{P}_{Y_L} \bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$ та $\mathcal{P}_{Y_L} L = 0$, то застосувавши оператор $\bar{L}$ справа до співвідношення (a2) (2.25), отримаємо тотожність

$$\bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = \bar{\mathcal{P}}_{Y_1} \bar{L}_l^{-1} \bar{L} \equiv \mathcal{P}_{Y_L} \bar{L} = \mathcal{P}_{Y_L} L + \mathcal{P}_{Y_L} \bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = \bar{\mathcal{P}}_{Y_1},$$

яка доводить рівність (a2) з (2.25).

Для випадку, коли підпростір Y_L ізоморфний підпростору $N_1(L) \subset N(L) \subset \mathbf{B}_1$ та існує правий обернений оператор $\bar{L}_r^{-1}$ лема доводиться аналогічно.

Лема 2.12. *Оператор $\bar{L}_{l,r}^{-1}$ задовольняє співвідношенням*

$$\begin{aligned} (a1) \quad \mathcal{P}_{N(L)} \bar{L}_{l,r}^{-1} &= \bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, \quad (a2) \quad L \bar{L}_{l,r}^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L}, \\ (a3) \quad \bar{L}_{l,r}^{-1} \mathcal{P}_{Y_L} &= \bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, \quad (a4) \quad \bar{L}_{l,r}^{-1} L = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Доведення. З означення правого оберненого оператора $\bar{L}_r^{-1}$ маємо, що [68]:

$$\begin{aligned} \bar{L} \bar{L}_r^{-1} &= I_{\mathbf{B}_2}, \\ \bar{L}_r^{-1} \bar{L} &= I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)}, \end{aligned}$$

де $\mathcal{P}_{N_2(L)} = \mathcal{P}_{N(L)} - \mathcal{P}_{N_1(L)}$ — обмежений проектор.

А якщо існує лівий обернений оператор $\bar{L}_l^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \bar{L} \bar{L}_l^{-1} &= I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}, \\ \bar{L}_l^{-1} \bar{L} &= I_{\mathbf{B}_1}, \end{aligned}$$

де $\mathcal{P}_{Y_2} = \mathcal{P}_{Y_L} - \mathcal{P}_{Y_1}$ — обмежений проектор.

Оскільки, $\bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)} L = 0$, $\bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)} \bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = \mathcal{P}_{N_1(L)}$ та $\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{P}_{N_2(L)} = \mathcal{P}_{N_2(L)}$, $N_2(L) \subset N(L)$ [201, с. 106], то застосувавши справа оператор $L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$ до

обох частин рівності (a1) з (2.26), отримаємо тотожність:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{N_1(L)} &= \mathcal{P}_{N(L)} - \mathcal{P}_{N_2(L)} = \mathcal{P}_{N(L)}(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)}) = \mathcal{P}_{N(L)}\bar{L}_{l,r}^{-1}\bar{L} \equiv \\ &\bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)}(L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}) = \bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)}L + \bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)}\bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = \mathcal{P}_{N_1(L)},\end{aligned}$$

яка доводить це співвідношення.

Оскільки, за лемою 2.1, $\mathcal{P}_{Y_L}\bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$ і $\mathcal{P}_{Y_L}Lx = 0$, то, застосувавши справа оператор $L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$ до обох частин рівності (a2) з (2.26), отримаємо тотожність, яка доводить це співвідношення:

$$\begin{aligned}L &= L(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)}) = L\bar{L}_{l,r}^{-1}\bar{L} \equiv (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L})(L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}) = L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1} - \\ &- \mathcal{P}_{Y_L}L - \mathcal{P}_{Y_L}\bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1} - \bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = L.\end{aligned}$$

Оскільки, $\mathcal{P}_{Y_L}^2 = \mathcal{P}_{Y_L}$ і $L\bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = 0$, то, застосувавши зліва оператор L до обох частин рівності (a3) і використавши співвідношення (a2), отримаємо тотожність:

$$0 = (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L})\mathcal{P}_{Y_L} = L\bar{L}_{l,r}^{-1}\mathcal{P}_{Y_L} \equiv L\bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = 0,$$

яка доводить співвідношення (a3).

Застосувавши справа оператор $\bar{L}_{l,r}^{-1}$ до обох частин рівності (a4) і використавши властивості (a1)–(a3) леми 2.12, отримаємо тотожність, яка доводить це співвідношення:

$$\begin{aligned}\bar{L}_{l,r}^{-1} - \bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)} &= \bar{L}_{l,r}^{-1}I_{\mathbf{B}_2} - \bar{L}_{l,r}^{-1}\mathcal{P}_{Y_L} = \bar{L}_{l,r}^{-1}L\bar{L}_{l,r}^{-1} \equiv \\ &-(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)})\bar{L}_{l,r}^{-1} = I_{\mathbf{B}_1}\bar{L}_{l,r}^{-1} - \mathcal{P}_{N(L)}\bar{L}_{l,r}^{-1} = \bar{L}_{l,r}^{-1} - \bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)}.\end{aligned}$$

Лему доведено.

Якщо оператор L — топологічно фредгольмовий, то $\bar{L}_{l,r}^{-1} = \bar{L}^{-1}$ і лема 2.12 формулюється наступним чином:

Лема 2.13. *Оператор $\bar{L}^{-1}$ задовольняє співвідношенням*

$$(a1) \quad \mathcal{P}_{N(L)} \bar{L}^{-1} = \bar{\mathcal{P}}_{N(L)}, \quad (a2) \quad L \bar{L}^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L},$$

$$(a3) \quad \bar{L}^{-1} \mathcal{P}_{Y_L} = \bar{\mathcal{P}}_{N(L)}, \quad (a4) \quad \bar{L}^{-1} L = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}.$$

Використовуючи леми 2.4 і 2.11 доведемо теорему про загальний вигляд топологічно нетерових операторів у банахових просторах.

Теорема 2.1. *Для лінійного обмеженого оператора $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ наступні твердження еквівалентні:*

a1) оператор L – топологічно нетеровий;

a2) оператор L можна представити у вигляді

$$L = F + S,$$

де оператор F має обмежений лівий $F_l^{-1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1$ [правий $F_r^{-1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1$] обернений, а $F_l^{-1} S : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$ та $F F_l^{-1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_2$ [$F_r^{-1} S : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$ та $F_r^{-1} F : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$] – нескінченновимірні обмежені оператори;

a3) оператор L можна представити у вигляді:

$$L = F + S,$$

де оператор F має обмежений лівий $F_l^{-1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1$ [правий $F_r^{-1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1$] обернений, а $S F_l^{-1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_2$ та $F F_l^{-1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_2$ [$S F_r^{-1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_2$ та $F_r^{-1} F : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$] – нескінченновимірні обмежені оператори.

Доведення.

a1) $\implies$ a2). Нехай L – топологічно нетеровий оператор і для визначеності підпростір $N(L)$ ізоморфний підпростору $Y_1 \subset Y_L \subset \mathbf{B}_2$. Як випливає з леми 2.4, його можна представити у вигляді $L = F + S$, якщо в якості F взяти оператор $L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$, який має обмежений лівий обернений,

а оператор S прийняти рівним обмеженому оператору $(-\overline{\mathcal{P}}_{Y_1})$. Тоді за лемами 2.11 та 2.12 оператори $(-F_l^{-1}S)$ та FF_l^{-1} будуть обмеженими як суперпозиції обмежених операторів.

$a2) \implies a1)$. Нехай $L = F + S$ де F має обмежений лівий обернений F_l^{-1} , а $-F_l^{-1}S : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ — обмежений оператор.

Рівняння $Lx = y$ та $F_l^{-1}Lx = x + F_l^{-1}Sx = F_l^{-1}y$ еквівалентні. Розглянемо однорідне рівняння

$$Lx = x + F_l^{-1}Sx = 0 \quad \text{або} \quad x = -F_l^{-1}Sx.$$

Оператор $-F_l^{-1}S$ переводить елементи простору $\mathbf{B}_1$ у себе і є проектором $\mathcal{P}_{N(L)}$ на нуль-простір $N(L)$ оператора L . За умовою теореми оператор $-F_l^{-1}S = \mathcal{P}_{N(L)}$ — обмежений, тому він розбиває простір $\mathbf{B}_1$ у пряму суму замкнених підпросторів

$$\mathbf{B}_1 = N(L) \oplus X_L, \quad (2.27)$$

де $X_L = R(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)})$.

З оборотності оператора $F : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ зліва і обмеженості оператора $F_l^{-1}F$ за лемою 2.11 маємо, що $I_{\mathbf{B}_2} - FF_l^{-1}$ — обмежений проектор [68], а оператор F здійснює взаємно однозначну відповідність просторів $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2 \ominus Y_2$, де $Y_2 = (I_{\mathbf{B}_2} - FF_l^{-1})\mathbf{B}_2$ — доповнювальний підпростір у банаховому просторі $\mathbf{B}_2$. Отже $L = F(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)})$, $R(L) = FR(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)})$, $Y_1 = FN(L)$ і

$$\mathbf{B}_2 \ominus Y_2 = Y_1 \oplus R(L).$$

З останньої рівності маємо

$$\mathbf{B}_2 = Y_1 \oplus Y_2 \oplus R(L) = Y_L \oplus R(L). \quad (2.28)$$

З (2.27) та (2.28) отримаємо топологічну нетеровість оператора L .

$a2) \iff a3)$. Рівносильність тверджень виходить з існування обмеженого лівого оберненого оператора F_l^{-1} , обмеженості оператора FF_l^{-1}

і, як наслідок, обмеженості проектора $\mathcal{P}_{Y_2}$ та рівності

$$\begin{aligned} Lx &= F(I_{\mathbf{B}_1} + F_l^{-1}S)x + \mathcal{P}_{Y_2}Sx = F(I_{\mathbf{B}_1} + F_l^{-1}S)x = \\ &= (I_{\mathbf{B}_2} + SF_l^{-1})Fx = y, \end{aligned}$$

оскільки $FF_l^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}$ і $\mathcal{P}_{Y_2}S = 0$.

Для випадку, коли підпростір Y_1 ізоморфний $N(L)$ теорема доводиться аналогічно.

Теорему доведено.

Як наслідок сформулюємо теорему про загальний вигляд топологічно фредгольмових операторів у банахових просторах, яка узагальнює відому теорему С. М. Нікольського про загальний вигляд фредгольмових операторів.

Теорема 2.2. *Для лінійного обмеженого оператора L наступні твердження еквівалентні:*

- a1) оператор L – топологічно фредгольмовий;*
- a2) оператор L можна представити у вигляді*

$$L = F + S,$$

де оператор F має обмежений обернений $F^{-1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1$, а $F^{-1}S : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ – обмежений оператор;

- a3) оператор L можна представити у вигляді*

$$L = F + S,$$

де оператор F має обмежений обернений $F^{-1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1$, а $SF^{-1} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$ – обмежений оператор.

Доведення. Дійсно, якщо L – топологічно фредгольмовий оператор, то $N_1(L) \equiv N(L)$, $Y_1 \equiv Y_L$ і для оператора F існує і лівий F_l^{-1} , і правий F_r^{-1} оператори, а отже існує обернений оператор F^{-1} .

Далі доведемо теореми про загальний вигляд узагальнено оборотних n - та d -нормальних операторів у банахових просторах, які узагальнюють теорему Ф.В. Аتكінсона для нетерових операторів.

Теорема 2.3. *Нехай L — лінійний обмежений оператор. Для того, щоб оператор $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ був n -нормальним необхідно і достатньо, щоб існували обмежений оператор $U : R(L) \rightarrow \mathbf{B}_1$, скінченновимірний проектор $K_1 : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$, нескінченновимірний обмежений проектор $K_2 : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_2$ такі, що*

$$UL = I_{\mathbf{B}_1} - K_1, \quad (2.29)$$

$$LU = I_{\mathbf{B}_2} - K_2. \quad (2.30)$$

Доведення необхідності. Нехай $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ лінійний обмежений нормально розв'язний n -нормальний оператор з доповнювальним образом $R(L)$. Покажемо, що в якості оператора U можна взяти лівий обернений оператор $\bar{L}_l^{-1}$, в якості K_1 — оператор $\mathcal{P}_{N(L)}$, а в якості K_2 — оператор $\mathcal{P}_{Y_L}$.

За лемою 2.10 лівий обернений оператор $\bar{L}_l^{-1}$ існує, отже [68]

$$\bar{L}_l^{-1} \bar{L} = I_{\mathbf{B}_1}, \quad (2.31)$$

$$\bar{L} \bar{L}_l^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}. \quad (2.32)$$

Далі доведемо співвідношення (2.29), (2.30).

З (2.31), враховуючи співвідношення (a1) леми 2.11 і того, що $\bar{\mathcal{P}}_{Y_L} = \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$, маємо рівність

$$\bar{L}_l^{-1} \bar{L} = \bar{L}_l^{-1} (L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}) = \bar{L}_l^{-1} L + \bar{L}_l^{-1} \bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = \bar{L}_l^{-1} L + \mathcal{P}_{N(L)} = I_{\mathbf{B}_1},$$

з якої отримуємо співвідношення (2.29).

З (2.32), враховуючи співвідношення (a2) леми 2.11 і того, що $\bar{\mathcal{P}}_{Y_L} = \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$, маємо рівність

$$\bar{L} \bar{L}_l^{-1} = (L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1}) \bar{L}_l^{-1} = L \bar{L}_l^{-1} + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1} \bar{L}_l^{-1} = L \bar{L}_l^{-1} + \mathcal{P}_{Y_1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2},$$

з якої, використовуючи рівності (2.4), (2.5), отримуємо співвідношення (2.30).

Доведення достатності. Нехай існують оператор U і проектори K_1 і K_2 , для яких виконуються умови (2.29) і (2.30). Нехай, як і раніше, $U = \bar{L}_l^{-1}$ — лінійний обмежений оператор $K_1 = \mathcal{P}_{N(L)}$ — лінійний скінченновимірний проектор $K_2 = \mathcal{P}_Y$ — нескінченновимірний лінійний обмежений проектор.

Розглянемо рівняння $Lx = 0$. Застосувавши до нього оператор U зліва, враховуючи (2.29), отримаємо:

$$\bar{L}_l^{-1} Lx = (I_{\mathbf{B}_1} - K_1)x = 0.$$

Оскільки $x = K_1x$, то K_1 — проектор. В якості K_1 — візьмемо μ -вимірний проектор $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\dim R(\mathcal{P}_{N(L)}) = \mu$. У цьому випадку рівняння $Lx = 0$ має розв'язок $x = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x}$, де $\hat{x}$ — довільний елемент простору $\mathbf{B}_1$. Оскільки, $\dim \mathcal{P}_{N(L)} = \mu$, то $\dim N(L) = \mu < \infty$.

Далі розглянемо неоднорідне рівняння $Lx = y$. Нехай $x = Uz$. Тоді з рівності (2.30) маємо:

$$L\bar{L}_l^{-1}z = (I_{\mathbf{B}_2} - K_2)z = y. \quad (2.33)$$

За умовою теореми K_2 — нескінченновимірний обмежений проектор. В якості K_2 візьмемо нескінченновимірний обмежений проектор $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$, де підпростір Y_L — доповнювальний у банаховому просторі $\mathbf{B}_2$. Оскільки, підпростір Y_L ізоморфний підпростору $N(L^*)$, то $\dim N(L^*) = \infty$, а це означає, що оператор $L \in n$ -нормальним.

Тоді,

$$(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L})z = y. \quad (2.34)$$

Застосувавши до обох частин рівності (2.34) проектор $\mathcal{P}_{Y_L}$ ($\mathcal{P}_{Y_L}^2 = \mathcal{P}_{Y_L}$) отримаємо необхідну і достатню умову розв'язності рівняння (2.33) $\mathcal{P}_{Y_L}y = 0$. Якщо ця умова виконується, то знайдеться z_0 таке, що $y = (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L})z_0$ і неоднорідне рівняння $Lx = y$ має розв'язок $x = \bar{L}_l^{-1}z_0$. Теорему доведено.

Зауваження 2.7. Якщо $\dimker L^* < \infty$, $(\dimker L \neq \dimker L^*)$, то оператор L — нетеровий. Тоді теорема 2.3 переходить у теорему Ф. В. Аткинсона [10].

Далі сформулюємо теорему про загальний вигляд d -нормальних операторів.

Теорема 2.4. Нехай $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ — лінійний обмежений оператор. Для того, щоб оператор $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ був d -нормальним необхідно і достатньо, щоб існували обмежений оператор $U : R(L) \rightarrow \mathbf{B}_1$, нескінченновимірний обмежений проектор $K_1 : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$, скінченновимірний проектор $K_2 : \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_2$ такі, що

$$UL = I_{\mathbf{B}_1} - K_1$$

$$LU = I_{\mathbf{B}_2} - K_2$$

Доведення теорема аналогічне доведенню теорема 2.3.

Зауваження 2.8. Якщо $\dimker L < \infty$, $(\dimker L \neq \dimker L^*)$, то оператор L — нетеровий. Тоді теорема 2.4 переходить у теорему Ф. В. Аткинсона [10].

Висновки до другого розділу

При побудові узагальнено-обернених операторів до нормально розв'язних класична конструкція Е. Шмідта застосовна лише для фредгольмових операторів, тому у другому розділі доведено леми, які аналогічні лемі Е. Шмідта, для кожного з класів узагальнено оборотних операторів і на їх основі доведено теореми про загальний вигляд цих операторів у банахових просторах. У цьому розділі:

1. Доведено аналог лемі Е. Шмідта для топологічно нетерових операторів у банахових просторах. Встановлено загальний вигляд лівих та правих обернених операторів до оператора $L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$.
2. Доведено теорему про загальний вигляд топологічно нетерових операторів у банахових просторах, яка узагальнює теорему Ф. В. Аتكінсона.
3. Доведено аналог лемі Е. Шмідта для топологічно фредгольмових операторів у банахових просторах.
4. Доведено теорему про загальний вигляд топологічно фредгольмових операторів у банахових просторах, яка узагальнює теорему С. М. Нікольського.
5. Доведено леми, які є узагальненнями лемі Е. Шмідта для n -нормальних та d -нормальних операторів у банахових просторах. Встановлено загальний вигляд лівих та правих обернених операторів до оператора $L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$.
6. Доведено теореми про загальний вигляд узагальнено оборотних n -нормальних та d -нормальних операторів у банахових просторах, які узагальнюють теорему Ф. В. Аتكінсона.

РОЗДІЛ 3

УЗАГАЛЬНЕНЕ ОБЕРНЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ

Найбільш повно вивчений і широко застосовується спосіб узагальненого обернення нормально розв'язних операторів, які є фредгольмовими (з ненульовими ядрами) – так звана конструкція Шмідта [53], яка ґрунтується на відомій лемі Е. Шмідта [273]. Проте ця конструкція не може бути застосована для інших класів узагальнено оборотних операторів.

У цьому розділі з використанням доведених у другому розділі лем, які узагальнюють лему Е. Шмідта на випадок різних класів узагальнено оборотних операторів, отримано конструкції обмежених узагальнено-обернених операторів L^- , які узагальнюють відому конструкцію Е. Шмідта [53].

Завдяки більш досконалій геометрії гільбертових просторів отримано більш глибокі результати по узагальненому оберненню нормально розв'язних операторів у гільбертових просторах — з множини узагальнено-обернених операторів виділено єдиний псевдообернений L^+ оператор [169], [237], [246], [252]. Цей оператор має чудові властивості, зокрема, мінімізує норму нев'язки неоднорідного операторного рівняння $Lx = y$ і його спряженого $L^*g = h$. Однак, ці мінімуми можуть досягатися за допомогою, так званих, односторонньо псевдообернених, конструкції яких наводяться у цьому розділі.

Розглянуті в загальному вигляді способи побудови узагальнено-обернених та псевдообернених операторів у функціональних просторах застосовано до узагальненого обернення інтегральних операторів Фред-

гольма з виродженим ядром, які діють у банахових та гільбертових просторах.

3.1. Узагальнене обернення операторів у банахових просторах

Використовуючи твердження, що узагальнюють відому лему Е. Шмідта на випадок узагальнено оборотних операторів, які доведені у другому розділі, розглянемо загальні підходи до побудови узагальнено-обернених та псевдообернених операторів у банахових та гільбертових просторах.

3.1.1. Узагальнено-обернені оператори до нормально розв'язних. Використовуючи лему 2.4, отримаємо конструкцію узагальнено-оберненого оператора до нормально розв'язного оператора, який є топологічно нетеровим.

Розглянемо $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ — лінійний обмежений топологічно нетеровий оператор. Тоді існують нескінченновимірні обмежені проектори [166] $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y \subset \mathbf{B}_2$ і нескінченновимірні обмежені оператори $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} : \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_1 \subseteq Y$, $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_2 \rightarrow N_1(L) \subseteq N(L)$. Якщо $N(L) \cong Y_1 \subset Y_L$, то $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$, а якщо $N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L$, то $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$.

Теорема 3.1. *Нехай L — лінійний обмежений топологічно нетеровий оператор і виконується одна з умов (2.3) або (2.6).*

Тоді оператор

$$L^- = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_{l,r}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} =$$

$$= \begin{cases} (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}, & \text{якщо } N(L) \cong Y_1 \subset Y_L, \\ (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})_r^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, & \text{якщо } N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L \end{cases}$$

є обмеженим узагальнено-оберненим до оператора L .

Загальний вигляд обмежених узагальнено-обернених операторів L_0^- до топологічно нетерового оператора L дається формулою

$$L_0^- = (I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_L}), \quad (3.1)$$

де $\tilde{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ і $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$ — довільні нескінченновимірні обмежені проектори.

Доведення. Для доведення теореми необхідно та достатньо показати, що L^- задовольняє властивостям (1.10), що визначають узагальнено-обернений оператор. Оскільки друга властивість (1.10) є наслідком першої, то достатньо перевірити властивість:

$$L = LL^-L.$$

Нехай для визначеності $N(L) \cong Y_1 \subset Y_L$. Тоді за лемою 2.4 до оператора $\bar{L}$ існує обмежений лівий обернений $\bar{L}_l^{-1}$.

Доведемо спочатку співвідношення

$$L^-L = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}. \quad (3.2)$$

Використовуючи властивість (a4) з (2.26), отримаємо

$$L^-L = (\bar{L}_l^{-1} - \bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)})L = \bar{L}_l^{-1}L - \bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)}L = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)},$$

оскільки $\bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)}L = 0$.

Враховуючи (3.2), маємо

$$LL^-L = L(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}) = L - L\mathcal{P}_{N(L)} = L,$$

оскільки $L\mathcal{P}_{N(L)} = 0$. Обмеженість оператора L^- виходить з обмеженості оператора $\bar{L}_l^{-1}$ та оператора $\bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)}$.

З теореми 1.19 маємо, що узагальнено-обернені оператори L_0^- в загальному вигляді записуються наступним чином: $L_0^- = \mathcal{P}_1 L^- \mathcal{P}_2$, де довільні проектори $\mathcal{P}_1$ та $\mathcal{P}_2$ задовольняють властивостям $(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_1)\mathbf{B}_1 = N(L)$, а $\mathcal{P}_2\mathbf{B}_2 = R(L)$. В якості цих проекторів можна взяти, відповідно, проектори $I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N(L)}$ та $I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_L}$, де $\tilde{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ — довільний обмежений нескінченновимірний проектор банахового простору $\mathbf{B}_1$ на нуль-простір $N(L)$ оператора L , а $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$ — довільний обмежений нескінченновимірний проектор банахового простору $\mathbf{B}_2$ на підпростір Y_L .

Для випадку, коли $Y_L \cong N_1(L) \subset N(L)$ теорема доводиться аналогічно. Теорему доведено.

Як наслідки з теореми 3.1 сформулюємо без доведення аналогічні твердження для топологічно фредгольмових, n -нормальних з доповнювальним образом, d -нормальних з доповнювальним ядром та нетерових операторів.

Нехай $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — топологічно фредгольмовий оператор. Це означає, що ядро $N(L)$ та образ $R(L)$ доповнювальні в банахових просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$, відповідно, а підпростір $N(L) \subset \mathbf{B}_1$ лінійно ізоморфний підпростору $Y_L \subset \mathbf{B}_2$, $N(L) \cong Y_L$. Тоді існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L) \subset \mathbf{B}_1$, і $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L \subset \mathbf{B}_2$ і обмежені оператори $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_L$ і $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_2 \rightarrow N(L)$.

У параграфі 2.2 доведено існування обмеженого оберненого оператора $\overline{L}^{-1}$ до оператора $\overline{L}$.

Теорема 3.2. *Оператор*

$$L^- = \overline{L}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} \quad (3.3)$$

є обмеженим узагальнено-оберненим до топологічно фредгольмового оператора $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$.

Загальний вигляд узагальнено-обернених операторів L_0^- до топологічно фредгольмового оператора L дається формулою

$$L_0^- = (I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_L}),$$

де $\tilde{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ — та $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$ — довільні нескінченновимірні обмежені проектори.

Зауваження 3.1. Якщо простори $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_2$ мають базиси Шаудера, то проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{Y_L}$ можна побудувати за формулами (2.12), а оператори $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$, $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$ — за формулами (2.15).

Зауваження 3.2. Якщо топологічно фредгольмовий оператор діє в одному і тому ж банаховому просторі, $L : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$, то конструкція (3.3) переходить у відому конструкцію для звідно оборотних операторів [130, с. 28].

Зауваження 3.3. Якщо топологічно фредгольмовий оператор L має скінченновимірні ядро і коядро, то конструкція (3.3) переходить у відому конструкцію Шмідта [53].

Приклад 3.1.

Побудуємо узагальнено-обернений оператор Q^- до топологічно фредгольмового, який заданий матрицею

$$Q = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

і діє з банахового простору $\mathbf{c}$ — обмежених послідовностей $x = \{\xi^{(i)}\}_{i=1}^\infty$, що збіжні до скінченної межі у простір $\mathbf{c}$ таких же послідовностей $y = \{\eta^{(i)}\}_{i=1}^\infty$, $Q : \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c}$.

Покажемо, що оператор Q — обмежений у цьому просторі.

$$\begin{aligned} \|Q\|_{\mathbf{c}} &= \sup_{x \in \mathbf{c}, x \neq 0} \frac{\|Qx\|_{\mathbf{c}}}{\|x\|_{\mathbf{c}}} = \sup_{x \in \mathbf{c}, x \neq 0} \frac{\sup_{i \in N} (|\xi^{(1)} + \xi^{(2)}|, 0, |\xi^{(3)} + \xi^{(4)}|, 0, \dots)}{\sup_{i \in N} |\xi^{(i)}|} \leq \\ &\sup_{x \in \mathbf{c}, x \neq 0} \frac{\sup_{i \in N} (|\xi^{(1)}| + |\xi^{(2)}|, 0, |\xi^{(3)}| + |\xi^{(4)}|, 0, \dots)}{\sup_{i \in N} |\xi^{(i)}|} \leq 2 \frac{\sup_{i \in N} |\xi^{(j)}|}{\sup_{i \in N} |\xi^{(i)}|} = 2, \end{aligned}$$

оскільки $\sup_{i \in N} (|\xi^{(i)}| + |\xi^{(i+1)}|) \leq 2 \sup_{i \in N} (|\xi^{(i)}|, |\xi^{(i+1)}|)$. Таким чином, оператор Q — обмежений. Знайдемо спряжений оператор Q^* до оператора Q . Відомо [118, с. 165], що простір спряжений до банахового простору $\mathbf{c}$ — це простір $\mathbf{l}_1$ числових послідовностей $\varphi = \{\varphi^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, що задовольняють умову $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi^{(i)}| < \infty$. Тому спряжений оператор Q^* діятиме з простору $\mathbf{l}_1$ у простір $\mathbf{l}_1$. Використовуючи той факт, що загальний вигляд функціонала $\varphi = \{\varphi^{(i)}\} \in \mathbf{l}_1$ на елементі $y = \{y^{(i)}\} \in \mathbf{c}$ має вигляд $\varphi(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{(i)} y^{(i)}$ [61, с. 237] за умови, що послідовність $\{\varphi^{(i)}\}$ — обмежена у $\mathbf{l}_1$, знайдемо спряжений матричний оператор Q^* до матричного оператора Q .

За визначенням спряженого оператора маємо:

$$\begin{aligned} \varphi(Qx) &= \varphi(\xi^{(1)} + \xi^{(2)}, 0, \xi^{(2)} + \xi^{(3)}, 0, \xi^{(3)} + \xi^{(4)}, 0, \dots) = \\ &= \varphi^{(1)}\xi^{(1)} + \varphi^{(1)}\xi^{(2)} + \varphi^{(3)}\xi^{(2)} + \varphi^{(3)}\xi^{(3)} + \varphi^{(5)}\xi^{(3)} + \varphi^{(5)}\xi^{(4)} + \dots = \\ &= (Q^*\varphi)(x). \end{aligned}$$

Таким чином, спряжений матричний оператор $Q^* : \mathbf{l}_1 \rightarrow \mathbf{l}_1$ має вигляд:

$$Q^* = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Простори $\mathbf{c}$ та $\mathbf{l}_1$ сепарабельні, тому для операторів Q та Q^* можна побудувати матриці X та Φ , які складені з базисних елементів нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$, відповідно:

$$X = \text{diag} \{X_{4 \times 2}, X_{4 \times 2}, \dots\}, \quad \Phi = \text{diag} \{\Phi_{4 \times 2}, \Phi_{4 \times 2}, \dots\},$$

де

$$X_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо біортогональні матриці: Γ до матриці X , $\Gamma(X) = \Gamma^* X = E_\infty$ та Ψ до матриці Φ , $\Phi(\Psi) = \Phi^* \Psi = E_\infty$

$$\Gamma = \text{diag} \{\Gamma_{4 \times 2}, \Gamma_{4 \times 2}, \dots\}, \quad \Psi = \text{diag} \{\Psi_{4 \times 2}, \Psi_{4 \times 2}, \dots\},$$

де

$$\Gamma_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проектори $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{c} \rightarrow N(Q)$ і $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{c} \rightarrow Y_Q$ будуть мати вигляд:

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = X \Gamma^* = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \Psi \Phi^* = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Проектор $\mathcal{P}_{N(Q)}$ обмежений у просторі $\mathbf{c}$, оскільки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{N(Q)}\|_{\mathbf{c}} &= \sup_{x \in \mathbf{c}, x \neq 0} \frac{\|\mathcal{P}_{N(Q)}x\|_{\mathbf{c}}}{\|x\|_{\mathbf{c}}} = \\ &= \sup_{x \in \mathbf{c}, x \neq 0} \frac{\sup_{i \in N} (|\xi^{(1)}|, |-\xi^{(1)}|, |\xi^{(3)}|, |-\xi^{(3)}|, \dots)}{\sup_{i \in N} |\xi_i|} \leq \frac{\sup_{i \in N} |\xi^{(j)}|}{\sup_{i \in N} |\xi^{(i)}|} = 1, \end{aligned}$$

Аналогічно проектор $\mathcal{P}_{Y_Q}$ теж обмежений у просторі $\mathbf{c}$.

Оскільки проектори $\mathcal{P}_{N(Q)}$ та $\mathcal{P}_{Y_Q}$ обмежені, то підпростори $N(Q)$ та $R(Q)$ доповнювальні у банаховому просторі $\mathbf{c}$.

За формулами (2.15) побудуємо оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} : \mathbf{c} \rightarrow N(Q)$ і $\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q} : \mathbf{c} \rightarrow Y_Q$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} &= X\Phi^* = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \dots \right\}, \\ \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q} &= \Psi\Gamma^* = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, що оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N(Q)}$ і $\overline{\mathcal{P}}_{Y_Q}$ також обмежені у просторі $\mathbf{c}$.

Тоді матричний оператор $\overline{Q}$ матиме вигляд:

$$\overline{Q} = Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

а йому обернений

$$\overline{Q}^{-1} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Отже, обмежений узагальнено-обернений оператор Q^- запишеться у вигляді:

$$Q^- = \overline{Q}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Нехай оператор $L : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ — n -нормальний, $\dim N(L) = \mu < \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$ з доповнювальним у просторі $\mathbf{B}_2$ образом $R(L)$. Тоді він топологічно нетеровий. Для нього виконується умова леми 2.4 $N(L) \cong Y_1 \subset Y_L$ і, як наслідок, існує лівий обернений оператор $\bar{L}_l^{-1}$. У цьому випадку оператори $\bar{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = \bar{\mathcal{P}}_{N(L)}$ та $\bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$ — скінченновимірні, проектор $\mathcal{P}_{N(L)}$ — скінченновимірний, а проектор $\mathcal{P}_{Y_L}$ — обмежений нескінченновимірний.

Теорема 3.3. *Нехай $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — n -нормальний оператор.*

Тоді оператор

$$L^- = \bar{L}_l^{-1} - \bar{\mathcal{P}}_{N(L)} = (L + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1} - \bar{\mathcal{P}}_{N(L)}$$

є обмеженим узагальнено-оберненим до оператора L .

Загальний вигляд обмежених узагальнено-обернених операторів L_0^- до оператора L задається формулою

$$L_0^- = (I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_L}), \quad (3.4)$$

де $\tilde{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ — довільний скінченновимірний проектор, а $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$ — довільний обмежений нескінченновимірний проектор.

Наслідок 3.1. *Якщо $\ker L = \{0\}$, то $\mu = 0$, проектор $\tilde{\mathcal{P}}_{N(L)} = 0$ і оператори $\bar{\mathcal{P}}_{N(L)} = 0$ та $\bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = 0$. Тоді формула (3.4) для представлення узагальнено оберненого оператора до n -нормального набуде вигляду*

$$L_0^- = L_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_L}),$$

де L_l^{-1} — обмежений лівий обернений оператор до оператора L , $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ — довільний нескінченновимірний проектор.

Якщо оператор $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — d -нормальний ($\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \nu < \infty$), то він топологічно нетеровий. Для нього виконується

умова леми 2.4 $Y_L \cong N_1(L) \subset N(L)$, внаслідок якої існує правий обернений оператор $\overline{L}_r^{-1}$. У цьому випадку оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}$ та $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ — скінченновимірні, проектор $\mathcal{P}_{N(L)}$ — нескінченновимірний, а проектор $\mathcal{P}_{Y_L}$ — скінченновимірний.

Теорема 3.4. *Нехай $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — d -нормальний оператор.*

Тоді оператор

$$L^- = \overline{L}_r^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})_r^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}$$

є обмеженим узагальнено-оберненим до оператора L .

Загальний вигляд обмежених узагальнено-обернених операторів L_0^- до оператора L дається формулою

$$L_0^- = (I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_L}), \quad (3.5)$$

де $\tilde{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ — довільний обмежений нескінченновимірний проектор, а $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$ — довільний скінченновимірний проектор.

Наслідок 3.2. *Якщо $\ker L^* = \{0\}$, то $\nu = 0$, проектор $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_L} = 0$ і оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = 0$ та $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = 0$. Тоді формула (3.5) для представлення узагальнено оберненого оператора до d -нормального набуде вигляду*

$$L_0^- = (I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N(L)})L_r^{-1},$$

де L_r^{-1} — обмежений правий обернений оператор до оператора L , $\tilde{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ — довільний обмежений нескінченновимірний проектор.

Приклад 3.2.

Розглянемо найпростіший випадок n -нормального оператора — оператор, що діє з простору $\mathbf{R}^3$ у гільбертів простір $\mathbf{l}_2$, який заданий

$(\infty \times 3)$ -вимірною матрицею Q .

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \dots \end{pmatrix}^T$$

Очевидно, що елементи q_{ij} матриці Q задовольняють співвідношенню [61]:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 a_{ij} = 2 < \infty.$$

Тому оператор Q є лінійним обмеженим оператором. Побудуємо для нього узагальнено-обернений оператор Q^- .

Нуль-простір $N(L)$ має два лінійно-незалежних базисних вектора, а нуль-простір $N(L^*)$ має зліченну кількість лінійно-незалежних базисних векторів.

Позначимо матриці

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Матриці Γ^* і Ψ (2.11), що складені з біортогональних функціоналів γ_j та біортогональних векторів ψ_k , будуть відповідно, мати вигляд

$$\Gamma^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\Gamma(X) = \Gamma^* X = E_2, \quad \Phi(\Psi) = \Phi^* \Psi = E_\infty$$

Тоді оператори проектування $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{R}^3 \rightarrow N(Q)$ та $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{l}_2 \rightarrow Y_Q$ побудовані за формулою (2.12) набудуть вигляду:

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = X\Gamma^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \Psi\Phi^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що проектори $\mathcal{P}_{N(Q)}$ та $\mathcal{P}_{Y_Q}$ — обмежені, а оператор Q — узагальнено оборотний.

Оскільки розмірність нуль-простору $N(Q)$ оператора Q дорівнює двом, то визначимо матриці

$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}^*$$

$$\bar{\Phi}^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Тоді оператори $\bar{\mathcal{P}}_{Y_1}$, $\bar{\mathcal{P}}_{N(Q)}$ наберуть вигляду:

$$\bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = \bar{\Psi} \Gamma^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{P}}_{N(Q)} = X \bar{\Phi}^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -2 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Побудуємо оператор $\bar{Q}$:

$$\bar{Q} = Q + \bar{\mathcal{P}}_{Y_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Один з лівих обернених операторів $\bar{Q}_l^{-1}$ до оператора $\bar{Q}$ має вигляд:

$$\bar{Q}_l^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти загальний вигляд лівих обернених операторів $\overline{Q}_l^{-1}$ у вибраному базисі, побудуємо проектор $I_{\mathbf{l}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}$. За формулою (2.16) маємо

$$\mathcal{P}_{Y_1} = \overline{\Psi} \overline{\Phi}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Тоді, оскільки $\mathcal{P}_{Y_2} = \mathcal{P}_Y - \mathcal{P}_{Y_1}$, то

$$I_{\mathbf{l}_2} - \mathcal{P}_{Y_2} = I_{\mathbf{l}_2} - \mathcal{P}_Y + \mathcal{P}_{Y_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Загальний вигляд лівого оберненого оператора $\overline{Q}_l^{-1}$ у вибраному базисі буде:

$$\overline{Q}_l^{-1} = \overline{Q}_l^{-1}(I_{\mathbf{l}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

За теоремою 3.3 обмежений узагальнено-обернений оператор Q^- до n -нормального оператора Q матиме вигляд:

$$Q^- = \overline{Q}_l^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(Q)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Нехай оператор L — нетеровий, $\dim N(L) = \mu < \infty$, $\dim N(L^*) = \nu < \infty$, $\mu \neq \nu$. Оскільки нуль-простори $N(L)$ та Y_L нетерівського оператора L скінченновимірні, а отже доповнювальні у банахових просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$, відповідно, то він — топологічно нетеровий. Якщо $\mu \leq \nu$, то виконується умова $N(L) \cong Y_1 \subset Y_L$ леми 2.4, а отже існує лівий обернений оператор $\overline{L}_l^{-1}$. А якщо $\mu \geq \nu$, то виконується умова $N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L$ леми 2.4, а отже існує правий обернений оператор $\overline{L}_r^{-1}$.

У цьому випадку оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ — та проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{Y_L}$ — скінченновимірні.

Теорема 3.5. *Нехай L — лінійний обмежений нетеровий оператор. Тоді оператор*

$$L^- = \overline{L}_{l,r}^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = \begin{cases} (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}, & \text{якщо } \mu \leq \nu, \\ (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})_r^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, & \text{якщо } \mu \geq \nu \end{cases} \quad (3.6)$$

є обмеженим узагальнено-оберненим до оператора L .

Загальний вигляд узагальнено-обернених операторів L_0^- до оператора L дається формулою

$$L_0^- = (I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_L}),$$

де $\tilde{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ і $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$ — довільні скінченновимірні проектори.

Наведена вище теорема доповнює теорему 2.2 з [34, с. 53].

Наслідок 3.3. *Нехай оператор L — нетеровий і $\dim N(L) = \{0\}$. Тоді оператор*

$$L_0^- = L_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_L})$$

є обмеженням узагальнено-оберненим до лінійного обмеженого нетерового оператора L , $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_L$ — довільний скінченновимірний проектор.

Дійсно, оскільки $\dim N(L) = \{0\}$, то проектор $\mathcal{P}_{N(L)} = 0$, оператори $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = 0$ і $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = 0$.

Наслідок 3.4. *Нехай оператор L — нетеровий $\dim Y_L = 0$. Тоді оператор*

$$L_0^- = (I_{\mathbf{B}_1} - \tilde{\mathcal{P}}_{N(L)})L_r^{-1}$$

є обмеженням узагальнено-оберненим до лінійного обмеженого нетерового оператора L , $\tilde{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(L)$ — довільний скінченновимірний проектор.

Дійсно, оскільки $\dim Y_L = \{0\}$, то проектор $\mathcal{P}_{Y_L} = 0$, оператори $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = 0$ і $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = 0$.

Зауваження 3.4. *У випадку, коли оператор L — фредгольмовий, то до оператора $\overline{L}$ існує обернений $\overline{L}^{-1}$, $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ і формула (3.6) переходить у відому конструкцію Е. Шмідта для побудови узагальнено оберненого оператора до фредгольмового [53].*

3.1.2. Побудова проекторів у загальному вигляді. Проектори $\tilde{\mathcal{P}}_{N(L)}$ і $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_L}$, про які йшла мова вище з використанням леми Собчика 1.4 можна побудувати в загальному вигляді.

Згідно цієї леми

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}(I_{\mathbf{B}} + J + H) \quad (3.7)$$

де $I_{\mathbf{B}}$ — тотожний оператор у просторі $\mathbf{B}$, J — інволюція ($J^2 = I_{\mathbf{B}}$), а H — довільне неперервне відображення з $\mathbf{B}$ у $\mathbf{B}$, яке задовольняє умовам

$$\begin{aligned} 1. \quad JH &= H, \\ 2. \quad HJ &= -H. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Інволюцію обчислимо за формулою

$$J = \mathcal{P} - \mathcal{Q},$$

де $\mathcal{Q} = I_{\mathbf{B}} - \mathcal{P}$, а відображення H знайдемо з умов (3.8).

З першої умови (3.8) маємо рівність $(J - I_{\mathbf{B}})H = 0$, з якої після перетворень отримаємо

$$\mathcal{Q}H = 0. \tag{3.9}$$

З (3.9) маємо, що $H \in N(\mathcal{Q})$. Оскільки $N(\mathcal{Q}) = R(\mathcal{P})$, то

$$H = \mathcal{P}C \tag{3.10}$$

де C — матриця з довільними сталими компонентами.

З другої умови (3.8) маємо $H(J + I_{\mathbf{B}}) = 0$, звідки після перетворень отримаємо

$$H\mathcal{P} = 0. \tag{3.11}$$

Підставляючи у (3.11) замість H його вираз (3.10) отримаємо, що матриця C повинна задовольняти співвідношенню $\mathcal{P}C\mathcal{P} = 0$, з якого знайдемо матрицю $C = C_0$.

Знайшовши C_0 , за формулою (3.10) знайдемо $H = \mathcal{P}C_0$.

Приклад 3.3.

Побудуємо в загальному вигляді узагальнено-обернену матрицю до прямокутної — найпростішого випадку нетерового оператора.

Спочатку побудуємо одну з узагальнено-обернених матриць до матриці

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3.$$

Базис нуль-простору $N(Q)$ матриці Q складається з двох лінійно-незалежних векторів

$$f_1 = \text{col } [0 \ 1 \ 0 \ 0], \quad f_2 = \text{col } [0 \ 0 \ 1 \ -1],$$

а базис нуль-простору $N(Q^*)$ спряженої матриці Q^* — з одного вектора

$$\varphi_1 = \text{col } [1 \ -1 \ 0].$$

Матриці X і Γ^* , складені з векторів f_i та їм біортогональних γ_i , $i = 1, 2$ мають вигляд:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \Gamma^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma(X) = \Gamma^* X = E_2.$$

Тоді оператор проектування $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{R}^4 \rightarrow N(Q)$ побудуємо за формулою (2.12):

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = X \Gamma^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4.$$

Матриці Φ^* і Ψ , які складені з базисних векторів φ_s і біортогональних до них векторів ψ_k будуть відповідно, мати вигляд:

$$\Phi^* = [1 \ -1 \ 0]; \quad \Psi = \text{col } [1 \ 0 \ 0]; \quad \Phi(\Psi) = \Phi^*\Psi = 1.$$

Оператор проектування $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{R}^3 \rightarrow Y_Q$ побудуємо за формулою (2.12):

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \Psi\Phi^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3.$$

Оскільки розмірність нуль-простору $N(Q)$ на одиницю більша розмірності нуль-простору $N(Q^*)$, то матриці $\overline{X}$, $\overline{I}$, $\overline{\Phi} = \Phi$, $\overline{\Psi} = \Psi$ матимуть вигляд:

$$\overline{X} = \text{col } [0 \ 1 \ 0 \ 0]; \quad \overline{I}^* = [0 \ 1 \ 0 \ 0];$$

$$\overline{\Phi}^* = [1 \ -1 \ 0]; \quad \overline{\Psi} = \text{col } [1 \ 0 \ 0].$$

Тоді оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(Q)}$ і $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ наберуть вигляду:

$$\overline{\mathcal{P}}_{N_1(Q)} = \overline{X} \overline{\Phi}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\Psi} \overline{I}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далі побудуємо матрицю $\overline{Q}$

$$\overline{Q} = Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $\dim \ker Q > \dim \ker Q^*$, то матриця $\overline{Q}$ має праву обернену, яка визначається неоднозначно. Одна з правих обернених матриць $\overline{Q}_r^{-1}$ має вигляд:

$$\overline{Q}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

За формулою (3.6) одна з узагальнено-обернених матриць Q^- до матриці Q матиме вигляд:

$$Q^- = \overline{Q}_r^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N_1(Q)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Щоб отримати узагальнено-обернену матрицю в загальному вигляді, необхідно побудувати в загальному вигляді проектори $\tilde{\mathcal{P}}_{N(Q)}$ та $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_Q}$.

Для знаходження $\tilde{\mathcal{P}}_{N(Q)}$ позначимо через C — матрицю з довільними сталими компонентами

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи рівняння

$$\mathcal{P}_{N(Q)} C \mathcal{P}_{N(Q)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 0_{4 \times 4},$$

де $0_{4 \times 4}$ — (4×4) -вимірна матриця з нульовими компонентами, знайдемо матрицю C_0 :

$$C = C_0 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{23} \\ c_{31} & 0 & c_{33} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Тоді перетворення $H_{\mathbf{R}^4} : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ матиме вигляд:

$$H_{\mathbf{R}^4} = \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{23} \\ c_{31} & 0 & c_{33} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{23} \\ c_{31} & 0 & c_{33} & c_{33} \\ -c_{31} & 0 & -c_{33} & -c_{33} \end{bmatrix}.$$

Інволюцію $J = J_{\mathbf{R}^4}$ знайдемо за формулою

$$J_{\mathbf{R}^4} = 2\mathcal{P}_{N(Q)} - I_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

За формулою (3.7) запишемо загальний вигляд проектора $\tilde{\mathcal{P}}_{N(Q)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{N(Q)} &= \frac{1}{2}(I_4 + J_{\mathbf{R}^4} + H_{\mathbf{R}^4}) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{23} \\ c_{31} & 0 & c_{33} & c_{33} \\ -c_{41} & 0 & -c_{43} & -c_{43} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_{21}}{2} & 1 & \frac{c_{23}}{2} & \frac{c_{23}}{2} \\ \frac{c_{31}}{2} & 0 & 1 + \frac{c_{33}}{2} & \frac{c_{33}}{2} \\ \frac{-c_{31}}{2} & 0 & -1 - \frac{c_{33}}{2} & \frac{-c_{33}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Провівши аналогічні обчислення, побудуємо у загальному вигляді проектор $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_Q}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{Y_Q} &= \frac{1}{2}(I_3 + J_{\mathbf{R}^3} + H_{\mathbf{R}^3}) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & d_{11} + d_{12} & d_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2+d_{11}+d_{12}}{2} & \frac{d_{13}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тепер, використовуючи побудовані проектори $\tilde{\mathcal{P}}_{N(Q)}$ і $\tilde{\mathcal{P}}_{Y_Q}$, за формулою (3.1) запишемо узагальнено-обернену Q_0^- матрицю в загальному вигляді:

$$Q_0^- = (I_4 - \tilde{\mathcal{P}}_{N(Q)}) Q^- (I_3 - \tilde{\mathcal{P}}_{Y_Q}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_{21}}{2} & 0 & -\frac{c_{23}}{2} & -\frac{c_{23}}{2} \\ -\frac{c_{31}}{2} & 0 & -\frac{c_{33}}{2} & -\frac{c_{33}}{2} \\ \frac{c_{31}}{2} & 0 & \frac{2+c_{33}}{2} & \frac{2+c_{33}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2-d_{11}-d_{12}}{2} & -\frac{d_{13}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{c_{21}-c_{23}}{2} & -\frac{c_{23}}{2} \\ 0 & -\frac{c_{31}-c_{33}}{2} & -\frac{c_{33}}{2} \\ 0 & -1 + \frac{c_{31}-c_{33}}{2} & 1 + \frac{c_{33}}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким чином, узагальнено-обернена матриця Q_0^- залежить від чотирьох довільних сталих. Надаючи сталим $c_{21}, c_{23}, c_{31}, c_{33}$ довільні значення, отримаємо множину узагальнено-обернених матриць до матриці Q .

3.2. Псевдообернені оператори до нормально розв'язних у гільбертовому просторі

3.2.1. Лівий (правий) псевдообернені оператори. Далі розглянемо питання про побудову псевдообернених операторів до нормально розв'язних у гільбертовому просторі.

У першому розділі було дане означення оператора L^+ — псевдооберненого до оператора L за Муром–Пенроузом [246], [252]. Згідно з цим означенням псевдообернений до L оператор L^+ задовольняє властивостям:

$$\begin{aligned}
&1. \quad LL^+L = L \\
&2. \quad L^+LL^+ = L^+; \\
&3. \quad (LL^+)^* = LL^+ = I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}; \\
&4. \quad (L^+L)^* = L^+L = I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Такий оператор єдиний [62], [169], [237]. Оскільки норми операторів $P_{N(L)}$ і $P_{N(L^*)}$ дорівнюють одиниці, то з властивостей 3 та 4 маємо, що

розв'язок $x = L^+y$ рівняння $Lx = y$ мінімізує норму нев'язки $\|Lx - y\|_{\mathbf{H}_2} = \|P_{N(L^*)}y\|_{\mathbf{H}_2}$, а розв'язок $f = (L^*)^+g = (L^+)^*g$ спряженого рівняння $L^*f = g$ мінімізує норму нев'язки $\|L^*f - g\|_{\mathbf{H}_1} = \|P_{N(L)}g\|_{\mathbf{H}_1}$, причому ці мінімуми досягаються, завдяки рівності $(L^*)^+ = (L^+)^*$, з допомогою одного і того ж оператора L^+ . Проте, кожен мінімум окремо може досягатися за допомогою різних операторів.

Дамо наступні означення.

Означення 3.1. *Узагальнено-обернений оператор $L^- : \mathbf{H}_2 \rightarrow \mathbf{H}_1$, що задовольняє умовам*

$$\begin{aligned} 1. \quad & LL^-L = L, \\ 2. \quad & L^-LL^- = L^-, \\ 3. \quad & (LL^-)^* = LL^- = I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)} \end{aligned} \tag{3.13}$$

називається правим псевдооберненим оператором до оператора L і позначається L_r^+ .

Означення 3.2. *Узагальнено-обернений оператор $L^- : \mathbf{H}_2 \rightarrow \mathbf{H}_1$, що задовольняє умовам*

$$\begin{aligned} 1. \quad & LL^-L = L, \\ 2. \quad & L^-LL^- = L^-, \\ 3. \quad & (L^-L)^* = L^-L = I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

називається лівим псевдооберненим оператором до оператора L і позначається L_l^+ .

Оператор, який є і лівим і правим псевдооберненим одночасно буде псевдооберненим у сенсі Мура–Пенроуза [246, 252].

Використовуючи лему 2.4 для топологічно нетерових операторів, побудуємо односторонньо псевдообернені оператори.

Теорема 3.6. *Оператор*

$$L_r^+ = \bar{L}_{l,r}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) =$$

$$= \begin{cases} \bar{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}), & \text{якщо } N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*), \\ \bar{L}_r^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}), & \text{якщо } N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*), \end{cases}$$

де $P_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \rightarrow N(L^*)$ — нескінченновимірний ортопроектор, є обмеженим правим псевдооберненим до топологічно нетерового оператора $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$.

Доведення. Перевіримо виконання властивостей (3.13), які визначають правий псевдообернений оператор.

Нехай для визначеності $N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*)$. Це означає, що існує правий обернений оператор $\bar{L}_r^{-1}$.

Спочатку перевіримо властивість 3 з (3.13) для правого псевдооберненого оператора.

$$LL_r^+ = L\bar{L}_r^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = (I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)})(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) =$$

$$= I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)} - P_{N(L^*)} + \mathcal{P}_{N(L^*)}P_{N(L^*)} =$$

$$= I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)} = (I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})^* = (LL_r^+)^*,$$

оскільки із співвідношення (а4) з (2.10) маємо $\mathcal{P}_{N(L^*)}P_{N(L^*)} = \mathcal{P}_{N(L^*)}$.

Далі перевіримо виконання властивостей 1 та 2 з (3.13).

$$LL_r^+L = (I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})L = L - P_{N(L^*)}L = L,$$

оскільки $P_{N(L^*)}L = 0$.

$$L_r^+LL_r^+ = L_r^+(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = L_r^+ - \bar{L}_r^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})P_{N(L^*)} =$$

$$= L_r^+ - \bar{L}_r^{-1}(P_{N(L^*)} - P_{N(L^*)}) = L_r^+$$

оскільки $P_{N(L^*)}^2 = P_{N(L^*)}$.

Легко перевірити, що умова 4 з (3.12) не виконується. Дійсно

$$L_r^+ L = \bar{L}_r^{-1} (I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) L = \bar{L}_r^{-1} L = I_{\mathbf{H}_1} - \mathcal{P}_{N(L)},$$

оскільки з леми 2.12 маємо $\bar{L}_r^{-1} L = I_{\mathbf{H}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}$, де $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N(L)$ — деякий "косий" проектор.

Для випадку $N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*)$ доведення проводиться аналогічно.

Теорема 3.7. *Оператор*

$$L_l^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}) \bar{L}_{l,r}^{-1} =$$

$$= \begin{cases} (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}) \bar{L}_l^{-1}, & \text{якщо } N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*), \\ (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}) \bar{L}_r^{-1}, & \text{якщо } N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*), \end{cases}$$

де $P_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N(L)$ — нескінченновимірний обмежений ортопроектор, є обмеженим лівим псевдооберненням до топологічно нетерового оператора $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$.

Доведення цієї теореми полягає у перевірці властивостей (3.14) і аналогічне доведенню теореми 3.6.

3.2.2. Псевдообернений оператор. Теореми 3.6 і 3.7 дозволяють запропонувати формулу для псевдооберненого оператора до топологічно нетерового у гільбертовому просторі.

Теорема 3.8. *Оператор*

$$L^+ = \begin{cases} (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}) \bar{L}_l^{-1} (I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}), & \text{якщо } N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*), \\ (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}) \bar{L}_r^{-1} (I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}), & \text{якщо } N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*), \end{cases}$$

де $P_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N(L)$ та $P_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \rightarrow N(L^*)$ — нескінченновимірні ортопроектори, є єдиним обмеженим псевдооберненням до нормально розв'язного топологічно нетерового оператора L .

Доведення. Перевіримо властивості 1 – 4 з (3.12), що визначають псевдообернений оператор. Нехай для визначеності $N(L) \cong N_1(L^*) \subset N(L^*)$. З леми 2.4 маємо, що існує лівий обернений оператор $\bar{L}_l^{-1}$.

Оскільки

$$L(I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)}) = L, \quad (I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})L = L, \quad \mathcal{P}_{N(L^*)}L = 0,$$

то маємо рівність, що доводить першу властивість

$$\begin{aligned} LL^+L &= L(I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\bar{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})L = L\bar{L}_l^{-1}L = \\ &= (I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)})L = L. \end{aligned}$$

Оскільки за теоремою 3.6 $\bar{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = L_r^+$, то отримаємо рівність, яка доводить другу властивість

$$\begin{aligned} L^+LL^+ &= L^+L(I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\bar{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = \\ &= L^+L\bar{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = L^+LL_r^+ = L^+(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = L^+. \end{aligned}$$

Перевіримо виконання властивостей 3 та 4:

$$\begin{aligned} LL^+ &= L(I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = LL_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = \\ &= (I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(L^*)})(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)} = (LL^+)^*, \end{aligned}$$

оскільки за лемою 2.3 $\mathcal{P}_{N(L^*)}P_{N(L^*)} = \mathcal{P}_{N(L^*)}$.

$$L^+L = L_l^+(I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L^*)})L = L_l^+L = I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)} = (L^+L)^*,$$

оскільки L_l^+ — лівий псевдообернений оператор.

Для випадку $N(L) \supset N_1(L) \cong N(L^*)$ доведення проводиться аналогічно.

Теорему доведено.

Зауваження 3.5. Якщо $L^- : \mathbf{H}_2 \rightarrow \mathbf{H}_1$ — деякий узагальнено-обернений оператор, що задовольняє властивостям (1.10), то використовуючи конструкцію (3.1) з теореми 3.1, легко довести, що оператор

$$L^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})$$

буде єдиним псевдооберненим оператором до топологічно нетерового оператора $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$.

Як наслідки з теорем 3.6 — 3.8 сформулюємо аналогічні твердження для топологічно фредгольмових, n -, d -нормальних та нетерових операторів.

Нехай $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ — топологічно фредгольмовий оператор $P_{N(L)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N(L)$, $P_{N(L^*)} : \mathbf{H}_2 \rightarrow N(L^*)$ — ортопроектори, а $\bar{L}^{-1}$ — обернений оператор до оператора $L + \bar{\mathcal{P}}_{N(L^*)}$, де $\bar{\mathcal{P}}_{N(L^*)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N(L^*)$ — нескінченновимірний обмежений оператор.

Теорема 3.9. Оператор

$$L_l^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})(L + \bar{\mathcal{P}}_{N(L^*)})^{-1} \quad (3.15)$$

є лівим обмеженим псевдооберненим до топологічно фредгольмового оператора L , де $P_{N(L)}$ — обмежений нескінченновимірний ортопроектор.

Теорема 3.10. Оператор

$$L_r^+ = (L + \bar{\mathcal{P}}_{N(L^*)})^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) \quad (3.16)$$

є правим обмеженим псевдооберненим до топологічно фредгольмового оператора L , де $P_{N(L^*)}$ — обмежений нескінченновимірний ортопроектор.

Теорема 3.11. Оператор

$$L^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})(L + \bar{\mathcal{P}}_{N(L^*)})^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) \quad (3.17)$$

є обмеженим псевдооберненим до топологічно фредгольмового оператора L , де $P_{N(L)}$, $P_{N(L^*)}$ — обмежені нескінченновимірні ортопроектори.

Наслідок 3.5. Якщо $\dimker L = \dimker L^* < \infty$, то з теореми 3.11 маємо твердження для фредгольмових операторів.

Приклад 3.4.

Побудуємо односторонньо псевдообернені та псевдообернений оператори до оператора

$$Q = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

який діє з простору $\mathbf{l}_2$ в $\mathbf{l}_2$.

Оскільки простір $\mathbf{l}_2$, де діє оператор Q — гільбертовий, то можна побудувати лівий Q_l^+ , правий Q_r^+ псевдообернені і псевдообернений Q^+ оператори до оператора $Q : \mathbf{l}_2 \rightarrow \mathbf{l}_2$.

Оператор $\overline{Q} = (Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q})$ матиме вигляд

$$\overline{Q} = (Q + \overline{\mathcal{P}}_{Y_Q}) = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

а йому обернений

$$\overline{Q}^{-1} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Для знаходження лівого, правого псевдообернених та псевдооберненого операторів побудуємо ортопроектори $P_{N(Q)}$, $P_{N(Q^*)}$.

Нуль-простори $N(L)$ та $N(L^*)$ мають системи лінійно-незалежних ортонормованих базисних векторів, які складають матриці X та Φ

$$X = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

$$\Phi = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

За формулами (2.19) побудуємо ортопроектори $P_{N(Q)} : \mathbf{l}_2 \rightarrow N(Q)$ та $P_{N(Q^*)} : \mathbf{l}_2 \rightarrow N(Q^*)$

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = XX^* = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$P_{N(Q^*)} = \Phi\Phi^* = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Далі обчислимо ортопроектори $I_{\mathbf{l}_2} - P_{N(Q)} : \mathbf{l}_2 \rightarrow R(Q^*)$ та $I_{\mathbf{l}_2} - P_{N(Q^*)} : \mathbf{l}_2 \rightarrow R(Q)$

$$I_{\mathbf{l}_2} - P_{N(Q)} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$I_{\mathbf{l}_2} - P_{N(Q^*)} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Тоді за формулою (3.15) теореми 3.9 отримаємо лівий псевдообернений оператор Q_l^+ до оператора Q :

$$Q_l^+ = (I_{\mathbf{l}_2} - P_{N(Q)})\overline{Q}^{-1} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

За формулою (3.16) теореми 3.10 отримаємо правий псевдообернений оператор Q_r^+ до оператора Q :

$$Q_r^+ = \overline{Q}^{-1}(I_{\mathbf{l}_2} - P_{N(Q^*)}) = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

За формулою (3.17) теореми 3.11 побудуємо псевдообернений оператор Q^+ до оператора Q :

$$\begin{aligned} Q^+ &= Q_l^+(I_{\mathbf{l}_2} - P_{N(Q^*)}) = (I_{\mathbf{l}_2} - P_{N(Q)})\overline{Q}^{-1}(I_{\mathbf{l}_2} - P_{N(Q^*)}) = \\ &= \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \dots \right\} \end{aligned}$$

Визначення лінійних операторів $\overline{P}_{N(L^*)}$ та $\overline{P}_{N(L^*)}$ за формулами (2.23) дозволяє запропонувати ще одну конструкцію псевдооберненого оператора топологічно фредгольмового.

Теорема 3.12. *Оператор*

$$L^+ = (L + \overline{P}_{N(L^*)})^{-1} - \overline{P}_{N(L)} \quad (3.18)$$

є обмеженим псевдооберненим до топологічно фредгольмового оператора L .

Доведення. Розкривши дужки у (3.17) отримаємо

$$\begin{aligned} L^+ &= (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\bar{L}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = \bar{L}^{-1} - \\ &- P_{N(L)}\bar{L}^{-1} - \bar{L}^{-1}P_{N(L^*)} + P_{N(L)}\bar{L}^{-1}P_{N(L^*)} = \bar{L}^{-1} - \bar{P}_{N(L)}, \end{aligned}$$

оскільки за лемою 2.12 $P_{N(L)}\bar{L}^{-1} = \bar{P}_{N(L)}$, $\bar{L}^{-1}P_{N(L^*)} = \bar{P}_{N(L)}$, а за лемою 2.1 $\bar{P}_{N(L)}P_{N(L^*)} = \bar{P}_{N(L)}$.

Таким чином, формула (3.18) є "вдосконаленою" конструкцією Шмідта і визначає псевдообернений оператор у випадках, коли оператор L діє у гільбертових просторах, $\dim N(L) = \dim N(L^*) < \infty$ (оператор L — фредгольмовий) або $\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$, $N(L)$ та $N(L^*)$ ізоморфні (оператор L — топологічно фредгольмовий), а оператори $\bar{P}_{N(L^*)}$ та $\bar{P}_{N(L)}$ побудовані за формулами (2.23).

Приклад 3.5.

Побудуємо за формулою (3.18) псевдообернений оператор до оператора

$$Q = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

який діє простору $\mathbf{l}_2$ у себе з попереднього прикладу.

Використовуючи ортонормовані базиси ($\bar{\alpha}^{-1}$ та $\bar{\beta}^{-1}$ — одиничні матриці) нуль-просторів $N(Q)$ та $N(Q^*)$ за формулами (2.23) побудуємо оператори

$$\begin{aligned} \bar{P}_{N(Q^*)} &= \Phi X^* = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \dots \right\}, \\ \bar{P}_{N(Q)} &= X\Phi^* = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

Тоді оператор $\overline{Q} = Q + \overline{P}_{N(Q^*)}$ буде мати вигляд

$$\overline{Q} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & 1 - \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 2 + \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & 1 - \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 2 + \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

а йому обернений — вигляд:

$$\overline{Q}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & -1 + \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -2 + \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 1 + \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & -1 + \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -2 + \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 1 + \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Тоді за формулою (3.18) отримаємо псевдообернений оператор до оператора Q

$$\begin{aligned} Q^+ &= \overline{Q}^{-1} - \overline{P}_{N(Q)} = \\ &= \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \dots \right\} - \\ &= -\text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \dots \right\} = \\ &= \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

Нехай оператор $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ — нормально розв'язний n -нормальний, $\dim N(L) = \mu < \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$.

Оскільки нуль-простір $N(L)$ скінченновимірний, а нуль-простір $N(L^*)$ нескінченновимірний, то ортопроектор $P_{N(L)}$ і оператори $\overline{P}_{N(L)}$ та $\overline{P}_{N(L^*)}$ — скінченновимірні, а ортопроектор $P_{N(L^*)}$ — нескінченновимірний.

Теорема 3.13. *Нехай $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ — лінійний обмежений нормально розв'язний n -нормальний оператор. Тоді оператор*

$$L_l^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\overline{L}_l^{-1} \quad (3.19)$$

є обмеженим лівим псевдооберненням, а оператор

$$L_r^+ = \overline{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) \quad (3.20)$$

обмеженим правим псевдооберненням до n -нормального оператора L , де $P_{N(L)}$ — скінченновимірний ортопроектор, $P_{N(L^)}$ — нескінченновимірний ортопроектор.*

Нехай оператор $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ — нормально розв'язний d -нормальний, $\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \nu < \infty$.

Оскільки нуль-простір $N(L^*)$ скінченновимірний, а нуль-простір $N(L)$ нескінченновимірний, то ортопроектор $P_{N(L^*)}$ і оператори $\overline{P}_{N(L)}$ та $\overline{P}_{N(L^*)}$ — скінченновимірні, а ортопроектор $P_{N(L)}$ — нескінченновимірний.

Теорема 3.14. *Нехай $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$ — лінійний обмежений нормально розв'язний d -нормальний оператор. Тоді оператор*

$$L_l^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\overline{L}_r^{-1}$$

є обмеженим лівим псевдооберненням, а оператор

$$L_r^+ = \overline{L}_r^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})$$

обмеженим правим псевдооберненням до d -нормального оператора L , де $P_{N(L)}$ — нескінченновимірний ортопроектор, $P_{N(L^*)}$ — скінченновимірний ортопроектор.

Теореми 3.13 та 3.14, що дають конструкції односторонньо псевдообернених операторів $L_{l,r}^+$, дозволяють запропонувати формули для обчислення псевдообернених операторів до n - та d -нормальних.

Теорема 3.15. *Оператор*

$$L^+ = L_l^+(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) \quad (3.21)$$

є єдиним обмеженим псевдооберненням до лінійного обмеженого n -нормального оператора L , де $P_{N(L)}$ — скінченновимірний ортопроектор, $P_{N(L^*)}$ — нескінченновимірний ортопроектор.

Теорема 3.16. *Оператор*

$$L^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L_r^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L_r^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)})$$

є єдиним обмеженим псевдооберненням до лінійного обмеженого d -нормального оператора $L \in \mathbf{GI}(1, \mathbf{H}_2)$, де $P_{N(L)}$ — нескінченновимірний ортопроектор, $P_{N(L^*)}$ — скінченновимірний ортопроектор.

Приклад 3.6.

Розглянемо побудову односторонньо псевдообернених і псевдооберненого операторів до оператора

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \dots \end{pmatrix}^T$$

з прикладу 3.3.

Оскільки простори $\mathbf{R}^3$ і $\mathbf{l}_2$, у яких діє оператор Q — гільбертові, то можна побудувати лівий Q_l^+ , правий Q_r^+ псевдообернені і псевдообернений Q^+ оператори до оператора $Q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{l}_2$.

За формулами (2.21) побудуємо ортопроектори $P_{N(Q)} : \mathbf{R}^3 \rightarrow N(Q)$ і $P_{N(Q^*)} : \mathbf{l}_2 \rightarrow N(Q^*)$.

$$P_{N(Q)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$P_{N(Q^*)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{16} & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{13}{16} & 0 & -\frac{3}{32} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{3}{16} & 0 & -\frac{3}{32} & 0 & -\frac{61}{64} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Далі обчислимо проектори $I_{\mathbf{R}^3} - P_{N(Q)} : \mathbf{R}^3 \rightarrow R(Q^*)$ і $I_{\mathbf{l}_2} - P_{N(Q^*)} : \mathbf{l}_2 \rightarrow R(Q)$.

$$I_{\mathbf{R}^3} - P_{N(Q)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad I_{\mathbf{l}_2} - P_{N(Q^*)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \frac{3}{64} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Тоді за формулою (3.19) теореми 3.13 отримаємо лівий псевдообернений оператор Q_l^+ до оператора Q :

$$\begin{aligned} Q_l^+ &= (I_{\mathbf{R}^3} - P_{N(Q)})\overline{Q}_l^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

За формулою (3.20) теореми 3.13 отримаємо правий псевдообернений оператор Q_r^+ до оператора Q :

$$\begin{aligned} Q_r^+ &= \overline{Q}_l^{-1}(I_{\mathbf{I}_2} - P_{N(Q^*)}) = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \frac{3}{64} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

За формулою (3.21) теореми 3.15 побудуємо єдиний псевдообернений оператор Q^+ до оператора Q :

$$Q^+ = Q_l^+(I_{\mathbf{I}_2} - P_{N(Q^*)}) = (I_{\mathbf{R}^3} - P_{N(Q)})\overline{Q}_l^{-1}(I_{\mathbf{I}_2} - P_{N(Q^*)}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \frac{3}{64} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \dots \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Нехай оператор L — нетеровий, $\dim N(L) = \mu < \infty$, $\dim N(L^*) = \nu < \infty$, $\mu \neq \nu$.

Теорема 3.17. *Оператор*

$$L_r^+ = \bar{L}_{l,r}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}) = \begin{cases} \bar{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}), & \text{якщо } \mu \leq \nu, \\ \bar{L}_r^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}), & \text{якщо } \mu \geq \nu \end{cases} \quad (3.22)$$

є обмеженим правим псевдооберненням до лінійного нетероного оператора $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$.

Теорема 3.18. *Оператор*

$$L_l^+ = (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\bar{L}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\bar{L}_l^{-1}, & \text{якщо } \mu \leq \nu, \\ (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})\bar{L}_r^{-1}, & \text{якщо } \mu \geq \nu \end{cases} \quad (3.23)$$

є обмеженим лівим псевдооберненням до лінійного нетероного оператора $L : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_2$.

Теорема 3.19. *Оператор*

$$L^+ = \begin{cases} (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}), & \text{якщо } \mu \leq \nu, \\ (I_{\mathbf{H}_1} - P_{N(L)})L_r^{-1}(I_{\mathbf{H}_2} - P_{N(L^*)}), & \text{якщо } \mu \geq \nu \end{cases} \quad (3.24)$$

є єдиним обмеженим псевдооберненням до лінійного нетерового оператора L .

Доведення. Оскільки нетеровий оператор є топологічно нетеровим, то справедливність теорем 3.17 — 3.19 є наслідками з теорем 3.6 — 3.8, відповідно. Дійсно, якщо $\mu \leq \nu$, то $N(L) \cong Y_1 \subseteq Y_L$, а якщо $\mu \geq \nu$, то $N(L) \supseteq N_1(L) \cong Y_L$.

Приклад 3.7.

Побудуємо односторонньо псевдообернені матриці Q_l^+ , Q_r^+ і псевдообернену матрицю Q^+ до матриці

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3.$$

За формулами (2.21) побудуємо ортопроектори $P_{N(Q)} : \mathbf{R}^4 \rightarrow N(Q)$ та $P_{N(Q^*)} : \mathbf{R}^3 \rightarrow N(Q^*)$

$$P_{N(Q)} = X\alpha^{-1}X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad P_{N(Q^*)} = \Phi\beta^{-1}\Phi^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи праву обернену матрицю Q_r^{-1} , побудовану у прикладі 3.3 та формули (3.22) та (3.23), знайдемо праву та ліву псевдообернені мат-

риці:

$$Q_r^+ = \overline{Q}_r^{-1}(I_3 - P_{N(Q^*)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_l^+ = (I_4 - P_{N(Q)})\overline{Q}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Використовуючи формулу (3.24), побудуємо єдину псевдообернену матрицю Q^+ до матриці Q :

$$Q^+ = (I_4 - P_{N(Q)})Q_r^{-1}(I_3 - P_{N(Q^*)}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Єдиність псевдооберненої матриці наочно можна продемонструвати, якщо у формулу (3.24) замість однієї з узагальнено обернених матриць Q^- підставити узагальнено обернену матрицю Q_0^- з прикладу 3.3, яка побудована в загальному вигляді. Після обчислень отримаємо:

$$Q^+ = (I_4 - P_{N(Q)})Q_0^-(I_3 - P_{N(Q^*)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{c_{21}-c_{23}}{2} & -\frac{c_{23}}{2} \\ 0 & -\frac{c_{31}-c_{33}}{2} & -\frac{c_{33}}{2} \\ 0 & -1 + \frac{c_{31}-c_{33}}{2} & 1 + \frac{c_{33}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Таким чином, у гільбертових просторах з множини узагальнено обернених матриць з допомогою формули (3.24) отримується єдина псевдообернена матриця Q^+ до матриці Q .

3.3. Узагальнено-обернені та псевдообернені оператори до інтегральних операторів Фредгольма

Використовуючи загальні положення по узагальненому та псевдооберненню нормально розв'язних операторів у банахових та гільбертових просторах, які отримані у попередніх параграфах, розглянемо задачі про побудову узагальнено-обернених та псевдообернених операторів до інтегральних операторів Фредгольма з виродженими ядрами у цих просторах.

3.3.1. Узагальнено-обернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у банаховому просторі. Нехай $z(t)$ вектор-функція, яка діє з відрізка $\mathcal{I} = [a, b]$ у дійсний банахів простір $\mathbf{B}_1$, $z(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) := \{z(\cdot) \rightarrow \mathbf{B}_1, \|z\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}\}$, $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахів простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій.

Розглянемо у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ інтегральний оператор Фредгольма з виродженим ядром

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds, \quad (3.25)$$

де оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервні з нормами $|||M||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|M(t)\|_{\mathbf{B}_1} = M_0 < \infty$ та $|||N||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|N(t)\|_{\mathbf{B}_1} = N_0 < \infty$,

Відомо [73, с. 141], що добуток $M(t)x$ сильно неперервної оператор-функції $M(t)$ на елемент $x \in \mathbf{B}_1$ є неперервною вектор-функцією. Тому оператор L діє з банахового простору $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ у $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Позначимо

$$D = I_{\mathbf{B}_1} - A, \quad A = \int_a^b N(s)M(s) ds.$$

банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$ і є обмеженим. Дійсно:

$$\begin{aligned} \|D\| = \|I_{\mathbf{B}_1} - A\| &\leq \|I_{\mathbf{B}_1}\| + \|A\| \leq 1 + \left\| \int_a^b N(t)M(t)dt \right\| \leq \\ &1 + \int_a^b |||N(t)||| |||M(t)||| dt \leq 1 + N_0 M_0 (b - a) < \infty. \end{aligned}$$

Нехай оператор D — узагальнено оборотний. Тоді існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(D)$, $\|\mathcal{P}_{N(D)}\|_{\mathbf{B}_1} = p < \infty$, $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_D$, $\|\mathcal{P}_{Y_D}\|_{\mathbf{B}_1} = p_1 < \infty$ та обмежений узагальнено-обернений оператор D^- , який можна побудувати за формулою (3.3).

Теорема 3.20. *Нехай $D : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$ — обмежений узагальнено оборотний оператор. Тоді інтегральний оператор (3.25) — узагальнено оборотний.*

Доведення. Для доведення узагальненої оборотності інтегрального оператора (3.25) необхідно і достатньо [119, 166] показати, що існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow N(L)$ та $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow Y_L$.

Нехай $D : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$ — обмежений узагальнено оборотний оператор. Покажемо, що оператори

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds, \quad (3.26)$$

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)ds$$

є обмеженими проекторами на нуль-простір $N(L)$ та підпростір Y_L інтегрального оператора (3.25), відповідно.

Доведення проведемо для оператора $\mathcal{P}_{N(L)}$. Спочатку покажемо, що оператор (3.26) задовольняє умову $\mathcal{P}_{N(L)}^2 = \mathcal{P}_{N(L)}$, яка визначає проектор

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{N(L)}^2 z)(t) &= (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(s)\left\{M(s)\mathcal{P}_{N(D)}\times\right. \\ &\times \left.\int_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau\right\}ds = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}A\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau = \\ &= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}[I_{\mathbf{B}_1} - D]\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau = \\ &= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau = (\mathcal{P}_{N(L)}z)(t), \end{aligned}$$

оскільки $\mathcal{P}_{N(D)}^2 = \mathcal{P}_{N(D)}$, а $D\mathcal{P}_{N(D)} = 0$.

Далі покажемо, що проектор $\mathcal{P}_{N(L)}$ — обмежений.

Зважаючи на зроблені вище припущення відносно оператор-функцій $M(t)$, $N(t)$ та проектора $\mathcal{P}_{N(D)}$, доведемо обмеженість проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ у просторі $\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)$

$$\|\mathcal{P}_{N(L)}\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)} = \sup_{z \in \mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1), z \neq 0} \frac{\|\mathcal{P}_{N(L)}z\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{z \in \mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1), z \neq 0} \frac{\|M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds\|_{\mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1)}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1)}} \leq \\
&\leq \sup_{z \in \mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1), z \neq 0} \frac{\|M(t)\| \|\mathcal{P}_{N(D)}\|_{\mathbf{B}_1} \int_a^b \|N(s)\| \|z(s)\|_{\mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1)} ds}{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1)}} \leq \\
&\leq M_0 N_0 p(b-a) \sup_{z \in \mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1), z \neq 0} \frac{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1)}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1)}} \leq M_0 N_0 p(b-a) < \infty.
\end{aligned}$$

Тепер покажемо, що проектор (3.26) є проектором на нуль-простір $N(L)$ оператора L , тобто $L\mathcal{P}_{N(L)} = 0$.

$$\begin{aligned}
(L\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) &= M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds - \\
&- M(t) \int_a^b N(s) \left\{ M(s)\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau \right\} ds = \\
&= M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)A\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds = \\
&= M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)[I_{\mathbf{B}_1} - D]\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds = 0,
\end{aligned}$$

оскільки $A = I_{\mathbf{B}_1} - D$, а $D\mathcal{P}_{N(D)} = 0$.

Доведення того, що оператор

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s)ds$$

є обмеженим проектором на підпростір Y_L проводиться аналогічно попередньому.

Оскільки проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_{Y_L}$ обмежені, то інтегральний оператор (3.25) — узагальнено оборотний [68, 119, 166].

Наступна теорема дає конструкцію узагальнено-оберненого оператора L^- до інтегрального оператора (3.25).

Теорема 3.21. *Нехай $D : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$ — узагальнено оборотний оператор. Тоді оператор*

$$(L^- f)(t) = f(t) + M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds \quad (3.27)$$

є обмеженим узагальнено-оберненим оператором до інтегрального оператора (3.25), де D^- — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора D .

Доведення. Для доведення теореми необхідно і достатньо перевірити співвідношення $LL^-L = L$ [68], якому задовольняє узагальнено-обернений оператор.

Спочатку обчислимо L^-L .

$$\begin{aligned} (L^-Lz)(t) &= z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^- \int_a^b N(\tau) \left\{ z(\tau) - M(\tau) \times \right. \\ &\times \int_a^b N(s)z(s)ds \left. \right\} d\tau = z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^- \int_a^b N(s)z(s)ds - \\ &- M(t)D^- \int_a^b N(\tau)M(\tau)d\tau \int_a^b N(s)z(s)ds = z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds + \\ &+ M(t)D^- \int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)D^- A \int_a^b N(s)z(s)ds = z(t) - M(t) \times \\ &\times \int_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^- [I_{\mathbf{B}_1} - A] \int_a^b N(s)z(s)ds = z(t) - M(t) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_a^b N(s)z(s)ds + M(t)D^-D \int_a^b N(s)z(s)ds = z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds + \\
& + M(t)[I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(D)}] \int_a^b N(s)z(s)ds = z(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds,
\end{aligned}$$

оскільки $D^-D = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(D)}$

Таким чином,

$$(L^-Lz)(t) = z(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds.$$

Далі обчислимо вираз LL^-L .

$$\begin{aligned}
(LL^-Lz)(t) &= z(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds - M(t) \int_a^b N(\tau) \left\{ z(\tau) - \right. \\
& - M(\tau)\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds \left. \right\} d\tau = z(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds - \\
& - M(t) \int_a^b N(\tau)z(\tau)d\tau + M(t)A\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds = \\
& = z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)[I_{\mathbf{B}_1} - A]\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds = \\
& = z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds - M(t)D\mathcal{P}_{N(D)} \int_a^b N(s)z(s)ds = \\
& = z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds = (Lz)(t),
\end{aligned}$$

оскільки $D\mathcal{P}_{N(D)} = 0$.

Таким чином,

$$(LL^{-1}Lz)(t) = (Lz)(t).$$

Обмеженість оператора L^{-1} випливає з обмеженості оператор-функцій $M(t)$, $N(t)$ та оператора D^{-1} .

Теорему доведено.

В деяких випадках для побудови узагальнено-оберненого оператора L^{-1} , до інтегрального оператора (3.25) можна застосувати процедуру, яка описана у теоремі 3.9. Розглянемо її у частинному випадку інтегрального оператора (3.25), коли обмежені оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ — зліченновимірні матриці, вектор-стовпці та вектор-рядки яких належать банаховому простору $\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)$, де $\mathbf{B}_1$ — сепарабельний банаховий простір.

Знайдемо системи лінійно-незалежних розв'язків однорідного рівняння

$$z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds = 0 \quad (3.28)$$

та йому союзного [58, с.287]

$$y(t) - N^*(t) \int_a^b M^*(s)y(s)ds = 0. \quad (3.29)$$

Оскільки розглядається дійсний банаховий простір, то операція спряження ** еквівалентна операції транспонування T . Тому вектор-стовпці та вектор-рядки зліченновимірних матриць $N^*(t)$ та $M^*(t)$, відповідно, належать банаховому простору $\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)$.

Розв'язки рівнянь (3.28) та (3.29) шукатимемо у вигляді:

$$z(t) = M(t)c, \quad (3.30)$$

$$y(t) = N^*(t)d, \quad (3.31)$$

де $c \in \mathbf{B}_1$, $d \in \mathbf{B}_1$.

Підставивши (3.30), (3.31) у (3.28) та (3.29), відповідно, отримаємо операторні рівняння відносно c та d :

$$Dc = 0, \quad D^*d = 0, \quad (3.32)$$

де $D = E_\infty - A$ ($D^* = E_\infty - A^*$), $A = \int_a^b N(t)M(t)dt$. Оператор D — лінійний обмежений оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$, E_∞ — зліченновимірна одинична матриця у просторі $\mathbf{B}_1$.

Як і раніше від оператора D будемо вимагати узагальненої оборотності. Отже, нехай D — узагальнено оборотний оператор. Тоді $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(D)$ та $\mathcal{P}_{N(D^*)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(D^*)$ — обмежені зліченновимірні матриці-проектори на нуль-простори $N(D)$ та $N(D^*)$ матриць D та D^* , відповідно.

Нехай

$$\|\mathcal{P}_{N(D)}\|_{\mathbf{B}_1} = p < \infty, \quad \|\mathcal{P}_{N(D^*)}\|_{\mathbf{B}_1} = p_1 < \infty.$$

Операторні рівняння (3.32) мають ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\mathcal{P}_{N(D)} \neq 0$, що нами і передбачається.

Позначимо через $\mathcal{P}_{N_0(D)}$ звуження оператора $\mathcal{P}_{N(D)}$ на підпростір $N_0(D)$, породжений системою лінійно-незалежних вектор-стовпців матриці-операпроектора $\mathcal{P}_{N(D)}$. Аналогічно позначимо $\mathcal{P}_{N_0(D^*)}$ звуження оператора $\mathcal{P}_{N(D^*)}$ на підпростір $N_0(D^*)$, породжений системою лінійно-незалежних вектор-стовпців матриці-проектора $\mathcal{P}_{N(D^*)}$.

Очевидно, що

$$\|\mathcal{P}_{N_0(D)}\|_{\mathbf{B}_1} \leq p < \infty, \quad \|\mathcal{P}_{N_0(D^*)}\|_{\mathbf{B}_1} \leq p_1 < \infty.$$

Використовуючи оператори $\mathcal{P}_{N_0(D)}$ та $\mathcal{P}_{N_0(D^*)}$, загальні розв'язки рівнянь (3.32) можна представити у вигляді:

$$c = \mathcal{P}_{N_0(D)}c_0, \quad d = \mathcal{P}_{N_0(D^*)}d_0, \quad (3.33)$$

де $c_0 \in N(D_0) \subseteq \mathbf{B}_1$ і $d_0 \in N(D_0^*) \subseteq \mathbf{B}_1$ — довільні сталі вектори.

Підставивши (3.33) у (3.30), (3.31), отримаємо загальні розв'язки однорідних інтегральних рівнянь (3.28) та (3.29)

$$z(t) = X(t)c_0, \quad y(t) = \Phi(t)d_0,$$

де оператор-функції $X(t) = M(t)\mathcal{P}_{N_0(D)}$, $\Phi(t) = N^*(t)\mathcal{P}_{N_0(D^*)}$ є операторами розв'язку однорідних рівнянь (3.28), (3.29), відповідно, стовпці яких — повні системи лінійно-незалежних вектор-функцій і складають базиси нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ операторів L та L^* . Оператор-функції $X(t)$ та $\Phi(t)$ — обмежені, оскільки

$$|||X(t)||| = |||M(t)\mathcal{P}_{N_0(D)}||| \leq |||M(t)||| \|\mathcal{P}_{N_0(D)}\| \leq M_0 p,$$

$$|||\Phi(t)||| = |||N^*(t)\mathcal{P}_{N_0(D^*)}||| \leq |||N^*(t)||| \|\mathcal{P}_{N_0(D^*)}\| \leq N_0 p_1.$$

Для повних систем базисних вектор-стовпців, які складають матриці $X(t)$ та $\Phi(t)$ існують біортогональні системи вектор-стовпців, які складають зліченновимірні матриці $\Gamma(t)$ та $\Psi(t)$ такі, що

$$(\Gamma X)(\cdot) = \int_a^b \Gamma^*(t)X(t)dt = E_\infty, \quad (\Phi\Psi)(\cdot) = \int_a^b \Phi^*(t)\Psi(t)dt = E_\infty, \quad (3.34)$$

де вектор-стовпці $\{\gamma_i(t)\}_{i=1}^\infty$ матриці $\Gamma(t)$ та $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^\infty$ матриці $\Phi(t)$ складаються з неперервних функцій, причому [71, с. 79]

$$\sup_i \|\gamma_i\| = \Gamma_0 < \infty, \quad \sup_j \|\varphi_j\| = \Phi_0 < \infty.$$

За формулами (2.12) побудуємо проектори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow Y_L$, та оператори $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow Y_L$, $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow N(L)$

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = X(t)(\Gamma z)(\cdot) = X(t) \int_a^b \Gamma^*(s)z(s)ds,$$

$$(\mathcal{P}_{Y_L}y)(t) = \Psi(t)(\Phi y)(\cdot) = \Psi(t) \int_a^b \Phi^*(s)y(s)ds,$$

$$(\overline{\mathcal{P}}_{Y_L}z)(t) = \Psi(t)(\Gamma z)(\cdot) = \Psi(t) \int_a^b \Gamma^*(s)z(s)ds,$$

$$(\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}y)(t) = X(t)(\Phi y)(\cdot) = X(t) \int_a^b \Phi^*(s)y(s)ds.$$

Зважаючи на зроблені вище припущення відносно оператор-функцій $M(t)$, $N(t)$ та проекторів $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{Y_L}$, доведемо обмеженість проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ у просторі $\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{N(L)}\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)} &= \sup_{z \in \mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1), z \neq 0} \frac{\|\mathcal{P}_{N(L)}z\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)}} = \\ &= \sup_{z \in \mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1), z \neq 0} \frac{\|X(t) \int_a^b \Gamma(s)z(s)ds\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)}} \leq \\ &\leq \sup_{z \in \mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1), z \neq 0} \frac{\|X(t)\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)} \int_a^b \|\Gamma(s)\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)} \|z(s)\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)} ds}{\|z\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)}} \leq \\ &\leq \sup_{z \in \mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1), z \neq 0} M_0 \Gamma_0 p_0 (b-a) \frac{\|z\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)}}{\|z\|_{\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)}} \leq M_0 \Gamma_0 p_0 (b-a). \end{aligned}$$

Аналогічно показується обмеженість проектора $\mathcal{P}_Y$, операторів $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ та $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$. З обмеженості проекторів $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_Y$ маємо, що нуль-простір $N(L)$ та підпростір Y доповнювальні у просторі $\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)$. Таким чином, оператор L — узагальнено оборотний.

За лемою 2.7 оператор

$$(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})z(t) = z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds + \Psi(t) \int_a^b \Gamma^*(s)z(s)ds$$

має обмежений обернений.

Для знаходження оберненого оператора $(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})^{-1}$ до оператора $(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})$ запишемо його у вигляді:

$$(\overline{L}z)(t) = [(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})z](t) = z(t) - \overline{M}(t) \int_a^b \overline{N}(s)z(s)ds, \quad (3.35)$$

де $\overline{M}(t)$ — оператор-функція, яка складена з елементів оператор-функцій $M(t)$ та $-\Psi(t)$, $\overline{N}(s)$ — оператор-функція, яка складена з елементів оператор-функцій $N(s)$ та $\Gamma^*(s)$.

Обернений оператор до оператора (3.35) можна записати у вигляді

$$z(t) = f(t) + \overline{M}(t)S^{-1} \int_a^b \overline{N}(s)f(s)ds$$

де S^{-1} — оператор, обернений до оператора

$$S = I - B, \quad B = \int_a^b \overline{N}(t)\overline{M}(t)dt.$$

Тоді за теоремою 3.9 маємо, що узагальнено-обернений оператор до оператора L матиме вигляд

$$\begin{aligned} (L^-f)(t) &= ((L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)})f(t) = \\ &= f(t) + \overline{M}(t)S^{-1} \int_a^b \overline{N}(s)f(s)ds - X(t) \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds = \\ &= f(t) + M_1(t) \int_a^b N_1(s)f(s)ds, \end{aligned} \quad (3.36)$$

де $M_1(t)$ — оператор-функція, яка складена з елементів оператор-функцій $\overline{M}(t)S^{-1}$ та $-X(t)$, $N_1(s)$ — оператор-функція, яка складена з елементів оператор-функцій $\overline{N}(s)$ та $\Phi^*(s)$.

Приклад 3.8.

Побудуємо узагальнено-обернений оператор до інтегрального оператора

$$(Lz)(t) = z(t) - M(t) \int_0^1 N(s)z(s)ds, \quad (3.37)$$

де

$$M(t) = \text{diag}\{e^t, e^t, \dots, e^t, e^t, \dots\},$$

$$N(s) = \text{diag}\{s, 0, s, 0, \dots, s, 0, \dots\}$$

— зліченновимірні матриці, які діють з банахового простору $\mathbf{C}([0, 1], \mathbf{c})$ в $\mathbf{C}([0, 1], \mathbf{c})$ з нормами $|||M|||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{t \in [0,1]} \|M(t)\|_{\mathbf{c}}$, $|||N|||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{t \in [0,1]} \|N(t)\|_{\mathbf{c}}$.

Із визначення матриць $M(t)$ та $N(t)$ маємо, що

$$|||M|||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{t \in [0,1], i,j \in \mathbb{N}} |m_{ij}(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |e^t| \leq e,$$

$$|||N|||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{t \in [0,1], i,j \in \mathbb{N}} |n_{ij}(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |t| \leq 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|L\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} &= \sup_{z \in \mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}), z \neq 0} \frac{\|Lz\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} = \\ &= \sup_{z \in \mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}), z \neq 0} \frac{\|z(t) + M(t) \int_0^1 N(s)z(s)ds\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} \leq \\ &\leq \sup_{z \in \mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}), z \neq 0} \left\{ 1 + \frac{\|M(t)\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} \int_0^1 \|N(s)\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} \|z(s)\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} ds}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{z \in \mathbf{C}([0,1], \mathbf{c}), z \neq 0} \frac{(1+e)\|z\|_{\mathbf{C}([0,1], \mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1], \mathbf{c})}} \leq 1+e.$$

Таким чином, оператор L є лінійним обмеженим оператором, який діє з банахового простору неперервних на проміжку $[0, 1]$ функцій $\mathbf{C}([0, 1], \mathbf{c})$ в $\mathbf{C}([0, 1], \mathbf{c})$. Нескінченновимірні підпростори $N(L)$ та Y — ізоморфні як підпростори сепарабельного банахового простору $\mathbf{C}([0, 1], \mathbf{c})$ [201, с. 55].

Для оператора L проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_{Y_L}$ мають вигляд:

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = X(t) \int_0^1 \Gamma^*(s)z(s)ds, \quad (\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = \Psi \int_0^1 \Phi^*(s)f(s)ds,$$

а оператори $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ та $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$ набудуть, відповідно, вигляд:

$$(\overline{\mathcal{P}}_{Y_L}z)(t) = \Psi \int_0^1 \Gamma^*(s)z(s)ds, \quad \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}f(t) = X(t) \int_0^1 \Phi^*(s)f(s)ds,$$

де

$$X(t) = \text{diag} \{ X_{(4 \times 2)}(t), X_{(4 \times 2)}(t), \dots \},$$

$$\Gamma(t) = \text{diag} \{ \Gamma_{(4 \times 2)}(t), \Gamma_{(4 \times 2)}(t), \dots \},$$

$$X_{(4 \times 2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \end{pmatrix}^*, \quad \Gamma_{(4 \times 2)}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}^*,$$

$$\Phi(t) = \text{diag} \{ \Phi_{(4 \times 2)}(t), \Phi_{(4 \times 2)}(t), \dots \},$$

$$\Psi(t) = \text{diag} \{ \Psi_{(4 \times 2)}(t), \Psi_{(4 \times 2)}(t), \dots \},$$

$$\Phi_{(4 \times 2)}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}^*, \quad \Psi_{(4 \times 2)}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^*,$$

$$(\Gamma X)(\cdot) = \int_0^1 \Gamma^*(s)X(s)ds = E_\infty, \quad (\Phi\Psi)(\cdot) = \int_0^1 \Phi^*(s)\Psi ds = E_\infty,$$

E_∞ — нескінченновимірна одинична матриця.

Проекційний оператор $\mathcal{P}_{N(L)}$ — обмежений, оскільки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{N(L)}\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} &= \sup_{z \in \mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}), z \neq 0} \frac{\|\mathcal{P}_{N(L)}z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} = \\ &= \sup_{z \in \mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}), z \neq 0} \frac{\|X(t) \int_0^1 \Gamma(s)z(s)ds\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} \leq \\ &\leq \sup_{z \in \mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}), z \neq 0} \frac{\|X(t)\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} \int_0^1 \|\Gamma(s)\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} \|z(s)\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} ds}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} \leq \\ &\leq \sup_{z \in \mathbf{C}([0,1],\mathbf{c}), z \neq 0} e \frac{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}}{\|z\|_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})}} \leq e. \end{aligned}$$

Аналогічно можна показати обмеженість проектора $\mathcal{P}_Y$, операторів $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ та $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$. З обмеженості проекторів $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_Y$ маємо, що нуль-простір $N(L)$ та підпростір Y доповнювальні у просторі $\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})$. Таким чином, оператор L — узагальнено оборотний.

За лемою 2.6 оператор

$$((L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})z)(t) = z(t) - M(t) \int_0^1 N(s)z(s)ds + \Psi \int_0^1 \Gamma^*(s)z(s)ds =$$

$$= z(t) - \overline{M}(t) \int_0^1 \overline{N}(s) z(s) ds,$$

де

$$\overline{M}(t) = \text{diag} \{ M_{(2 \times 3)}(t), M_{(2 \times 3)}(t), \dots \},$$

$$\overline{N}(s) = \text{diag} \{ N_{(3 \times 2)}(s), N_{(3 \times 2)}(s), \dots \},$$

$$M_{(2 \times 3)}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & -2 \\ 0 & e^t & 0 \end{pmatrix}, \quad N_{(3 \times 2)}(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*$$

має обмежених обернених.

Обернений оператор до оператора $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ має вигляд:

$$((L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})^{-1} f)(t) = f(t) + \overline{M}(t) S^{-1} \int_0^1 \overline{N}(s) f(s) ds,$$

де $S^{-1} = \text{diag} \{ S_{(3 \times 3)}^{-1}, S_{(3 \times 3)}^{-1}, \dots \}$ — оператор обернених до оператора $S = E_\infty - B$,

$$S_{(3 \times 3)}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \int_0^1 \overline{N}(s) \overline{M}(s) ds.$$

Тоді, використовуючи теорему 3.9 отримаємо узагальнено-обернений оператор L^- до оператора (4.24)

$$\begin{aligned} (L^- f)(t) &= ((L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} f)(t) = f(t) + \overline{M}(t) S^{-1} \int_0^1 \overline{N}(s) f(s) ds - \\ &- X(t) \int_0^1 \Phi^*(s) f(s) ds = f(t) + M_1(t) \int_0^1 N_1(s) f(s) ds, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} M_1(t) &= \text{diag} \{ M_{(2 \times 4)}(t), M_{(2 \times 4)}(t), \dots \}, \\ N_1(s) &= \text{diag} \{ N_{(4 \times 2)}(s), N_{(4 \times 2)}(s), \dots \}; \\ M_{(2 \times 4)}(t) &= \begin{pmatrix} 2(e^t - 1) & 0 & -e^t & -e^t \\ 0 & e^t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_{(4 \times 2)}(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & s & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*. \end{aligned}$$

3.3.2. Псевдообернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі.

Нехай $\mathbf{H}_1$ — дійсний гільбертовий простір зі скалярним добутком $(x, y)_{\mathbf{H}_1}$, $x \in \mathbf{H}_1$, $y \in \mathbf{H}_1$, $\mathcal{I}$ — скінченний проміжок, $z(t)$ — функція зі значеннями в гільбертовому просторі $\mathbf{H}_1$, вимірنا у сенсі Бохнера [73], така, що $\int_a^b \|z(t)\|_{\mathbf{H}_1}^2 dt < \infty$. Визначимо на множині таких функцій

скалярний добуток $(z(t), g(t)) = \int_a^b z^*(t)g(t)dt$, де, як і раніше, * — операція транспонування. Визначений таким чином простір буде гільбертовим. Позначимо його $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$. Норма елемента $z(t)$ у цьому просторі визначається через скалярний добуток

$$\|z(t)\|_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)} = \sqrt{(z(t), z(t))_{\mathbf{H}_1}} = \sqrt{\int_a^b \|z(t)\|_{\mathbf{H}_1}^2 dt}.$$

В якості гільбертового простору $\mathbf{H}_1$ може, наприклад, виступати простір $\mathbf{l}_2$ або інший гільбертовий простір.

Розглянемо побудову псевдооберненого оператора до інтегрального оператора

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds, \quad (3.38)$$

де оператор-функції $M(t) = \{m_{ij}(t)\}_{i,j=1}^\infty$ та $N(t) = \{n_{ij}(t)\}_{i,j=1}^\infty$ — зліченновимірні матриці.

Визначимо умови, при яких оператор (3.38) буде діяти з гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ в себе. Для цього на зліченновимірні матриці $M(t)$ та $N(t)$ необхідно накласти деякі обмеження.

Для того, щоб елемент $p(t) = N(t)z(t)$ належав простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ для будь-якого $z(t) = \text{col}\{z_1(t), z_2(t), \dots, z_j(t), \dots\} \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ повинна виконуватись нерівність

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}(t) z_j(t) \right)^2 < \infty. \quad (3.39)$$

Використовуючи нерівність Буняковського, отримаємо

$$\begin{aligned} \|p(t)\|_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)}^2 &= \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} p_i^2(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}(t) z_j(t) \right)^2 dt \leq \\ &\leq \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}(t) \right)^2 dt \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{\infty} z_j(t) \right)^2 dt = \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} n_{ij}(t) \right)^2 dt \|z(t)\|_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)}^2 = N_0^2 \|z(t)\|_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)}^2. \end{aligned}$$

Таким чином, якщо

$$\int_a^b \sum_{i,j=1}^{\infty} n_{ij}^2(t) dt = N_0^2 < \infty, \quad (3.40)$$

то елемент $p(t)$ буде належати простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$.

Отже, доведено, що при виконанні умови (3.40) для будь-якого $z(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ виконується (3.39) і, як наслідок, $p(t)$ належить простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$. Очевидно, що $\int_a^b p(t) dt$ належить простору $\mathbf{H}_1$.

Аналогічно доводиться, що при виконанні умови

$$\int_a^b \sum_{i,j=1}^{\infty} m_{ij}^2(t) dt = M_0^2 < \infty \quad (3.41)$$

вектор-стовпець $M(t) \int_a^b N(t)z(t)dt$ належить простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$.

Таким чином, при виконанні умов (3.40), (3.41) інтегральний оператор (3.38) діє з гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ в $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$.

Теорема 3.22. *Нехай $D : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_1$ — лінійний обмежений нормально розв'язний оператор. Тоді інтегральний оператор $L : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1) \rightarrow \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ (3.38) — нормально розв'язний.*

Доведення. Для доведення необхідно і достатньо показати, що існують ортопроектори $P_{N(L)} : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1) \rightarrow N(L)$ та $P_{N(L^*)} : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1) \rightarrow N(L^*)$.

Позначимо, як і раніше $D = I_{\mathbf{H}_1} - A : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_1$ — лінійний обмежений оператор, де $A = \int_a^b N(t)M(t)dt$. Припустимо, що D — нормально розв'язний оператор. Тоді існують ортопроектори $P_{N(D)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N(D)$ та $P_{N(D^*)} : \mathbf{H}_1 \rightarrow N(D^*)$ на нуль-простори $N(D)$ та $N(D^*)$ операторів D та йому спряженого D^* , $P_{N(D)}^2 = P_{N(D)}$, $P_{N(D)}^* = P_{N(D)}$, $P_{N(D^*)}^2 = P_{N(D^*)}$, $P_{N(D^*)}^* = P_{N(D^*)}$.

Позначимо через $P_{N_0(D)}$ звуження оператора $P_{N(D)}$ на підпростір $N_0(D)$, породжений системою лінійно-незалежних вектор-стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(D)}$. Аналогічно позначимо $P_{N_0(D^*)}$ звуження оператора $P_{N(D^*)}$ на підпростір $N_0(D^*)$, породжений системою лінійно-незалежних вектор-стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(D^*)}$.

Тоді, як показано у підрозділі 3.3.1, оператор-функції

$$X(t) = M(t)P_{N_0(D)}, \quad \Phi(t) = N^*(t)P_{N_0(D^*)} \quad (3.42)$$

є повними системами лінійно-незалежних вектор-функцій, які складають базиси нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ інтегральних операторів L та L^* , відповідно.

Нехай

$$\alpha = \int_a^b X^*(t)X(t)dt, \quad \beta = \int_a^b \Phi^*(t)\Phi(t)dt -$$

самоспряжені оборотні зліченновимірні матриці Грама, діють з гільбертового простору $\mathbf{H}_1$ в $\mathbf{H}_1$, оскільки вектор-стовпці та вектор-рядки зліченновимірних матриць $X(t)$ та $\Phi(t)$ — лінійно-незалежні.

Покажемо, що

$$(P_{N(L)}z)(t) = X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(s)z(s)ds, \quad (3.43)$$

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \Phi(t)\beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds \quad (3.44)$$

— ортопроектори на нуль-простори $N(L)$ та $N(L^*)$ інтегрального оператора (3.25) та йому спряженого, відповідно.

Доведення проведемо для оператора $P_{N(L)}$. Для доведення необхідно і достатньо показати, що:

$$1. P_{N(L)}^2 = P_{N(L)}, \quad 2. P_{N(L)}^* = P_{N(L)}, \quad 3. LP_{N(L)} = 0.$$

Покажемо, що:

$$1. P_{N(L)}^2 = P_{N(L)}.$$

$$\begin{aligned} (P_{N(L)}^2 z)(t) &= (P_{N(L)}P_{N(L)})z(t) = X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(s) \left\{ X(s)\alpha^{-1} \times \right. \\ &\times \left. \int_a^b X^*(\tau)z(\tau)d\tau \right\} ds = X(t)\alpha^{-1} \alpha \alpha^{-1} \int_a^b X^*(\tau)z(\tau)d\tau = \\ &= X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(\tau)z(\tau)d\tau = (P_{N(L)}z)(t), \end{aligned}$$

оскільки $\int_a^b X^*(s)X(s)ds = \alpha$, $\alpha^{-1}\alpha = I_{N_0(D)}$, де $I_{N_0(D)}$ — тотожний оператор у підпросторі $N_0(D)$.

2. $P_{N(L)}^* = P_{N(L)}$, тобто оператор $P_{N(L)}$ задовольняє співвідношенню

$$\left((P_{N(L)}z)(t), y(t)\right)_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)} = \left(z(t), (P_{N(L)}^*y)(t)\right)_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)}.$$

$$\begin{aligned} \left((P_{N(L)}z)(t), y(t)\right)_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)} &= \int_a^b (P_{N(L)}z)^*(t)y(t)dt = \\ &= \int_a^b \left[X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(s)z(s)ds\right]^* y(t)dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b [X^*(s)z(s)]^* ds \times \right. \\ &\times \left. [X(t)\alpha^{-1}]^* \right\} y(t)dt = \int_a^b \int_a^b z^*(s)X^{**}(s)(\alpha^{-1})^* X^*(t)y(t)dsdt = \\ &= \int_a^b z^*(s) \left[X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(t)y(t)ds\right]dt = \\ &= \int_a^b z^*(s)(P_{N(L)}y)(s)ds = \left(z(t), (P_{N(L)}y)(t)\right)_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)}. \end{aligned}$$

Таким чином, $P_{N(L)}^* = P_{N(L)}$.

3. $P_{N(L)}$ — ортопроектор на нуль-простір оператора L , тобто $LP_{N(L)} = 0$.

$$\begin{aligned} (LP_{N(L)}z)(t) &= X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(s)z(s)ds - M(t) \int_a^b N(s) \times \\ &\times \left\{ X(s)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(\tau)z(\tau)d\tau \right\} ds = X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(t)z(s)ds - \\ &- M(t)AP_{N_0(D)}\alpha^{-1} \int_a^b X^*(s)z(s)ds = X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(s)z(s)ds - \\ &- M(t)[I_{\mathbf{H}_1} - D]P_{N_0(D)}\alpha^{-1} \int_a^b X^*(s)z(s)ds = 0, \end{aligned}$$

оскільки $M(s)P_{N_0(D)} = X(s)$, $A = I_{\mathbf{H}_1} - D$, $DP_{N_0(D)} = 0$.

Таким чином, оператор $P_{N(L)}$ — ортопроектор на нуль-простір $N(L)$ оператора L .

Доведення для оператора $P_{N(L^*)}$ проводиться аналогічно.

Отже, оператор L — узагальнено оборотний і, як наслідок, нормально розв'язний.

Позначимо

$$\tilde{\alpha}^{(-1)} = P_{N_0(D)}\alpha^{-1}P_{N_0(D)}^*, \quad \tilde{\beta}^{(-1)} = P_{N_0(D^*)}\beta^{-1}P_{N_0(D^*)}^*. \quad (3.45)$$

Конструкцію псевдооберненого оператора L^+ дає наступна теорема.

Теорема 3.23. *Нехай D — нормально розв'язний оператор. Тоді оператор*

$$(L^+f)(t) = f(t) + M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds - M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)} \int_a^b M^*(s)f(s)ds + \quad (3.46)$$

$$+ M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds$$

є єдиним обмеженим псевдооберненим оператором до інтегрального оператора (3.38), де D^- — узагальнено-обернений оператор до оператора D .

Доведення. Використовуючи зауваження 3.5 до теореми 3.8 маємо, що в загальному вигляді псевдообернений оператор представляється

$$L^+ = (I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)} - P_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)} - P_{N(L^*)}), \quad (3.47)$$

де L^- — деякий узагальнено-обернений оператор до оператора L , в якості якого за теоремою 3.21 візьмемо оператор

$$(L^-f)(t) = f(t) + M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds.$$

Розкривши дужки у співвідношенні (3.47), отримаємо

$$L^+ = L^- - P_{N(L)}L^- + P_{N(L)}L^-P_{N(L^*)} - L^-P_{N(L^*)}, \quad (3.48)$$

Обчислимо кожен із доданків формули (3.48).

$$\begin{aligned} (P_{N(L)}L^-f)(t) &= X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(s) \left\{ f(s) + \right. \\ &+ M(s)D^- \int_a^b N(\tau)f(\tau)d\tau \left. \right\} ds = X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(s)f(s)ds + \\ &+ X(t)\alpha^{-1}P_{N_0(D)}^*MD^- \int_a^b N(s)f(s)ds = \\ &= X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(s)f(s)ds = (P_{N(L)}f)(t), \end{aligned}$$

оскільки $X^*(s) = P_{N_0(D)}^*M^*(s)$, $M = \int_a^b M^*(s)M(s)ds$ — самоспряжена матриця, $P_{N_0(D)}^*M = MP_{N_0(D)}$, а $P_{N_0(D)}D^- = 0$.

$$\begin{aligned} (P_{N(L)}L^-P_{N(L^*)}f)(t) &= (P_{N(L)}P_{N(L^*)}f)(t) = \\ &= X(t)\alpha^{-1} \int_a^b X^*(s) \left\{ \Phi(s)\beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(\tau)f(\tau)d\tau \right\} ds = \\ &= X(t)\alpha^{-1}P_{N_0(D)}^*A^*P_{N_0(D^*)}\beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds = \\ &= X(t)\alpha^{-1}P_{N_0(D)}^*[I_{\mathbf{H}_1} - D^*]P_{N_0(D^*)}\beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds = \\ &= X(t)\alpha^{-1}P_{N_0(D)}^*P_{N_0(D^*)}\beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds, \end{aligned}$$

оскільки $\int_a^b X^*(s)\Phi(s)ds = P_{N_0(D)}^* \int_a^b M^*(s)N^*(s)ds P_{N_0(D^*)} = P_{N_0(D)}^* A^* P_{N_0(D^*)}$,
 $A^* = I_{\mathbf{H}_1} - D^*$, а $D^* P_{N_0(D^*)} = 0$.

$$\begin{aligned} (L^- P_{N(L^*)} f)(t) &= \Phi(t) \beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(s) f(s) ds + \\ &+ M(t) D^- \int_a^b N(s) \left\{ \Phi(s) \beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(\tau) f(\tau) d\tau \right\} ds = \\ &= \Phi(t) \beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(s) f(s) ds + M(t) D^- N P_{N_0(D^*)} \beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(s) f(s) ds = \\ &= \Phi(t) \beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(s) f(s) ds = (P_{N(L^*)} f)(t), \end{aligned}$$

оскільки $\int_a^b N(s)\Phi(s)ds = \int_a^b N(s)N^*(s)ds P_{N_0(D^*)} = N P_{N_0(D^*)}$, а внаслідок
самоспряженості операторів $N = \int_a^b N(s)N^*(s)ds$ та $P_{N_0(D^*)}$ маємо, що
 $N P_{N_0(D^*)} = P_{N_0(D^*)}^* N$, а $D^- P_{N_0(D^*)} = 0$.

Підставивши отримані результати у формулу (3.48) та використавши позначення (3.39), (3.45), отримаємо псевдообернений оператор до інтегрального оператора (3.48) у гільбертовому просторі $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$

$$\begin{aligned} (L^+ f)(t) &= f(t) + M(t) D^- \int_a^b N(s) f(s) ds - M(t) \tilde{\alpha}^{(-1)} \int_a^b M^*(s) f(s) ds + \\ &+ M(t) \tilde{\alpha}^{(-1)} \tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s) f(s) ds - N^*(t) \tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s) f(s) ds. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Обмеженість псевдооберненого оператора (3.46) випливає з обмеженості оператор-функцій $M(t)$, $N(t)$ та оператора D^- .

Зауваження 3.6. Замість узагальнено-оберненого оператора D^- у формулі (3.46) можна взяти псевдообернений оператор D^+ .

3.3.3. Аналог конструкції Шмідта для побудови псевдооберненого оператора до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром. У теоремі 3.12 було розглянуто "вдосконалену" конструкцію Шмідта у випадках, коли оператор L діє у гільбертових просторах, $\dim N(L) = \dim N(L^*) < \infty$ (оператор L — фредгольмовий) або $\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$, $N(L)$ та $N(L^*)$ ізоморфні (оператор L — топологічно фредгольмовий). У цих випадках визначення лінійних операторів $\bar{P}_{N(L^*)}$ та $\bar{P}_{N(L)}$ за формулами (2.23) дозволяє запропонувати ще одну конструкцію псевдооберненого оператора до топологічно фредгольмового.

Розглянемо побудову псевдооберненого оператора до нормально розв'язного інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds, \quad (3.50)$$

що діє з скінченновимірною дійсного гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ ($\mathcal{I} = [a, b]$) у себе за "вдосконаленою" конструкцією Шмідта.

Нехай вектор-стовпці $(n \times m)$ -вимірної матриці $M(t)$, вектор-рядки $(m \times n)$ -вимірної матриці $N(t)$ належать до гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, а союзне однорідне рівняння $(L^*z)(t) = 0$ має нетривіальні розв'язки, тобто оператор (3.50) не всюди розв'язний.

Позначимо $D = E_m - A$, $A = \int_a^b N(t)M(t)dt$ — $(m \times m)$ -вимірну сталу матрицю, де E_m — m -вимірна одинична матриця, $P_{N(D)} : \mathbf{R}^m \rightarrow N(D)$ та $P_{N(D^*)} : \mathbf{R}^m \rightarrow N(D^*)$ — $(m \times m)$ -вимірні матриці-ортопроектори на нуль-простори $N(D)$ та $N(D^*)$ матриць D та D^* , відповідно.

Нехай $\text{rank } D = m-r$ ($\text{rank } D^* = m-r$). Тоді $(m \times m)$ -вимірні матриці-ортопроектори $P_{N(D)}$ та $P_{N(D^*)}$ мають по r лінійно незалежних стовпців, з яких складемо $(n \times r)$ -вимірні матриці $P_{N_r(D)}$ та $P_{N_r(D^*)}$, відповідно.

Загальні розв'язки однорідного інтегрального рівняння $Lz = 0$ та йому союзного $L^*y = 0$ мають вигляд

$$z(t) = X_r(t)c_r, \quad y(t) = \Phi_r(t)d_r,$$

де $X_r(t) = M(t)P_{N_r(D)}$, $\Phi_r(t) = N^*(t)P_{N_r(D^*)}$ — $(n \times r)$ -вимірні фундаментальні матриці, стовпці яких, відповідно, складають базиси нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ операторів L та L^* , $c_r \in \mathbf{R}^r$ і $d_r \in \mathbf{R}^r$ — довільні r -вимірні сталі вектори.

Позначимо $\overline{M}(t) = [M(t) \quad -\Phi_r(t)\alpha^{-1}]$ — $(n \times (m+r))$ -вимірну матрицю, яка складена з матриць $M(t)$ та $-\Phi_r(t)\alpha^{-1}$, а $\overline{N}(t) = \text{col}[N(t) \quad X_r^*(t)]$ — $((m+r) \times n)$ -вимірну матрицю, яка складена з матриць $N(t)$ та $X_r^*(t)$, α^{-1} і β^{-1} матриці, які обернені до $(r \times r)$ -вимірних симетричних матриць Грама

$$\alpha = \int_a^b X_r^*(t)X_r(t)dt, \quad \beta = \int_a^b \Phi_r^*(t)\Phi_r(t)dt,$$

S^{-1} — $((m+r) \times (m+r))$ -вимірну матрицю, яка обернена до неособливої матриці $S = I - B$, де

$$B = \int_a^b \overline{N}(t)\overline{M}(t)dt.$$

Теорема 3.24. *Нехай $\text{rank } D = m - r$. Тоді оператор*

$$\begin{aligned} (L^+f)(t) &= (L + \overline{P}_{N(L^*)})^{-1} - \overline{P}_{N(L)}f(t) = \\ &= f(t) + \overline{M}(t)S^{-1} \int_a^b \overline{N}(s)f(s)ds - X_r(t)\beta^{-1} \int_a^b \Phi_r^*(s)f(s)ds \end{aligned}$$

є обмеженим псевдооберненим оператором до інтегрального оператора (3.50).

Доведення. За формулами (2.23) побудуємо оператори $\bar{P}_{N(L^*)} : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow N(L^*)$ та $\bar{P}_{N(L)} : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow N(L)$

$$(\bar{P}_{N(L^*)}z)(t) = \Phi_r(t)\alpha^{-1} \int_a^b X_r^*(s)z(s)ds, \quad (3.51)$$

$$(\bar{P}_{N(L)}y)(t) = X_r(t)\beta^{-1} \int_a^b \Phi_r^*(s)y(s)ds.$$

За лемою 2.7 оператор $L + \bar{P}_{N(L^*)}$ має обмежений обернений, тобто інтегральне рівняння

$$[(L + \bar{P}_{N(L^*)})z](t) = f(t) \quad (3.52)$$

однозначно розв'язне при будь-якій правій частині.

Для знаходження розв'язку рівняння (3.52) запишемо його у вигляді:

$$\begin{aligned} (\bar{L}z)(t) &\equiv [(L + \bar{P}_{N(L^*)})z](t) = \\ &= z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds + \Phi_r(t)\alpha^{-1} \int_a^b X_r^*(s)z(s)ds = \\ &= z(t) - \bar{M}(t) \int_a^b \bar{N}(s)z(s)ds = f(t). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Розв'язки рівняння (3.53) мають вигляд:

$$z(t) \equiv f(t) + \bar{M}(t)S^{-1} \int_a^b \bar{N}(s)f(s)ds.$$

Тоді за теоремою 3.12

$$\begin{aligned}
 (L^+ f)(t) &= (L + \overline{P}_{N(L^*)})^{-1} - \overline{P}_{N(L)} f)(t) = \\
 &= f(t) + \overline{M}(t) S^{-1} \int_a^b \overline{N}(s) f(s) ds - X_r(t) \beta^{-1} \int_a^b \Phi_r^*(s) f(s) ds = \\
 &= f(t) + M_1(t) \int_a^b N_1(s) f(s) ds.
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Приклад 3.9.

Знайдемо псевдообернений оператор до лінійного обмеженого інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром

$$Lz(t) := z(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & s - \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} z(s) ds, \tag{3.55}$$

де $z(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t))$ та $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t))$ належать простору $\mathbf{L}_2([0, 2], \mathbf{R}^2)$, $t \in [0, 2]$.

Для знаходження базисів ядер $\ker L$ та $\ker L^*$ операторів L та L^* розв'яжемо однорідні рівняння

$$(Lz)(t) = 0, \quad (L^*y)(t) = 0. \tag{3.56}$$

Розв'язки шукатимемо у вигляді:

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} c; \quad y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3t}{2} \\ t - \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} d. \tag{3.57}$$

Для цієї задачі матриця

$$A = \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ t-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3t}{2} \\ t-\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$D = D^* = (E_3 - A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{N(D)} = P_{N(D^*)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки, $\text{rank } D = 1$, $r = 2$ і $P_{N_r(D)} = P_{N_r(D^*)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{N_r(D)} = \begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_r(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3t}{2} \\ t-\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{N_r(D^*)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3t}{2} \\ t-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, стовпці матриць $X_r(t)$ та $\Phi_r(t)$ складають базиси, відповідно, нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ операторів L та L^* .

За формулами (3.51) побудуємо оператори

$$(\overline{P}_{N(L^*)}z)(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{9t}{4} \\ \frac{2t-1}{4} & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s-1 & 0 \end{pmatrix} z(s)ds,$$

$$(\overline{P}_{N(L)}y)(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t-1}{6} \\ \frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & s-\frac{1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} y(s)ds.$$

Оператор $(\bar{L}z)(t) = (L + \bar{P}_{N(L^*)}z)(t)$ матиме вигляд:

$$(\bar{L}z)(t) = z(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 & 0 & -\frac{9t}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-2t+1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \\ \times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 \\ s-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T z(s) ds.$$

Оператор, обернений до оператора $\bar{L}$, буде мати вигляд:

$$(\bar{L}^{-1}f)(t) = f(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 & 0 & -\frac{9t}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-2t+1}{4} & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \times \\ \times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 \\ s-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{12}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, використовуючи формулу (3.54), отримаємо псевдообернений оператор

$$(L^+f)(t) = f(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2t-5}{12} & 0 & \frac{-3(t-1)}{2} & 0 & \frac{1-t}{6} \\ \frac{-3(8t-1)}{7} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix} \times \\ \times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ s-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds. \quad (3.58)$$

Висновки до третього розділу

Використовуючи доведені у другому розділі леми, які узагальнюють лему Е. Шмідта на випадок кожного з класів узагальнено оборотних операторів, у третьому розділі розглянуто загальні підходи до побудови обмежених узагальнено-обернених у банахових та псевдообернених операторів у гільбертових просторах до узагальнено оборотних операторів, які застосовані до узагальненого обернення та псевдообернення інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах.

У цьому розділі:

1. Доведено теореми, в яких отримано формули для побудови узагальнено-обернених операторів до топологічно нетерових у банахових просторах, лівих, правих псевдообернених та псевдообернених операторів у гільбертових просторах.
2. Доведено теореми, в яких отримано формули для обчислення узагальнено-обернених операторів до топологічно фредгольмових у банахових просторах, які узагальнюють відому конструкцію Е. Шмідта, а також формули для побудови односторонньо псевдообернених та псевдообернених операторів до топологічно фредгольмових операторів у гільбертових просторах.
3. Отримано конструкції узагальнено-обернених операторів, лівого, правого псевдообернених та псевдообернених до n - та d -нормальних та нетерowego у банахових та гільбертових просторах, відповідно.
4. Для інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах встановлено умови їх топологічної фредгольмовості та запропоновано конструкції обмежених узагальнено-обернених операторів.

5. Для інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром у гільбертових просторах встановлено умови їх нормальної розв'язності та запропоновано формули для обчислення псевдообернених операторів.
6. Побудовано псевдообернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром за "вдосконаленою" конструкцією Е. Шмідта у скінченновимірному гільбертовому просторі.

РОЗДІЛ 4

ЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Крайові задачі для багатьох класів диференціальних, функціонально-диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь та інших рівнянь можна записати у вигляді лінійного рівняння з нормально розв'язним оператором, що діє у банахових, або гільбертових просторах. Такий запис дозволяє використовувати для їх аналізу методи функціонального аналізу та теорії операторів у функціональних просторах. Відмова від окремих специфічних труднощів, притаманних кожній конкретній задачі, дає можливість зосередитись на дослідженні її більш глобальних закономірностей.

У попередньому розділі були отримані умови існування та запропоновані конструкції узагальнено-обернених операторів у банахових та гільбертових просторах.

У цьому розділі розглянуті в загальному вигляді умови розв'язності та побудовані загальні розв'язки нормально розв'язних операторних рівнянь та крайових задач для них, які застосовані для встановлення умов розв'язності та структури загальних розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром та крайових задач для них у банахових та гільбертових просторах.

4.1. Умови існування та загальний вигляд розв'язків нормально розв'язних операторних рівнянь

Розглянемо в загальному вигляді умови розв'язності та способи побудови розв'язків операторних рівнянь з лінійними узагальнено

оборотними операторами L , які діють у банахових або гільбертових просторах вектор-функцій.

Нехай $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $z(t)$, визначених на скінченному проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$, $z(\cdot) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{B}_1$ з рівномірною нормою $|||z(t)||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}$, а $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $f(t)$, визначених на тому ж проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}_2$, $f(\cdot) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{B}_2$ з рівномірною нормою $|||f(t)||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$. Позначення цих функціональних просторів запозичені з монографії О. Я. Хелемського [208, с. 81].

Розглянемо задачу про умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків лінійного операторного рівняння

$$(Lz)(t) = f(t), \quad (4.1)$$

де $L : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — узагальнено оборотний оператор.

Цю задачу будемо розв'язувати з використанням обмежених проекторів $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \rightarrow Y_L$ та запропонованих у теоремах 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, 3.9, конструкцій узагальнено-обернених операторів L^- для різних класів узагальнено оборотних операторів L .

Теорема 4.1. *Нехай L — топологічно нетеровий оператор. Операторне рівняння (4.1) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, для яких виконується умова*

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0 \quad (4.2)$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z})(t) + (L^- f)(t), \quad (4.3)$$

де $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \rightarrow Y_L$ — нескінченновимірні обмежені проекти, $\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z}$ — загальний розв'язок відповідного (4.1)

однорідного рівняння $Lz = 0$, $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, L^- — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора L .

Доведення. Оператор L — узагальнено оборотний, тому нуль-простір $N(L)$ і образ $R(L)$ доповнювальні у банахових просторах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ та $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, відповідно. Тоді загальний розв'язок рівняння (4.1) є прямою сумою $z(t) = \tilde{z}(t) + \bar{z}(t)$, де $\tilde{z}(t)$ — загальний розв'язок однорідного рівняння

$$(Lz)(t) = 0, \quad (4.4)$$

а $\bar{z}(t)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1).

З означення проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ на нуль-простір $N(L)$ оператора L маємо, що загальний розв'язок однорідного рівняння (4.4) має вигляд

$$\tilde{z}(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t), \quad (4.5)$$

де $\hat{z}(t) \in N(L) \subset \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, а $\hat{z}(t)$ — довільний елемент простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Оскільки оператор L — узагальнено оборотний, то лінійне операторне рівняння (4.1) є нормально розв'язним. Для його розв'язності необхідно і достатньо [132], щоб елемент $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ належав образу $R(L)$ оператора L . З доповнювальності образу $R(L)$ та означення проектора $\mathcal{P}_{Y_L}$ маємо, що $R(L) = N(\mathcal{P}_{Y_L})$. Таким чином, умова (4.2) гарантує приналежність елемента $f(t)$ образу $R(L)$ оператора L .

При виконанні умови (4.2) частинний розв'язок $\bar{z}(t)$ неоднорідного рівняння (4.1) знаходиться за формулою

$$\bar{z}(t) = (L^-f)(t),$$

де L^- — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора L .

Підставивши розв'язок (4.3) у рівняння (4.1), та враховуючи співвідношення $LL^- = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_L}$ та $\mathcal{P}_{Y_L}f = 0$, отримаємо:

$$Lz = L\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z} + LL^-f = LL^-f = (I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_L})f = f.$$

Теорему доведено.

Зауваження 4.1. Для топологічно фредгольмових операторів теорема 4.1 формулюється аналогічно.

Якщо оператор L діє у сепарабельних банахових просторах, які мають топологічні базиси Шаудера, то загальний розв'язок (4.5) однорідного рівняння (4.4) можна записати в іншому вигляді.

Нехай оператор L діє з банахового простору $\mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ неперервних обмежених вектор-функцій $z(t)$ визначених на скінченному проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у сепарабельному банаховому просторі $\mathbf{B}_1$, $z(\cdot) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{B}_1$ з нормою $|||z(t)||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}$ у банаховий простір $\mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ неперервних обмежених вектор-функцій $f(t)$ визначених на тому ж проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у сепарабельному банаховому просторі $\mathbf{B}_2$, $f(\cdot) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{B}_2$ з нормою $|||f(t)||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$, які є підпросторами банахових просторів $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ та $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, відповідно [208, с. 85].

Тоді банахові простори $\mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $\mathbf{BC}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ мають базиси Шаудера.

Як і раніше, позначимо, відповідно, через μ та ν розмірності нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ операторів L та L^* ; $\mu = \dim \ker L$, $\nu = \dim \ker L^*$. Таким чином, μ та ν , в залежності від класу оператора L , можуть дорівнювати або нулю, або скінченному цілому додатньому числу, або нескінченності.

Використовуючи формули (2.12) для проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ та позначення (2.11), загальний розв'язок $\tilde{z}(t) \in N(L)$ однорідного рівняння (4.4) запишеться у вигляді лінійної комбінації базисних векторів $\{f_i(t)\}_{i=1}^\mu$ ядра оператора L

$$\tilde{z}(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z})(t) = \sum_{i=1}^{\mu} f_i(t) c_i = X_\mu(t) c_\mu,$$

де $X(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_\mu(t)]$ — матриця, яка складена з базисних векторів $\{f_i(t)\}_{i=1}^\mu$ нуль-простору оператора L , $c_\mu = (\Gamma \hat{z})(\cdot) = \text{col}((\gamma_1 \hat{z})(\cdot), (\gamma_2 \hat{z})(\cdot), \dots, (\gamma_\mu \hat{z})(\cdot))$ — довільний вектор-стовпець констант.

При виконанні умови (4.2) формула загального розв'язку рівняння (4.1) набуде вигляду

$$z(t) = X_\mu(t)c_\mu + (L^- f)(t).$$

Далі сформулюємо без доведення теореми про розв'язність та представлення розв'язків операторного рівняння (4.1) з узагальнено оборотними n -нормальними та d -нормальними операторами L .

Теорема 4.2. *Нехай L — узагальнено оборотний n -нормальний оператор ($\mu = \dim N(L) < \infty$). Тоді операторне рівняння (4.1) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, для яких виконується умова*

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0$$

і при цьому має μ -параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t) = X_\mu(t)c_\mu + (L^- f)(t),$$

де $X_\mu(t)$ — матриця, яка складена з μ лінійно-незалежних базисних векторів нуль-простору $N(L)$, $c_\mu \in \mathbf{R}^\mu$ довільний сталий вектор, L^- — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора L .

Наслідок 4.1. *Нехай L — узагальнено оборотний n -нормальний оператор і $\ker L = \{0\}$. Тоді операторне рівняння (4.1) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, які задовольняють умову (4.2) і при цьому має єдиний розв'язок*

$$z(t) = (L_t^{-1} f)(t). \quad (4.6)$$

Доведення. Дійсно, оскільки $\ker L = \{0\}$, то $\mathcal{P}_{N(L)} = 0$, а за наслідком 3.1 з теореми 3.3 узагальнено-обернений оператор $L^- = L_t^{-1}$. Тоді формула (4.3) для представлення загального розв'язку рівняння (4.1) набуває вигляду (4.6).

Для лінійних рівнянь з d -нормальним оператором справедлива наступна теорема.

Теорема 4.3. *Нехай L — узагальнено оборотний d -нормальний оператор ($\nu = \dim N(L^*) = \dim Y_L < \infty$). Тоді операторне рівняння (4.1) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, які задовольняють ν лінійно-незалежним умовам*

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z})(t) + (L^- f)(t),$$

де $\mathcal{P}_{N(L)}$ — нескінченновимірний обмежений проектор, $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, L^- — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора L .

Наслідок 4.2. *Нехай L — узагальнено оборотний d -нормальний оператор і $\ker L^* = \{0\}$. Тоді операторне рівняння (4.1) розв'язне при будь-якому $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і при цьому має сім'ю розв'язків*

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z})(t) + (L_r^{-1} f)(t), \quad (4.7)$$

де $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, L_r^{-1} — обмежений правий обернений оператор до оператора L .

Доведення. Дійсно, оскільки $\ker L^* = \{0\}$, то $\mathcal{P}_{Y_L} = 0$, а за наслідком 3.2 з теореми 3.4 узагальнено-обернений оператор $L^- = L_r^{-1}$. Тоді формула (4.3) для представлення загального розв'язку рівняння (4.1) набуває вигляду (4.7).

Далі сформулюємо без доведення теорему про розв'язність операторного рівняння (4.1) з нетеровим оператором. Внаслідок

скінченновимірності, а отже доповнювальності, ядра $R(L)$ та нуль-простору $N(L)$ нетеровий оператор є узагальнено-оборотним. Для операторних рівнянь з нетеровим оператором справедливе наступне твердження.

Теорема 4.4. *Нехай L — нетеровий оператор ($\mu = \dim N(L) < \infty$, $\nu = \dim N(L^*) = \dim Y_L < \infty$). Операторне рівняння (4.1) з лінійним обмеженим нетеровим оператором розв'язне для тих і лише тих $f(t)$, для яких виконується ν лінійно-незалежних умов*

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0,$$

при виконанні яких операторне рівняння (4.1) має μ -параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z})(t) + (L^- f)(t) = X_\mu(t) c_\mu + (L^- f)(t),$$

де $X_\mu(t)$ — матриця, яка складена з μ лінійно-незалежних базисних векторів нуль-простору $N(L)$, $c_\mu \in \mathbf{R}^\mu$ довільний сталий вектор, L^- — узагальнено-обернений оператор до оператора L .

Наслідок 4.3. *Нехай оператор L — нетеровий і $\ker L = \{0\}$. Тоді рівняння (4.1) розв'язне для тих і лише тих $f(t)$, які задовольняють $\nu = \dim N(L^*)$ лінійно-незалежним умовам*

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0$$

і при цьому має єдиний розв'язок

$$z(t) = (L_l^{-1} f)(t). \quad (4.8)$$

Дійсно, оскільки $\dim N(L) = 0$, то $X_\mu(t) = 0$ і з наслідку 4.1 маємо формулу (4.8).

Наслідок 4.4. Нехай оператор L — нетеровий і $\dim Y_L = 0$. Тоді рівняння (4.1) розв'язне для будь-яких $f(t)$ і при цьому має μ -параметричну сім'ю розв'язків

$$z(t) = X_\mu(t)c_\mu + (L_r^{-1}f)(t). \quad (4.9)$$

Дійсно, оскільки $\dim Y_L = 0$, то $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$ і умова розв'язності буде виконуватися для будь-яких $f(t)$. Тоді з наслідку 4.2 маємо формулу (4.9).

Зауваження 4.2. Якщо нормально розв'язний оператор L діє у гільбертових просторах, то у теоремах 4.1 – 4.4 замість узагальнено-оберненого оператора L^- буде псевдообернений оператор L^+ , а замість проекторів $\mathcal{P}_{N(L)}$ та $\mathcal{P}_{Y_L}$ будуть, відповідно, ортопроектори $P_{N(L)}$ та $P_{N(L^*)}$.

Зауваження 4.3. З формули (2.12) для побудови проектора $\mathcal{P}_{Y_L}$ маємо, що умова розв'язності (4.55) еквівалентна умовам

$$(\Phi f)(\cdot) = 0, \quad (4.10)$$

де Φ — матриця (2.11) складена з ν лінійно незалежних вектор-функціоналів, які є базисом нуль-простору $N(L^*)$.

Приклад 4.1.

Знайдемо умови розв'язності і загальний вигляд розв'язків операторного рівняння

$$Qx = y, \quad (4.11)$$

де оператор Q заданий матрицею

$$Q = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

і діє з банахового простору $\mathbf{c}$ — обмежених послідовностей, що збігаються до скінченної межі $x = \{\xi^{(i)}\}, i = 1, 2, 3, \dots$, у простір $\mathbf{c}$ таких же послідовностей $y = \{\eta^{(i)}\}, j = 1, 2, 3, \dots$, $Q : \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c}$.

У прикладі 3.1 були побудовані обмежений узагальнено-обернений оператор Q^- до оператора Q

$$Q^- = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

та обмежені проектори

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Використовуючи теорему 4.1 отримаємо, що операторне рівняння (4.11) має розв'язки для тих і лише тих $y \in \mathbf{c}$, $y = \text{col}(\eta^{(1)}\eta^{(2)}, \eta^{(3)}, \dots)$, які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_Q} y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ \eta^{(2)} \\ \eta^{(3)} \\ \eta^{(4)} \\ \dots \\ \eta^{(i)} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{(2)} \\ 0 \\ \eta^{(4)} \\ \dots \\ \eta^{(2k)} \\ \dots \end{pmatrix} = 0. \quad (4.12)$$

Умова (4.12), наприклад, буде виконуватися для векторів $y \in \mathbf{c}$,

$$y = \text{col}(\eta^{(1)}, 0, \eta^{(3)}, 0, \eta^{(5)}, 0, \dots).$$

Для таких $y \in \mathbf{c}$ операторне рівняння (4.11) має сім'ю розв'язків

$$x = \mathcal{P}_{N(Q)}\hat{x} + Q^-y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\xi}^{(1)} \\ \hat{\xi}^{(2)} \\ \dots \\ \hat{\xi}^{(i)} \\ \dots \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ 0 \\ \eta^{(3)} \\ 0 \\ \dots \\ \eta^{(2k-1)} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\xi}^{(1)} \\ -\hat{\xi}^{(1)} + \eta^{(1)} \\ \hat{\xi}^{(3)} \\ -\hat{\xi}^{(3)} + \eta^{(3)} \\ \dots \\ -\hat{\xi}^{(2k-1)} + \eta^{(2k-1)} \\ \dots \end{pmatrix},$$

де $\hat{x} = \text{col}(\hat{\xi}^{(1)}, \hat{\xi}^{(2)}, \hat{\xi}^{(3)}, \dots, \hat{\xi}^{(i)}, \dots)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{c}$.

Приклад 4.2.

Знайдемо умови розв'язності та загальний розв'язок операторного рівняння

$$Qx = y, \quad (4.13)$$

де оператор Q , заданий матрицею $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \dots \end{pmatrix}^T$, діє з

евклідового простору $\mathbf{R}^3$ у гільбертів простір $\mathbf{l}_2$.

У прикладі 3.2 були побудовані обмежений узагальнено-обернений оператор

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

та обмежені проектири

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Тоді за теоремою 4.2 рівняння (4.13) розв'язне для тих і тільки тих $y \in \mathbf{l}_2$, які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_Q} y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \dots \end{pmatrix} = 0. \quad (4.14)$$

Умову (4.14) задовольняє, наприклад, вектор

$$y = \text{col}(2y_3, 0, y_3, 0, \frac{1}{2}y_3, 0, \frac{1}{4}y_3, 0, \dots). \quad (4.15)$$

При виконанні умови (4.15) рівняння (4.13) має сім'ю розв'язків

$$x = \mathcal{P}_{N(Q)}\hat{c} + Q^-y = X\Gamma(\hat{c}) + Q^-y = Xc + Q^-y,$$

$$\text{де } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \hat{c} \in \mathbf{R}^3, \quad c = \Gamma(\hat{c}) \in \mathbf{R}^2.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (4.13) має вигляд:

$$\begin{aligned} x = Xc + Q^-y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Q^-y = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y_3 \\ 0 \\ y_3 \\ 0 \\ \frac{1}{2}y_3 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 + 4y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приклад 4.3.

Знайдемо умови розв'язності і загальний розв'язок операторного рівняння

$$Qx = y, \quad (4.16)$$

де оператор Q , заданий матрицею

$$Q = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

діє з гільбертового простору $\mathbf{l}_2$ — числових послідовностей $x = \text{col}(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \dots, \xi^{(i)}, \dots)$, для яких $\sum_{i=1}^{\infty} (\xi^{(i)})^2 < \infty$ у гільбертовий простір $\mathbf{l}_2$ числових послідовностей $y = \text{col}(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}, \dots, \eta^{(j)}, \dots)$, для яких $\sum_{j=1}^{\infty} (\eta^{(j)})^2 < \infty$.

Для представлення загального розв'язку однорідного рівняння $Qx = 0$ побудуємо ортопроектор $P_{N(L)}$. Нуль-простір оператора Q є підпростором простору $\mathbf{l}_2$ і має повний ортонормований базис $\{f_k\}, (k = 1, 2, 3, \dots)$, з векторів якого складемо $(\infty \times \infty)$ -вимірну матрицю X :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Тоді ортопроектор $P_{N(Q)}$ матиме вигляд:

$$P_{N(Q)} = XX^* = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Для встановлення умов розв'язності рівняння (4.16) побудуємо ортопроектор $P_{N(Q^*)}$ на нуль-простір оператора Q^* . Матриця, яка складена з лінійно-незалежних розв'язків однорідного спряженого рівняння $Q^*g = 0$, має вигляд:

$$\Phi = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Тоді

$$P_{N(Q^*)} = \Phi\Phi^* = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Псевдообернений оператор Q^+ , побудований за формулою (3.17) має вигляд:

$$Q^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

За теоремою 4.1 рівняння (4.16) має розв'язок для тих і тільки тих $y \in \mathbf{l}_2$, $y = \text{col}(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)} \dots)$, які задовольняють умову

$$P_{N(Q^*)}y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ \eta^{(2)} \\ \eta^{(3)} \\ \dots \\ \eta^{(i)} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{(2)} \\ 0 \\ \dots \\ \eta^{(2k)} \\ \dots \end{pmatrix} = 0. \quad (4.17)$$

Умова розв'язності (4.17) виконується, наприклад, для векторів $y \in \mathbf{l}_2$, $y = \text{col}(\eta^{(1)}, 0, \eta^{(3)}, 0, \eta^{(5)}, 0, \dots)$

Для таких $y \in \mathbf{l}_2$ операторне рівняння (4.16) має розв'язок

$$x = P_{N(Q)}\hat{x} + Q^+y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\xi}^{(1)} \\ \hat{\xi}^{(2)} \\ \hat{\xi}^{(3)} \\ \hat{\xi}^{(4)} \\ \dots \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ 0 \\ \eta^{(3)} \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\hat{\xi}^{(1)} + \hat{\xi}^{(2)} + \eta^{(1)}) \\ \frac{1}{2}(\hat{\xi}^{(1)} + \hat{\xi}^{(2)} - \eta^{(1)}) \\ \frac{1}{2}(\hat{\xi}^{(3)} + \hat{\xi}^{(4)} + \eta^{(3)}) \\ \frac{1}{2}(\hat{\xi}^{(3)} + \hat{\xi}^{(4)} - \eta^{(3)}) \\ \dots \end{pmatrix},$$

де $\hat{x} = \text{col}(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3, \dots, \hat{\xi}_i, \dots)$ — довільний елемент гільбертового простору $\mathbf{l}_2$, $\text{col}(\frac{1}{2}(\hat{\xi}^{(1)} + \hat{\xi}^{(2)}), \frac{1}{2}(\hat{\xi}^{(1)} + \hat{\xi}^{(2)}), \frac{1}{2}(\hat{\xi}^{(3)} + \hat{\xi}^{(4)}), \frac{1}{2}(\hat{\xi}^{(3)} + \hat{\xi}^{(4)}), \dots)$ — вектор з нуль-простору $N(Q)$, а вектор $\text{col}(\frac{\eta^{(1)}}{2}, -\frac{\eta^{(1)}}{2}, \frac{\eta^{(3)}}{2}, -\frac{\eta^{(3)}}{2}, \dots)$ — єдиний частинний розв'язок операторного рівняння (4.16).

4.2. Розв'язок інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром

Доведені у попередньому підрозділі загальні теореми про розв'язність та структуру розв'язків нормально розв'язних операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах застосуємо до дослідження умов існування та представлення загальних розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах.

4.2.1. Розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром у банаховому просторі. Розглянемо у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ інтегральне рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds = f(t), \quad (4.18)$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $\mathcal{I} = [a, b]$ у банахів простір $\mathbf{B}_1$, $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) := \{f(\cdot) \rightarrow \mathbf{B}_1, \|f\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_1}\}$, $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахів простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій, оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ діють

з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у себе, сильно неперервні з нормами $|||M||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|M(t)\|_{\mathbf{B}_1} = M_0 < \infty$ та $|||N||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|N(t)\|_{\mathbf{B}_1} = N_0 < \infty$.

Розв'язок рівняння (4.18) будемо шукати у банаховому просторі $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — неперервних на проміжку $\mathcal{I} = [a, b]$ функцій $z(t)$, які набувають значень у дійсному банаховому просторі $\mathbf{B}_1$.

Як було показано у параграфі 3.3, при умові, що лінійний обмежений оператор D — узагальнено оборотний $\left(D = I_{\mathbf{B}_1} - A, A = \int_a^b N(s)M(s)ds\right)$, інтегральний оператор L є узагальнено оборотним. Тому для рівняння (4.18) справедлива наступна теорема.

Теорема 4.5. *Нехай $D : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$ — обмежений узагальнено оборотний оператор. Тоді при виконанні умови і тільки при ній*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s)ds = 0 \quad (4.19)$$

операторне рівняння (4.18) розв'язне і має сім'ю розв'язків

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + (L^-f)(t),$$

де $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}$ — оператор розв'язку відповідного (4.18) однорідного інтегрального рівняння, $\hat{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, L^- — узагальнено-обернений оператор (3.32) до інтегрального оператора L .

Доведення. Запишемо рівняння (4.18) у вигляді

$$z(t) = M(t)c + f(t), \quad (4.20)$$

де $c = \int_a^b N(s)z(s)ds$. Застосувавши до обох частин рівняння (4.20) оператор-функцію $N(t)$ та проінтегрувавши їх на проміжку $[a, b]$ отримаємо операторне рівняння

$$\int_a^b N(s)z(s)ds = \int_a^b N(s)M(s)c ds + \int_a^b N(s)f(s)ds,$$

або

$$(I_{\mathbf{B}_1} - A)c = Dc = b, \quad (4.21)$$

де $b = \int_a^b N(s)f(s)ds$.

За припущенням теореми оператор D — узагальнено оборотний, тому операторне рівняння (4.21) нормально розв'язне. За теоремою 4.1 воно розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_D} b = 0 \quad (4.22)$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$c = \mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + D^-b, \quad (4.23)$$

де $\mathcal{P}_{Y_D}$, $\mathcal{P}_{N(D)}$ — нескінченновимірні обмежені проектори, $\hat{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, D^- — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора D .

Підставивши знайдене $c \in \mathbf{B}_1$ з формули (4.23) у вираз (4.20), отримаємо

$$\begin{aligned} z(t) &= M(t) \{ \mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + D^-b \} + f(t) = M(t) \mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + f(t) + \\ &+ M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds = M(t) \mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + (L^-f)(t), \end{aligned}$$

оскільки у теоремі 3.21 було доведено, що оператор

$$(L^-f)(t) = f(t) + M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds$$

є обмеженим узагальнено-оборотним до інтегрального оператора (4.18).

Підставивши у (4.22) $b = \int_a^b N(s)f(s)ds$, отримаємо умову розв'язності (4.19).

Зауваження 4.4. У випадку, коли оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ — зліченновимірні матриці, вектор-стовпці та вектор-рядки яких належать банаховому простору $\mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_1)$, отримаємо зліченновимірну систему інтегральних рівнянь.

У параграфі 3.3. були визначені зліченновимірні матриці $X(t)$, $\Gamma(t)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, за допомогою яких побудовані обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{Y_L}$, обмежений узагальнено-обернений оператор L^- та матриця S^{-1} — обернена до матриці

$$S = I - B, \quad B = \int_a^b \overline{N}(t) \overline{M}(t) dt.$$

У цьому випадку при виконанні умови

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = \Psi(t) \int_a^b \Phi^*(s) f(s) ds = 0,$$

яка еквівалентна зліченній кількості лінійно-незалежних умов

$$\int_a^b \Phi^*(s) f(s) ds = 0,$$

рівняння (4.18) має зліченну кількість лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t) = X(t) \hat{c} + (L^- f)(t),$$

де $\hat{c}$ — довільний елемент підпростору $N_0(D)$ банахового простору $\mathbf{B}_1$, L^- — узагальнено-обернений оператор (3.36).

Приклад 4.4.

Знайдемо умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків інтегрального рівняння

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_0^1 N(s) z(s) ds = f(t), \quad (4.24)$$

де зліченновимірні матриці

$$M(t) = \text{diag}\{e^t, e^t, \dots, e^t, e^t, \dots\},$$

$$N(s) = \text{diag}\{s, 0, s, 0, \dots, s, 0, \dots\},$$

задовольняють умови прикладу 3.8, а вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $[0, 1]$ у банаховий простір $\mathbf{c}$ — збіжних числових послідовностей: $f(t) \in \mathbf{C}([0, 1], \mathbf{c}) := \{f(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbf{c}\}$.

У прикладі 3.8 було доведено, що оператор L узагальнено оборотний і побудовано обмежені проектори

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = X(t) \int_0^1 \Gamma^*(s)z(s)ds, \quad (\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = \Psi \int_0^1 \Phi^*(s)f(s)ds,$$

та обмежений узагальнено-обернений оператор L^- до оператора L :

$$(L^-f)(t) = f(t) + M_1(t) \int_0^1 N_1(s)f(s)ds,$$

де

$$X(t) = \text{diag}\{X_{(4 \times 2)}(t), X_{(4 \times 2)}(t), \dots\},$$

$$\Gamma(t) = \text{diag}\{\Gamma_{(4 \times 2)}(t), \Gamma_{(4 \times 2)}(t), \dots\},$$

$$X_{(4 \times 2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \end{pmatrix}^*, \quad \Gamma_{(4 \times 2)}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}^*,$$

$$\Phi(t) = \text{diag}\{\Phi_{(4 \times 2)}(t), \Phi_{(4 \times 2)}(t), \dots\},$$

$$\Psi(t) = \text{diag}\{\Psi_{(4 \times 2)}(t), \Psi_{(4 \times 2)}(t), \dots\},$$

$$\Phi_{(4 \times 2)}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}^*, \quad \Psi_{(4 \times 2)}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^*,$$

$$M_1(t) = \text{diag} \{ M_{(2 \times 4)}(t), M_{(2 \times 4)}(t), \dots \},$$

$$N_1(s) = \text{diag} \{ N_{(4 \times 2)}(s), N_{(4 \times 2)}(s), \dots \};$$

$$M_{(2 \times 4)}(t) = \begin{pmatrix} 2(e^t - 1) & 0 & -e^t & -e^t \\ 0 & e^t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_{(4 \times 2)}(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & s & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

Тоді при виконанні умови

$$\int_0^1 \Phi^*(s) f(s) ds = 0 \quad (4.25)$$

рівняння (4.24) розв'язне. Умова (4.25) виконується, якщо компоненти вектор-функції $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots)$ задовольняють співвідношенням

$$\int_0^1 s f_{2k-1}(s) ds = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.26)$$

При виконанні умов (4.26) операторне рівняння (4.25) має сім'ю розв'язків

$$\begin{aligned} z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z})(t) + (L^- f)(t) = X(t) \int_0^1 \Gamma(s) \hat{z}(s) ds + \\ + f(t) + M_1(t) \int_0^1 N_1(s) f(s) ds, \end{aligned}$$

де $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{C}([0, 1], \mathbf{c})$.

4.2.2. Розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі. Розглянемо умови розв'язності та вигляд загального розв'язку інтегрального рівняння

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds = f(t), \quad (4.27)$$

де оператор-функції $M(t) = \{m_{ij}(t)\}_{i,j=1}^\infty$ та $N(t) = \{n_{ij}(t)\}_{i,j=1}^\infty$ — зліченновимірні матриці, компоненти яких задовольняють умовам

$$\int_a^b \sum_{i,j=1}^\infty m_{ij}^2(t)dt < \infty, \quad \int_a^b \sum_{i,j=1}^\infty n_{ij}^2(t)dt < \infty.$$

Тоді, як показано у підрозділі 3.3.2, оператор (4.27) діє з гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ — сумовних з квадратом на проміжку $\mathcal{I} = [a, b]$ функцій $z(t)$, які набувають значень у дійсному гільбертовому просторі $\mathbf{H}_1$ в себе. Розв'язок рівняння (4.27) будемо шукати у гільбертовому просторі $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$.

З теореми 3.22 маємо, що при умові нормальної розв'язності оператора $D = I_{\mathbf{B}_1} - A$, $A = \int_a^b N(s)M(s)ds$, інтегральний оператор L — нормально розв'язний. Тоді існують ортопроектори $P_{N(L)} : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1) \rightarrow N(L)$ та $P_{N(L^*)} : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1) \rightarrow N(L^*)$ на нуль-простори $N(L)$ та $N(L^*)$ операторів L та йому спряженого L^* , а за теоремою 3.23 — єдиний обмежений псевдообернений оператор

$$(L^+f)(t) = f(t) + M(t)D^+ \int_a^b N(s)f(s)ds - M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)} \int_a^b M^*(s)f(s)ds + \quad (4.28)$$

$$+ M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds$$

де $\tilde{\alpha}^{(-1)}$ та $\tilde{\beta}^{(-1)}$ — визначені формулами (3.45).

Таким чином, для рівняння (4.27) справедлива

Теорема 4.6. *Нехай $D : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_1$ — обмежений нормально розв'язний оператор. Тоді при виконанні умови і тільки при ній*

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \Phi(t)\beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds = 0 \quad (4.29)$$

операторне рівняння (4.27) розв'язне і має сім'ю розв'язків

$$z(t) = X(t)\hat{c} + (L^+f)(t),$$

де $X(t) = M(t)P_{N_0(D)}$ — оператор розв'язку відповідного (4.18) однорідного інтегрального рівняння, c — довільний елемент підпростору $N_0(D)$ гільбертового простору $\mathbf{H}_1$, L^+ — єдиний обмежений псевдообернений оператор (4.28) до інтегрального оператора (4.27).

Якщо інтегральне рівняння

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds = f(t), \quad (4.30)$$

розглядається у скінченновимірному гільбертовому просторі $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, то теорема 4.6 дещо спрощується та конкретизується.

Нехай вектор-стовпці $(n \times m)$ -вимірної матриці $M(t)$, вектор-рядки $(m \times n)$ -вимірної матриці $N(t)$ та вектор-стовпець $f(t)$ належать до гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, а однорідне рівняння $(Lz)(t) = 0$ має нетривіальні розв'язки, тобто оператор (4.30) не всюди розв'язний.

Знайдемо умови розв'язності та вигляд загального розв'язку у цьому випадку.

У п. 3.3.3 був побудований єдиний псевдообернений оператор до оператора (4.30)

$$(L^+f)(t) = f(t) + M_1(t) \int_a^b N_1(s)f(s)ds \quad (4.31)$$

та ортопроектор

$$(P_{N(L^*)}y)(t) = \Phi_r(t)\beta^{-1} \int_a^b \Phi_r^*(s)y(s)ds,$$

де $M_1(t) = [\overline{M}(t)S^{-1} \quad X_r(t)\beta^{-1}]$ — $(n \times (m + 2r))$ -вимірна матриця, яка складена з матриць $\overline{M}(t)S^{-1}$ та $X_r(t)\beta^{-1}$, $N_1(s) = \text{col } [\overline{N}(s) \quad \Phi_r^*(s)]$ — $((m + 2r) \times n)$ -вимірна матриця, яка складена з матриць $\overline{N}(s)$ та $\Phi_r^*(s)$, $\overline{M}(t) = [M(t) \quad -\Phi_r(t)\alpha^{-1}]$ — $(n \times (m + r))$ -вимірна матриця, яка складена з матриць $M(t)$ та $-\Phi_r(t)\alpha^{-1}$, а $((m + r) \times n)$ -вимірна матриця $\overline{N}(t) = \text{col } [N(t), X_r^*(t)]$, яка складена з матриць $N(t)$ та $X_r^*(t)$, $X_r(t)$, $\Phi_r(t)$ — $(n \times r)$ -вимірні фундаментальні матриці, стовпці яких, відповідно, складають базиси нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ операторів L та L^* , α^{-1} і β^{-1} матриці, які обернені до $(r \times r)$ -вимірних симетричних матриць Грама

$$\alpha = \int_a^b X_r^*(t)X_r(t)dt, \quad \beta = \int_a^b \Phi_r^*(t)\Phi_r(t)dt.$$

Позначимо через $D = E_m - A$, $A = \int_a^b N(t)M(t)dt$ — $(m \times m)$ -вимірну сталу матрицю.

Теорема 4.7. *Нехай $L : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $\text{rank } D = m - r, r \neq 0$. Тоді інтегральне рівняння Фредгольма з виродженим ядром (4.27) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, які задовольняють r лінійно-незалежним умовам*

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \Phi_r(t)\beta^{-1} \int_a^b \Phi_r^*(s)f(s)ds = 0$$

і при цьому має r -параметричну сім'ю розв'язків

$$z(t) = X_r(t)c_r + (L^+f)(t), \quad (4.32)$$

де $c_r \in R^r$ — довільний r -вимірний вектор-стовпець констант, L^+ — псевдообернений оператор (4.31).

Приклад 4.5.

Знайдемо умови існування та загальний розв'язок лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром

$$(Lz)(t) := z(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & s - \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} z(s) ds = f(t), \quad (4.33)$$

де $z(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t))$ та $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t))$ належать простору $\mathbf{L}_2([0, 2], \mathbf{R}^2)$, $t \in [0, 2]$.

У прикладі 3.3 було знайдено матриці $X_r(t)$ та $\Phi_r(t)$, вектор-стовпці яких складають базиси, відповідно, нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ операторів L та L^* . інтегрального рівняння (4.33)

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_r(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3t}{2} \\ t - \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

За формулами (3.51) побудуємо ортопроектор

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{4} \\ \frac{6t-3}{7} & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & s - \frac{1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} f(s) ds,$$

За умови

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{4} \\ \frac{6t-3}{7} & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{s-1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} f(s) ds = 0,$$

яка з урахуванням, що $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t))$ еквівалентна умові

$$\int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{s-1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds = \int_0^2 \begin{pmatrix} \frac{s-1}{2} \cdot f_2(s) \\ \frac{3s}{2} \cdot f_1(s) \end{pmatrix} ds = 0,$$

загальний розв'язок рівняння (4.33) має вигляд:

$$z(t) = X_r(t)c_r + (L^+f)(t) = \begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c_r + (L^+f)(t),$$

де

$$\begin{aligned} (L^+f)(t) = f(t) + & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2t-5}{12} & 0 & \frac{-3(t-1)}{2} & 0 & \frac{1-t}{6} \\ \frac{-3(8t-1)}{7} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ s-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds, \quad c_r \in \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

4.3. Лінійні крайові задачі для нормально розв'язних операторних рівнянь

Далі розглянемо умови розв'язності та представлення загальних розв'язків лінійних крайових задач для операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами у банахових та гільбертових просторах, а також властивості узагальненого оператора Гріна відповідних напіводнорідних крайових задач.

4.3.1. Лінійні крайові задачі для операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами у банахових просторах. Як і раніше позначимо $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ та $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банахові простори обмежених вектор-функцій з рівномірними нормами, які визначені на

скінченному проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банахових просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$, відповідно, $\mathbf{B}$ — банаховий простір.

Нехай $L : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — узагальнено оборотний оператор, $\ell = \text{col}(l_1, l_2, l_3, \dots) : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}$ — лінійний обмежений оператор, $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\alpha \in \mathbf{B}$.

Знайдемо необхідні та достатні умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків лінійної крайової задачі

$$(Lz)(t) = f(t), \quad (4.34)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha. \quad (4.35)$$

Разом з неоднорідною крайовою задачею (4.34), (4.35) будемо розглядати однорідну крайову задачу

$$(Lz)(t) = 0, \quad (4.36)$$

$$\ell z(\cdot) = 0. \quad (4.37)$$

З теореми 4.1 маємо, що рівняння (4.34) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, які задовольняють умову

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0, \quad (4.38)$$

де $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \rightarrow Y_L \subset \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — обмежений проектор на підпростір Y_L , який ізоморфний нуль-простору $N(L^*)$ оператора L^* .

При виконанні умови (4.38) загальний розв'язок рівняння (4.34) має вигляд

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z}_0)(t) + (L^- f)(t), \quad (4.39)$$

де $\hat{z}_0(t)$ — довільний елемент простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, L^- — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора L .

Для того, щоб розв'язок (4.39) неоднорідного операторного рівняння (4.34) був розв'язком крайової задачі (4.34), (4.35) необхідно і достатньо,

щоб елемент $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{B}_1$ задовольняв операторному рівнянню

$$\ell(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_0)(\cdot) + \ell(L^-f)(\cdot) = \alpha,$$

яке отримане після підстановки розв'язку (4.39) у крайову умову (4.35).

Позначимо через $\mathcal{L} = \ell\mathcal{P}_{N(L)}$ — оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ у банаховий простір $\mathbf{B}$. Оператор $\mathcal{L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}$ є обмеженим, як суперпозиція обмежених операторів ℓ та $\mathcal{P}_{N(L)}$.

Нехай оператор $\mathcal{L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}$ — узагальнено оборотний. Позначимо $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow N(\mathcal{L})$ — обмежений проектор банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ на нуль-простір оператора $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}} : \mathbf{B} \rightarrow Y_{\mathcal{L}}$ — обмежений проектор банахового простору $\mathbf{B}$ на підпростір $Y_{\mathcal{L}} \subset \mathbf{B}$, $\mathcal{L}^-$ — узагальнено-обернений оператор до оператора $\mathcal{L}$.

З операторного рівняння

$$(\mathcal{L}\hat{z}_0)(\cdot) = \alpha - \ell(L^-f)(\cdot) \quad (4.40)$$

знайдемо елемент $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, при якому розв'язок (4.39) рівняння (4.34) буде розв'язком крайової задачі (4.34), (4.35). Оскільки оператор $\mathcal{L}$ — узагальнено оборотний, а отже нормально розв'язний, то за теоремою 4.1 рівняння (4.40) розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}[\alpha - \ell(L^-f)(\cdot)] = 0.$$

При виконанні цієї умови рівняння (4.40) має сім'ю розв'язків

$$\hat{z}_0(t) = (\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z})(t) + \left(\mathcal{L}^-[\alpha - \ell(L^-f)(\cdot)]\right)(t), \quad (4.41)$$

де $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Підставляючи (4.41) у (4.39), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (4.34), (4.35)

$$\begin{aligned} z(t) = & \left(\mathcal{P}_{N(L)}\left\{(\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z})(t) + \mathcal{L}^-[\alpha - \ell(L^-f)(\cdot)]\right\}\right)(t) + \\ & + (L^-f)(t) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{z})(t) + (Gf)(t) + (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\alpha)(t), \end{aligned}$$

де $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, а оператор G діє на вектор-функцію $f(t)$ за правилом

$$(Gf)(t) := (L^-f)(t) - (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\ell(L^-f)(\cdot))(t) \quad (4.42)$$

і називається узагальненим оператором Гріна напіводнорідної ($\alpha = 0$) крайової задачі (4.34), (4.35).

Теорема 4.8. *Нехай оператори $L : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ та $\mathcal{L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}$ — узагальнено оборотні.*

Тоді однорідна крайова задача (4.36), (4.37) має сім'ю розв'язків

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{z})(t),$$

де $\mathcal{P}_{N(A)} = \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ — оператор розв'язку однорідної крайової задачі (4.36), (4.37), $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Неоднорідна крайова задача (4.34), (4.35) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють умови

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = 0, \quad (4.43)$$

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}[\alpha - \ell(L^-f)(\cdot)] = 0 \quad (4.44)$$

і при цьому має загальний розв'язок

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(A)}\hat{z})(t) + (Gf)(t) + (\mathcal{P}_{N(L)}(\mathcal{L}^-\alpha))(t), \quad (4.45)$$

де G — узагальнений оператор Гріна (4.42) відповідної (4.34), (4.35) напіводнорідної ($\alpha = 0$) крайової задачі.

Доведення. Оператор $\mathcal{P}_{N(A)} = \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ є оператором розв'язку однорідної крайової задачі (4.36), (4.37). Дійсно,

$$L\mathcal{P}_{N(A)} = L(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}) = 0,$$

$$\ell \mathcal{P}_{N(\Lambda)} = \ell(\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}) = \mathcal{L} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} = 0,$$

оскільки $L \mathcal{P}_{N(L)} = 0$, $\mathcal{L} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} = 0$. Оператор $\Lambda = \text{col}[L, \ell]$ діє з банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ у прямий добуток банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ та банахового простору $\mathbf{B}$, $\Lambda : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}$.

Підставивши $z(t)$ з (4.45) в операторне рівняння (4.34), отримаємо:

$$\begin{aligned} (Lz)(t) &= L(\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} \hat{z})(t) + L(Gf)(t) + L(\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^- \alpha)(t) = \\ &= L(L^- f)(t) - L(\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^- \ell(L^- f)(\cdot))(t) = [I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_L}]f(t) = f(t), \end{aligned}$$

оскільки $L \mathcal{P}_{N(L)} = 0$, $LL^- = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_L}$, а $\mathcal{P}_{Y_L} f = 0$ за умовою теореми.

А, підставивши $z(t)$ з (4.45) у крайову умову (4.35), отримаємо:

$$\begin{aligned} \ell z(\cdot) &= \ell(\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} \hat{z})(\cdot) + \ell(Gf)(\cdot) + \ell(\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^- \alpha)(\cdot) = \\ &= (\mathcal{L} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} \hat{z})(\cdot) + \ell(Gf)(\cdot) + \mathcal{L} \mathcal{L}^- \alpha = \\ &= \ell(L^- f)(\cdot) - \ell(\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^- \ell(L^- f)(\cdot))(\cdot) + \mathcal{L} \mathcal{L}^- \alpha = \\ &= \ell(L^- f)(\cdot) - \mathcal{L} \mathcal{L}^- \ell(L^- f)(\cdot) + \mathcal{L} \mathcal{L}^- \alpha = \\ &= [I_{\mathbf{B}} - \mathcal{L} \mathcal{L}^-] \ell(L^- f)(\cdot) + [I_{\mathbf{B}} - \mathcal{P}_{Y_L}] \alpha = \alpha, \end{aligned}$$

оскільки $\ell \mathcal{P}_{N(L)}(\cdot) = \mathcal{L}$, $\mathcal{L} \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} = 0$, $\mathcal{P}_{Y_L} = I_{\mathbf{B}} - \mathcal{L} \mathcal{L}^-$, а $\mathcal{P}_{Y_L}[\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)] = 0$ — за умовою теореми.

Зауваження 4.5. Якщо нормально розв'язні оператори L та $\mathcal{L}$ діють у гільбертових просторах, то в теоремі 4.8 замість узагальнено-обернених операторів L^- та $\mathcal{L}^-$ будуть псевдообернені оператори L^+ та $\mathcal{L}^+$, а замість проекторів $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ та $\mathcal{P}_{Y_L}$, $\mathcal{P}_{Y_L}$ будуть, відповідно, ортопроектори $P_{N(L)}$, $P_{N(\mathcal{L})}$ та $P_{N(L^*)}$, $P_{N(\mathcal{L}^*)}$. У цьому випадку формула (4.45) набуде вигляду

$$z(t) = (P_{N(L)} P_{N(\mathcal{L})} \hat{z})(t) + (Gf)(t) + (P_{N(L)} \mathcal{L}^+ \alpha)(t),$$

де G — узагальнений оператор Гріна, який діє на функцію $f(t)$ за правилом

$$(Gf)(t) := (L^+f)(t) - (P_{N(L)}\mathcal{L}^+\ell(L^+f)(\cdot))(t).$$

Зауваження 4.6. При розгляді лінійних крайових задач вигляду (4.34), (4.35) для всюди розв'язного диференціального оператора $(Lz)(t) = z'(t) - A(t)z(t)$, який діє з банахового простору $\mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B})$ — неперервно диференційовних функцій зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}$ у банаховий простір $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B})$ — неперервних вектор-функцій із супремум нормою теорема 4.8 переходить у раніш відому [46].

Зауваження 4.7. При розгляді умов існування та представлення періодичних розв'язків лінійних різницевих рівнянь вигляду (4.34) у банаховому просторі $\mathbf{m}$ теорема 4.8 переходить у раніш відому [194] у нерезонансному випадку.

Як наслідок з теореми 4.8 розглянемо початкову задачу

$$(Lz)(t) = f(t), \quad (4.46)$$

$$z(t_0) = z_0, \quad t_0 \in \mathcal{I}. \quad (4.47)$$

Ця задача є специфічною крайовою задачею, в якій $\mathcal{L}^* = (\mathcal{P}_{N(L)}^*)(t_0)$.

Наслідок 4.5. Нехай L і $\mathcal{L}$ — узагальнено оборотні оператори. Неоднорідна задача Коші (4.46), (4.47) розв'язна для тих і тільки тих $z_0 = z(t_0) \in \mathbf{B}_1$ та $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, які задовольняють умови

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_L}\{z_0 - (L^-f)(t_0)\} = 0$$

і при цьому має сім'ю розв'язків:

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z})(t) + (G_0f)(t) + (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-z_0)(t), \quad (4.48)$$

де $\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ — оператор розв'язку відповідної (4.46), (4.47) однорідної ($z_0 = 0, f(t) = 0$) задачі Коші, $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $(G_0 f)(t) := (L^- f)(t) - (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-(L^- f)(t_0))(t)$ — оператор Гріна напіводнорідної $z_0 = 0$ задачі Коші (4.46), (4.47).

Зауваження 4.8. Якщо L — всюди розв'язний диференціальний оператор $(Lz)(t) = z'(t) - A(t)z(t)$, який діє з банахового простору $\mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B})$ — неперервно диференційовних функцій зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}$ у банаховий простір $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B})$ — неперервних вектор-функцій із супремум нормою і $f(t)$ — неперервна на проміжку $\mathcal{I}$ функція, то $\mathcal{P}_{Y_L} = 0$, оператор $\mathcal{L}^* = (\mathcal{P}_{N(L)}^*)(t_0)$ оборотний для будь-якого $t_0 \in \mathcal{I}$, узагальнено-обернений оператор L^- буде інтегральним правим оберненим оператором L_r^{-1} . В цьому випадку формула (4.48) буде мати вигляд

$$z(t) = U(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad t_0 \in \mathcal{I},$$

де $U(t, \tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$ — еволюційний оператор (оператор розв'язку) [73, с. 147].

4.3.2. Лінійні крайові задачі для нетерових операторних рівнянь у банахових просторах. Далі, як наслідок з теореми 4.8, розглянемо умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків лінійних крайових задач (4.34), (4.35) для операторних рівнянь з нетеровим оператором L .

Позначимо через $\mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ — банахів простір вектор-функцій, які діють з скінченного проміжку $\mathcal{I}$ в евклідов простір $\mathbf{R}^n$, а через $\mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ — банахів простір вектор-функцій, які діють з скінченного проміжку $\mathcal{I}$ в евклідов простір $\mathbf{R}^{n_1}$.

Нехай $L : \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ — лінійний обмежений нетеровий оператор, $\dim N(L) = \mu < \infty$, $\dim N(L^*) = \dim Y_L = \nu < \infty$, $\mu \neq \nu$, а $\ell : \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^m$ — лінійний обмежений m -вимірний вектор-функціонал, $\alpha \in \mathbf{R}^m$.

Розглянемо лінійну неоднорідну крайову задачу

$$(Lz)(t) = f(t), \quad (4.49)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha. \quad (4.50)$$

З теореми 4.4 маємо, що нормально розв'язне нетерове операторне рівняння (4.49) має розв'язки для тих і тільки тих $f(t) \in \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$, які задовольняють ν лінійно-незалежним умовам:

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0,$$

де $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1}) \rightarrow Y_L \subset \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ проектор на підпростір Y_L ізоморфний нуль-простору $N(L^*)$ оператора L^* . При цьому загальний розв'язок рівняння (4.49) має вигляд:

$$z(t) = X(t) c + (L^- f)(t), \quad (4.51)$$

де $X(t)$ — $(n \times \mu)$ -вимірна матриця, яка складена з базисних векторів нуль-простору $N(L)$ оператора L , $c \in \mathbf{R}^\mu$ — довільний μ -вимірний сталий вектор, $L^- : \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1}) \rightarrow \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ — обмежений узагальнено-обернений оператор до нетерового оператора L .

Позначимо $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times \mu)$ -вимірну сталу матрицю, $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{R}^\mu \rightarrow N(Q)$ — $(\mu \times \mu)$ -вимірну матрицю-проектор; $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{R}^m \rightarrow Y_Q$ — $(m \times m)$ -вимірну матрицю-проектор; Q^- — $(\mu \times m)$ -вимірну узагальнено-обернену матрицю до матриці Q .

З алгебраїчного рівняння

$$Qc = \alpha - \ell(L^- f)(\cdot) \quad (4.52)$$

знайдемо константу $c \in \mathbf{R}^\mu$, при якій розв'язок (4.51) рівняння (4.49) буде розв'язком крайової задачі (4.49), (4.50). Рівняння (4.52) розв'язне тоді і лише тоді, коли виконана умова [29]

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}[\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)] = 0, \quad (d = m - \text{rank } Q)$$

і при цьому має r -параметричну ($r = \mu - \text{rank } Q$) сім'ю розв'язків

$$c = \mathcal{P}_{N_r(Q)} c_r + Q^- [\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)], \quad (4.53)$$

де $\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}(\mathcal{P}_{N_r(Q)}) - (d \times m)((\mu \times r))$ -вимірна матриця, яка складена з повної системи $d(r)$ лінійно-незалежних рядків (стовпців) матриці $\mathcal{P}_{Y_Q}(\mathcal{P}_{N(Q)})$, $c_r \in \mathbf{R}^r$ — довільний вектор-стовпець.

Підставляючи (4.53) у (4.51), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (4.49), (4.50)

$$z(t) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)Q^- \alpha,$$

де $X_r(t) = X(t)\mathcal{P}_{N_r(Q)} - (n \times r)$ -вимірна матриця, стовпці якої є повною системою r -лінійно-незалежних розв'язків однорідної ($f(t) = 0$, $\alpha = 0$) крайової задачі (4.49), (4.50). Іншими словами, стовпці матриці $X_r(t)$ утворюють базис ядра $\ker \Lambda$ оператора $\Lambda = \text{col}[L, \ell]$, G — узагальнений оператор Гріна крайової задачі (4.49), (4.50), який діє на функцію $f(t)$ за правилом

$$(Gf)(t) := (L^- f)(t) - X(t)Q^- \ell(L^- f)(\cdot). \quad (4.54)$$

Теорема 4.9. *Нехай $L : \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ — нетеровий оператор.*

Тоді, якщо $\text{rank } Q \leq \min(m, \mu)$, то відповідна (4.49), (4.50) однорідна ($f(t) = 0$, $\alpha = 0$) крайова задача має r ($r = \mu - \text{rank } Q$) лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbf{R}^r.$$

Неоднорідна крайова задача (4.49), (4.50) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ та $\alpha \in \mathbf{R}^m$ які задовольняють $(\nu + d)$ лінійно-незалежним умовам

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0, \quad (4.55)$$

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}[\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)] = 0 \quad (4.56)$$

і при цьому має r -параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)Q^- \alpha. \quad (4.57)$$

Наслідок 4.6. Нехай $\text{rank } Q = \mu$, $(\mu \leq m)$. У цьому випадку відповідна (4.49), (4.50) однорідна крайова задача не має розв'язків, крім тривіального.

Неоднорідна крайова задача (4.49), (4.50) з нетеровим оператором $L : \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ та $\alpha \in \mathbf{R}^m$, які задовольняють $\nu + d$, $(d = m - \mu)$ лінійно-незалежним умовам

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}[\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)] = 0,$$

і при цьому має єдиний розв'язок

$$z(t) = (Gf)(t) + X(t)Q^- \alpha.$$

Дійсно, якщо $\text{rank } Q = \mu$, то $\mathcal{P}_{N(Q)} \equiv 0$ і $X_r(t) = 0$.

Наслідок 4.7. Нехай $\text{rank } Q = m$, $(m \leq \mu)$. У цьому випадку однорідна крайова задача (4.49), (4.50) має $r = \mu - m$ лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t) = X_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbf{R}^r.$$

Неоднорідна крайова задача (4.49), (4.50) з нетеровим оператором $L : \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ розв'язна для тих і тільки тих $f(t) \in \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$, які задовольняють ν лінійно-незалежним умовам

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0,$$

і при цьому має r -параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)Q^-\alpha.$$

Дійсно, якщо $\text{rank } Q = m$, то $\mathcal{P}_{Y_Q} \equiv 0$ і $\mathcal{P}_{Y_{Q_d}} = 0$. Тоді умова (4.56) виконується для будь-яких $f(t) \in \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ та $\alpha \in \mathbf{R}^m$.

Зауваження 4.9. У випадку, коли оператор L діє у гільбертових просторах, у теоремі 4.9 замість проекторів $\mathcal{P}_{Y_L}$, $\mathcal{P}_{N(Q)}$ та $\mathcal{P}_{Y_Q}$ будуть, відповідно, ортопроектори $P_{N(L^*)}$, $P_{N(Q)}$ та $P_{N(Q^*)}$, а замість узагальнено-обернених операторів Q^- та L^- будуть, відповідно, псевдообернені оператори Q^+ та L^+ , а формула (4.57) набуде вигляду

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)Q^+\alpha,$$

де G — узагальнений оператор Гріна, який діє на функцію $f(t)$ за правилом

$$(Gf)(t) := (L^+ f)(t) - X(t)Q^+ \ell(L^+ f)(\cdot).$$

4.4. Крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма

Отримані у параграфі 4.3. загальні теореми про розв'язність та структуру загальних розв'язків крайових задач для нормально розв'язних операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах застосуємо до дослідження умов існування та представлення загальних розв'язків лінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах.

4.4.1. Крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах. Нехай $z(t)$ вектор-функція, яка діє з відрізка $\mathcal{I} = [a, b]$ у дійсний банахів простір $\mathbf{B}_1$, $z(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) := \{z(\cdot) \rightarrow \mathbf{B}_1, \|z\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}\}$, $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахів простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій, $\mathbf{B}$ — дійсний банаховий простір.

Розглянемо у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ лінійну крайову задачу для інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds, \quad (4.58)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad (4.59)$$

де оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у себе, сильно неперервні з нормами $|||M||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|M(t)\|_{\mathbf{B}_1} = M_0 < \infty$ та $|||N||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|N(t)\|_{\mathbf{B}_1} = N_0 < \infty$, оператор ℓ — обмежений і діє з банахового простору $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій у банахів простір $\mathbf{B}$, $\ell : \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}$, $\alpha \in \mathbf{B}$.

Розв'язок крайової задачі (4.58), (4.59) для інтегрального рівняння будемо шукати у банаховому просторі $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — неперервних на проміжку $\mathcal{I} = [a, b]$ функцій $z(t)$, які набувають значень у дійсному банаховому просторі $\mathbf{B}_1$.

У теоремі 4.5 показано, що при узагальненій оборотності оператора $D = I_{\mathbf{B}_1} - A$, $A = \int_a^b N(s)M(s)ds$ та при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s)ds = 0$$

інтегральне рівняння (4.58) має сім'ю розв'язків

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)\mathbf{C}} + f(t) + M(t)D^{-1} \int_a^b N(s)f(s)ds, \quad (4.60)$$

де $\mathcal{P}_{N(D)}$, $\mathcal{P}_{Y_D}$ — обмежені проектори на нуль-простір $N(D)$ та підпростір Y_D оператора D , відповідно, c — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Підставивши розв'язок (4.60) неоднорідного операторного рівняння (4.58) у крайову умову, отримаємо операторне рівняння

$$\ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)})c + \ell f(\cdot) + \ell M(\cdot)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds = \alpha. \quad (4.61)$$

Позначимо через $\mathcal{L} = \ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)})$ — оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банахів простір $\mathbf{B}$. Оператор $\mathcal{L}$ — обмежений як суперпозиція обмеженого оператора ℓ та обмеженої оператор-функції $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}$.

Тоді рівняння (4.61) запишеться у вигляді

$$\mathcal{L}c = \alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds. \quad (4.62)$$

Нехай оператор $\mathcal{L}$ належить класу узагальнено оборотних операторів. Позначимо $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(\mathcal{L})$ — обмежений проектор банахового простору $\mathbf{B}_1$ на нуль-простір оператора $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}} : \mathbf{B} \rightarrow Y_{\mathcal{L}}$ — обмежений проектор банахового простору $\mathbf{B}$ на підпростір $Y_{\mathcal{L}} \subset \mathbf{B}$.

Оскільки оператор $\mathcal{L}$ — узагальнено оборотний, а отже нормально розв'язний, то рівняння (4.62) розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}} \left[\alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds \right] = 0,$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$c = \mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{c} + \mathcal{L}^- \left[\alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds \right], \quad (4.63)$$

де $\hat{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, $\mathcal{L}^-$ — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора $\mathcal{L}$.

Підставляючи (4.63) у (4.60), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (4.58), (4.59)

$$\begin{aligned}
 z(t) &= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\left\{\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{c} + \mathcal{L}^{-}\left[\alpha - \ell f(\cdot) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \ell M(\cdot)D^{-}\int_a^b N(s)f(s)ds\right]\right\} + f(t) + M(t)D^{-}\int_a^b N(s)f(s)ds = \\
 &= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{c} + \left[f(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{L}^{-}\ell f(\cdot)\right] + \\
 &+ M(t)\left[I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{L}^{-}\ell M(\cdot)\right]D^{-}\int_a^b N(s)f(s)ds + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{L}^{-}\alpha = \\
 &= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{c} + (Gf)(t) + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{L}^{-}\alpha,
 \end{aligned}$$

де

$$(Gf)(t) := \left[f(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{L}^{-}\ell f(\cdot)\right] + \quad (4.64)$$

$$+ M(t)\left[I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{L}^{-}\ell M(\cdot)\right]D^{-}\int_a^b N(s)f(s)ds$$

— узагальнений оператор Гріна напіводнорідної ($\alpha = 0$) крайової задачі (4.58), (4.59), а оператор-функція $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ — є розв'язком відповідної (4.58), (4.59) однорідної крайової задачі.

Дійсно,

$$\begin{aligned}
 (Lz)(t) &= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} - M(t)\int_a^b N(s)\left\{M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\right\}ds = \\
 &= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} - M(t)A\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} = 0,
 \end{aligned}$$

оскільки $A = I_{\mathbf{B}_1} - D$, $D\mathcal{P}_{N(D)} = 0$, а

$$\ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)})\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} = \mathcal{L}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} = 0,$$

оскільки $\ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)}) = \mathcal{L}$, а $\mathcal{L}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} = 0$.

Отже, для крайової задачі (4.58), (4.59) справедлива наступна теорема.

Теорема 4.10. *Нехай оператори $D : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$ та $\mathcal{L} : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}$ — узагальнено оборотні.*

Тоді відповідна (4.58), (4.59) однорідна крайова задача має сім'ю розв'язків

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{c},$$

де $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ — оператор розв'язку однорідної крайової задачі (4.58), (4.59), $\hat{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Неоднорідна крайова задача (4.58), (4.59) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ та $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють умови

$$(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t) = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_L}[\alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds] = 0$$

і при цьому вона має сім'ю розв'язків

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{c} + (Gf)(t) + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{L}^-\alpha, \quad (4.65)$$

де G — узагальнений оператор Гріна (4.64) відповідної (4.58), (4.59) напіводнорідної ($\alpha = 0$) крайової задачі.

Приклад 4.6.

Знайдемо умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків крайової задачі

$$z(t) - M(t) \int_0^1 N(s)z(s)ds = f(t), \quad (4.66)$$

$$\ell z(\cdot) = \int_0^1 S(t)z(t)dt = \alpha, \quad (4.67)$$

де зліченновимірні матриці

$$M(t) = \text{diag}\{e^t, e^t, \dots, e^t, e^t, \dots\},$$

$$N(s) = \text{diag}\{s, 0, s, 0, \dots, s, 0, \dots\},$$

задовольняють умови прикладу 3.8, $f(t) \in \mathbf{C}([0, 1], \mathbf{c})$,

$$S(t) = \text{diag} \{S_{(2 \times 4)}(t), S_{(2 \times 4)}(t), \dots\} -$$

сильно неперервна оператор-функція, $S_{(2 \times 4)}(t) - (2 \times 4)$ -вимірна матриця:

$$S_{(2 \times 4)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & e^{-t} & 0 \\ (2t - 1)e^{-t} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|||S|||_{\mathbf{C}([0,1],\mathbf{c})} = \sup_{t \in [0,1]} \|S(t)\|_{\mathbf{c}} < \infty.$$

Таким чином, вектор-функціонал ℓ діє з банахового простору $\mathbf{C}([0, 1], \mathbf{c})$ у банаховий простір $\mathbf{c}$ і є обмеженим, $\alpha \in \mathbf{c}$, $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$.

У прикладі 4.4 отримано умови існування розв'язку зліченновимірної системи інтегральних рівнянь (4.66), які мають вигляд

$$\int_0^1 t f_{2k-1}(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.68)$$

При виконанні умов (4.68) операторне рівняння (4.66) має сім'ю розв'язків

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z})(t) + (L^- f)(t) = X(t) \int_0^1 \Gamma^*(s) \hat{z}(s) ds + \quad (4.69)$$

$$+f(t) + M_1(t) \int_0^1 N_1(s)f(s)ds,$$

де $\hat{z}(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{C}([0, 1], \mathbf{c})$,

$$X(t) = \text{diag} \{ X_{(4 \times 2)}(t), X_{(4 \times 2)}(t), \dots \},$$

$$\Gamma(t) = \text{diag} \{ \Gamma_{(4 \times 2)}(t), \Gamma_{(4 \times 2)}(t), \dots \},$$

$$X_{(4 \times 2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \end{pmatrix}^*, \quad \Gamma_{(4 \times 2)}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}^*,$$

$$M_1(t) = \text{diag} \{ M_{(2 \times 4)}(t), M_{(2 \times 4)}(t), \dots \},$$

$$N_1(s) = \text{diag} \{ N_{(4 \times 2)}(s), N_{(4 \times 2)}(s), \dots \};$$

$$M_{(2 \times 4)}(t) = \begin{pmatrix} 2(e^t - 1) & 0 & -e^t & -e^t \\ 0 & e^t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_{(4 \times 2)}(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & s & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

Оскільки розглядаються дійсні банахові простіри, то операція спряження $"^*$ " рівносильна операції транспонування $"^T"$.

Підставляючи загальний розв'язок (4.69) у крайову умову (4.66), отримаємо операторне рівняння

$$(\mathcal{L}\hat{z})(\cdot) + \ell(L^-f)(\cdot) = \alpha, \quad (4.70)$$

де оператор

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\hat{z})(\cdot) &= \ell \mathcal{P}_{N(L)} \hat{z}(\cdot) = \\ &= \int_0^1 S(t)X(t) \int_0^1 \Gamma^*(s)\hat{z}(s)ds dt = Q \int_0^1 \Gamma^*(s)\hat{z}(s)ds. \end{aligned}$$

Оператор

$$Q = \int_0^1 S(t)X(t)dt = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

діє з банахового простору $\mathbf{c}$ — збіжних обмежених послідовностей $x = \{\xi^{(i)}\}$ у простір $\mathbf{c}$ таких же послідовностей $y = \{\eta^{(i)}\}$, $Q : \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c}$.

Позначивши $\hat{z}_0 = \int_0^1 \Gamma^*(s) \hat{z}(s) ds$, запишемо операторне рівняння (4.70) у вигляді:

$$Q\hat{z}_0 = \alpha - \ell f(\cdot) - \ell M_1(\cdot) \int_0^1 N_1(s) f(s) ds. \quad (4.71)$$

Проектори $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{c} \rightarrow Y_Q$ та $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{c} \rightarrow N(Q)$ мають вигляд:

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

і, очевидно, обмежені.

Отже оператор Q — узагальнено оборотний і, як наслідок, нормально розв'язний. Тому за теоремою 4.1 для розв'язності рівняння (4.71) необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\mathcal{P}_{Y_Q} \left\{ \alpha - \ell f(\cdot) - \ell M_1(\cdot) \int_0^1 N_1(s) f(s) ds \right\} = 0.$$

Після перетворень отримаємо, що компоненти вектора $\alpha \in \mathbf{c}$ та вектор-функції $f(t) \in \mathbf{C}([0, 1], \mathbf{c})$ повинні задовольняти умовам:

$$\alpha_{2k} - \int_0^1 (2t - 1) e^{-t} f_{4k-3}(t) dt - \frac{6 - 2e}{e} \int_0^1 t f_{8k-7}(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

При виконанні цих умов операторне рівняння (4.71) буде мати розв'язок

$$\hat{z}_0 = \mathcal{P}_{N(Q)} c + Q^{-1} \left\{ \alpha - \ell f(\cdot) - \ell M_1(\cdot) \int_0^1 N_1(s) \varphi(s) ds \right\} \quad (4.72)$$

де c — довільний елемент простору $\mathfrak{C}$,

$$Q^- = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\} -$$

узагальнено-обернений оператор до оператора Q , побудований у прикладі 4.1.

Підставивши знайдене $\hat{z}_0$ з (4.72) замість $\int_0^1 \Gamma^*(s)\hat{z}(s)ds$ у (4.69), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (4.66), (4.67)

$$\begin{aligned} z(t) = & X(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + f(t) - X(t)Q^-\ell f(\cdot) - \\ & - X(t)Q^-\ell M_1(\cdot) \int_0^1 N_1(s)\varphi(s)ds + M_1(t) \int_0^1 N_1(s)\varphi(s)ds + X(t)Q^-\alpha. \end{aligned}$$

Таким чином, крайова задача (4.66), (4.67) буде мати розв'язки тоді і лише тоді, коли компоненти елемента α та вектор-функції $f(t)$ будуть задовольняти умови

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t f_{2k-1}(t)dt = 0, \\ \alpha_{2k} - \int_0^1 (2t-1)e^{-t}f_{4k-3}(t)dt - \frac{6-2e}{e} \int_0^1 t f_{8k-7}(t)dt &= 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots, \end{aligned}$$

при виконанні яких вона матиме сім'ю розв'язків:

$$\begin{aligned} z(t) = & X(t)\mathcal{P}_{N(Q)}c + [f(t) - X(t)Q^-\ell f(\cdot)] + \\ & + [M_1(t) - X(t)Q^-\ell M_1(\cdot)] \int_0^1 N_1(s)f(s)ds + X(t)Q^-\alpha. \end{aligned}$$

4.4.2. Крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у гільбертових просторах. Нехай $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ — дійсний гільбертовий простір вектор-функцій $z(t)$ зі значеннями в дійсному гільбертовому просторі $\mathbf{H}_1$.

Розглянемо умови розв'язності та вигляд загального розв'язку лінійної крайової задачі

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds = f(t), \quad (4.73)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad (4.74)$$

де $M(t) = \{m_{ij}(t)\}_{i,j=1}^\infty$ та $N(t) = \{n_{ij}(t)\}_{i,j=1}^\infty$ — зліченновимірні матриці, компоненти яких задовольняють умови (3.40), (3.41) оператор ℓ діє з гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ у сепарабельний гільбертів простір $\mathbf{H}$, $\ell : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1) \rightarrow \mathbf{H}$, $\alpha \in \mathbf{H}$.

Розв'язок $z(t)$ крайової задачі (4.73), (4.74) будемо шукати у гільбертовому просторі $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$.

З теореми 4.6 маємо, що при нормальній розв'язності оператора $D = I_{\mathbf{B}_1} - A$, $A = \int_a^b N(s)M(s)ds$ та при виконанні умови

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \Phi(t)\beta^{-1} \int_a^b \Phi^*(s)f(s)ds = 0 \quad (4.75)$$

операторне рівняння (4.73) розв'язне і має сім'ю розв'язків

$$z(t) = X(t)c + (L^+f)(t), \quad (4.76)$$

де $X(t)$ — оператор розв'язку відповідного (4.73) однорідного інтегрального рівняння, c — довільний елемент підпростору $N_0(D)$,

$$(L^+f)(t) = f(t) + M(t)D^+ \int_a^b N(s)f(s)ds - M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)} \int_a^b M^*(s)f(s)ds +$$

$$+M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)}\int_a^b N(s)f(s)ds - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\int_a^b N(s)f(s)ds$$

— єдиний обмежений псевдообернений оператор до оператора L , визначений формулою (3.49).

Підставивши розв'язок (4.76) неоднорідного операторного рівняння (4.73) у крайову умову, отримаємо операторне рівняння

$$\begin{aligned} \ell X(\cdot)c + \ell f(\cdot) + \ell M(\cdot)D^+ \int_a^b N(s)f(s)ds - \\ - \ell M(\cdot)\tilde{\alpha}^{(-1)} \int_a^b M^*(s)f(s)ds + \\ + \ell M(\cdot)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds - \ell N^*(\cdot)\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds = \alpha. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Позначимо через $\mathcal{L} = \ell X(\cdot)$ — оператор, який діє з підпростору $N_0(D)$ у гільбертів простір $\mathbf{H}$. Оператор $\mathcal{L}$ — обмежений як суперпозиція обмеженого оператора ℓ та обмеженої оператор-функції $X(t)$.

Тоді рівняння (4.77) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \mathcal{L}c = \alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot)D^+ \int_a^b N(s)f(s)ds + \\ + \ell M(\cdot)\tilde{\alpha}^{(-1)} \int_a^b M^*(s)f(s)ds - \\ - \ell M(\cdot)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds + \ell N^*(\cdot)\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Нехай оператор $\mathcal{L}$ — нормально розв'язний. Позначимо $P_{N(\mathcal{L})} : N_0(D) \rightarrow N(\mathcal{L})$ — ортопроектор гільбертового простору $\mathbf{H}_1$ на нуль-простір

оператора $\mathcal{L}$, $P_{N(\mathcal{L}^*)} : \mathbf{H} \rightarrow N(\mathcal{L}^*)$ — ортопроектор гільбертового простору $\mathbf{H}$ на нуль-простір $N(\mathcal{L}^*) \subset \mathbf{H}$, $\mathcal{L}^+$ — єдиний псевдообернений оператор до оператора $\mathcal{L}$.

Тоді із зауваження 4.2 до теореми 4.1 маємо, що нормально розв'язне операторне рівняння (4.78) розв'язне відносно $c \in N_0(D) \subseteq \mathbf{H}_1$ тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\begin{aligned} & P_{N(\mathcal{L}^*)} \left\{ \alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot) D^+ \int_a^b N(s) f(s) ds + \right. \\ & + \ell M(\cdot) \tilde{\alpha}^{(-1)} \int_a^b M^*(s) f(s) ds - \ell M(\cdot) \tilde{\alpha}^{(-1)} \tilde{\beta}^{(-1)} \times \\ & \times \left. \int_a^b N(s) f(s) ds + \ell N^*(\cdot) \tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s) f(s) ds \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.79)$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$\begin{aligned} c = P_{N(\mathcal{L})} \hat{c} + \mathcal{L}^+ \left\{ \alpha - \ell f(\cdot) - \ell M(\cdot) D^+ \int_a^b N(s) f(s) ds + \right. \\ & + \ell M(\cdot) \tilde{\alpha}^{(-1)} \int_a^b M^*(s) f(s) ds - \ell M(\cdot) \tilde{\alpha}^{(-1)} \tilde{\beta}^{(-1)} \times \\ & \times \left. \int_a^b N(s) f(s) ds + \ell N^*(\cdot) \tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s) f(s) ds \right\}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

де $\hat{c}$ — довільний елемент підпростору $N_0(D)$.

Підставивши (4.80) у (4.76), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (4.73), (4.74)

$$z(t) = X(t) P_{N(\mathcal{L})} \hat{c} + (Gf)(t) + X(t) \mathcal{L}^+ \alpha.$$

де оператор-функція $z(t) = X(t)P_{N(\mathcal{L})}$ — є оператором розв'язку відповідної (4.73), (4.74) однорідної крайової задачі, $(Gf)(t)$ — узагальнений оператор Гріна напіводнорідної ($\alpha = 0$) крайової задачі (4.73), (4.74), який діє на функцію $f(t)$ за правилом

$$\begin{aligned} (Gf)(t) := & [f(t) - X(t)\mathcal{L}^+\ell f(\cdot)] + \widetilde{M}(t)D^+ \int_a^b N(s)f(s)ds - \\ & - \widetilde{M}(t)\tilde{\alpha}^{(-1)} \int_a^b M^*(s)f(s)ds + \widetilde{M}(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds - \\ & - [N^*(t) - X(t)\mathcal{L}^+\ell N^*(\cdot)]\tilde{\beta}^{(-1)} \int_a^b N(s)f(s)ds, \end{aligned} \quad (4.81)$$

де

$$\widetilde{M}(t) = M(t) - X(t)\mathcal{L}^+\ell M(\cdot).$$

Теорема 4.11. *Нехай $D : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_1$ та $\mathcal{L} : \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}$ — нормально розв'язні оператори.*

Тоді відповідна (4.73), (4.74) однорідна крайова задача має сім'ю лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t) = X(t)P_{N(\mathcal{L})}\hat{c},$$

де $\hat{c}$ — довільний елемент підпростору $N_0(D)$.

Неоднорідна крайова задача (4.73), (4.74) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ та $\alpha \in \mathbf{H}$, які задовольняють умови (4.75), (4.79), при виконанні яких вона має загальний розв'язок

$$z(t) = X(t)P_{N(\mathcal{L})}\hat{c} + (Gf)(t) + M(t)P_{N_0(D)}\mathcal{L}^+\alpha,$$

де G — узагальнений оператор Гріна (4.81).

У випадку, коли оператор діє у скінченновимірних гільбертових просторах, теорема 4.11 дещо спрощується і конкретизується.

Розглянемо лінійну крайову задачу

$$(Lx)(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (4.82)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad (4.83)$$

де $L : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ — інтегральний оператор Фредгольма другого роду з виродженим ядром

$$(Lx)(t) \equiv z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds, \quad (4.84)$$

$\ell = \text{col}(l_1, l_2, \dots, l_k) : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^k$ — k -вимірний векторний функціонал, який діє з простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ — сумовних з квадратом на проміжку $\mathcal{I} = [a, b]$ функцій у k -вимірний векторний простір $\mathbf{R}^k$, $\alpha \in \mathbf{R}^k$. Стовпці $(n \times m)$ -вимірної матриці $M(t)$, рядки $(m \times n)$ -вимірної матриці $N(t)$, вектори $z(t)$ і $f(t)$ належать гільбертовому простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$. Знайдемо умови розв'язності і формули для представлення розв'язків крайової задачі (4.82), (4.83) з допомогою псевдооберненого оператора L^+ (3.54) до оператора L , який був побудований у п. 3.3.3.

За теоремою 4.7 маємо, що інтегральне рівняння (4.82) з виродженим ядром при виконанні умови

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \Phi_r(t)\beta^{-1} \int_a^b \Phi_r^*(s)f(s)ds = 0 \quad (4.85)$$

має розв'язок

$$z(t) = X_r(t)c_r + f(t) + M_1(t) \int_a^b N_1(s)f(s)ds, \quad (4.86)$$

де $c_r \in R^r$ — довільний вектор, а матриці $M_1(t)$ та $N_1(t)$ визначені у підрозділі 3.3.3..

Зазначимо, що умова розв'язності (4.85) еквівалентна умові

$$\int_a^b \Phi_r^*(s) f(s) ds = 0,$$

оскільки $\Phi_r(t)\beta^{-1} \neq 0, \forall t \in [a, b]$.

Для того, щоб рівняння (4.82) мало розв'язки, що задовольняють умовам (4.83) необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна система

$$Qc_r = \alpha - \ell \left\{ f(\cdot) + M_1(\cdot) \int_a^b N_1(s) f(s) ds \right\}, \quad (4.87)$$

яка отримується підстановкою розв'язку (4.86) інтегрального рівняння (4.82) у крайові умови (4.83), була розв'язна відносно c_r . Тут $Q = \ell X_r(\cdot)$ — $(k \times r)$ -вимірна стала матриця.

Нехай Q^+ — єдина $(r \times k)$ -вимірна псевдообернена матриця до матриці Q , $P_{N(Q)} : \mathbf{R}^r \rightarrow N(Q)$ — $(r \times r)$ -вимірна матриця-ортопроектор; $P_{N(Q^*)} : \mathbf{R}^k \rightarrow N(Q^*)$ — $(k \times k)$ -вимірна матриця-ортопроектор.

Позначимо через $P_{N_\rho(Q)}$ — $(r \times \rho)$ -вимірну матрицю, стовпці якої є ρ -лінійно-незалежними стовпцями матриці $P_{N(Q)}$ ($\rho = r - n_1$, $n_1 = \text{rank } Q$), $P_{N_d(Q^*)}$ — $(d \times k)$ -вимірну матрицю, рядки якої є d -лінійно-незалежними рядками матриці $P_{N(Q^*)}$ ($d = k - n_1$).

Система (4.87) розв'язна тоді і лише тоді, коли виконується умова:

$$P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell \left[f(\cdot) + M_1(\cdot) \int_a^b N_1(s) f(s) ds \right] \right\} = 0$$

і при цьому має ρ — параметричну сім'ю розв'язків

$$c_r = P_{N_\rho(Q)} c_\rho - Q^+ \left\{ \alpha - \ell \left[f(\cdot) + M_1(\cdot) \int_a^b N_1(s) f(s) ds \right] \right\}, \quad (4.88)$$

де $c_\rho \in \mathbf{R}^\rho$.

Підставивши (4.88) у загальний розв'язок (4.86) рівняння (4.82), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (4.82), (4.83):

$$\begin{aligned} z(t) &= X_r(t)P_{N_\rho(Q)}c_\rho + X_r(t)Q^+\alpha - X_r(t)Q^+\ell[f(\cdot) + \\ &+ M_1(\cdot) \int_a^b N_1(s)f(s)ds] + f(t) + M_1(t) \int_a^b N_1(s)f(s)ds = \\ &= X_\rho(t)c_\rho + (Gf)(t) + X_r(t)Q^+\alpha, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} (Gf)(t) &:= [f(t) - X_r(t)Q^+\ell f(\cdot)] + \\ &+ [M_1(t) - X_r(t)Q^+\ell M_1(\cdot)] \int_a^b N_1(s)f(s)ds \end{aligned}$$

— узагальнений оператор Гріна напіводнорідної ($\alpha = 0$) крайової задачі (4.82), (4.83). Позначивши $\bar{f}(t) = f(t) - X_r(t)Q^+\ell f(\cdot)$; $\bar{M}_1(t) = M_1(t) - X_r(t)Q^+\ell M_1(\cdot)$, узагальнений оператор Гріна запишемо у вигляді

$$(Gf)(t) = \bar{f}(t) + \bar{M}_1(t) \int_a^b N_1(s)f(s)ds. \quad (4.89)$$

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 4.12. *Нехай $\text{rank } Q = n_1 \leq \min(k, r)$. Тоді відповідна (4.82), (4.83) однорідна крайова задача ($f(t) = 0$, $\alpha = 0$) має $\rho = r - n_1$ і тільки ρ лінійно-незалежних розв'язків*

$$z(t) = X_\rho(t)c_\rho,$$

де $X_\rho(t) = X_r(t)P_{N_\rho(Q)}$, $c_\rho \in \mathbf{R}^\rho$ — довільний вектор-стовпець.

Неоднорідна крайова задача (4.82), (4.83) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_2^n[a, b]$ і $\alpha \in \mathbf{R}^k$, які задовольняють $r + d$ ($d = k - n_1$) лінійно-незалежним умовам

$$\int_a^b \Phi_r^*(s) f(s) ds = 0,$$

$$P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell[f(\cdot) + M_1(\cdot) \int_a^b N_1(s) f(s) ds] \right\} = 0$$

і при цьому має ρ -параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t) = X_\rho(t) c_\rho + (Gf)(t) + X_r(t) Q^+ \alpha,$$

де $(Gf)(t)$ — узагальнений оператор Гріна (4.89).

У випадку, коли $\text{rank } Q = r$ ($k \leq r$) для крайової задачі (4.82), (4.83) справедлива наступна теорема.

Теорема 4.13. Нехай $\text{rank } Q = r$. Тоді відповідна (4.82), (4.83) однорідна крайова задача не має розв'язків, крім тривіального.

Неоднорідна крайова задача (4.82), (4.83) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_2^n[a, b]$ і $\alpha \in \mathbf{R}^k$, які задовольняють k лінійно-незалежні умови

$$\int_a^b \Phi_r^*(s) f(s) ds = 0,$$

$$P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell[f(\cdot) + M_1(\cdot) \int_a^b N_1(s) f(s) ds] \right\} = 0, \quad d = k - r$$

і при цьому має єдиний розв'язок:

$$z(t) = (Gf)(t) + X_r(t) Q^+ \alpha,$$

де G — узагальнений оператор Гріна (4.89).

Дійсно, оскільки $\text{rank } Q = r$, то $P_{N_\rho(Q)} = 0$ і $X_\rho(t) = X_r(t)P_{N_\rho(Q)} \equiv 0$, а, оскільки $d = k - r$, то $r + d = k$. Тоді з теореми 4.12 маємо твердження теореми 4.13.

У випадку, коли $\text{rank } Q = k$ ($k \geq r$) для крайової задачі (4.82), (4.83) справедлива наступна теорема.

Теорема 4.14. *Нехай $\text{rank } Q = k$. Тоді відповідна (4.82), (4.83) однорідна крайова задача має $\rho = r - k$ і тільки ρ лінійно-незалежних розв'язків*

$$z(t) = X_\rho(t)c_\rho,$$

де $X_\rho(t) = X_r(t)P_{N_\rho(Q)}$ — $(n \times \rho)$ -вимірний фундаментальний матриця, $c_\rho \in \mathbf{R}^\rho$ — довільний вектор-стовпець.

Неоднорідна крайова задача (4.82), (4.83) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_2^n[a, b]$, які задовольняють r лінійно-незалежним умовам

$$\int_a^b \Phi_r^*(s)f(s)ds = 0$$

і при цьому має $\rho = r - k$ -параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t) = X_\rho(t)c_\rho + (Gf)(t) + X_r(t)Q^+\alpha,$$

де $X_\rho(t) = X_r(t)P_{N_\rho(Q)}$, G — узагальнений оператор Гріна (4.89).

Оскільки $\text{rank } Q = k$, то $P_{N(Q^*)} = P_{N_d(Q^*)} = 0$ і з теореми 4.12 маємо твердження теореми 4.14.

Приклад 4.7.

Розглянемо крайову задачу

$$Lz(t) = z(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & s - \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} z(s)ds = f(t), \quad (4.90)$$

$$\ell z(\cdot) = z(0) - z(2) = 0 \quad (4.91)$$

де $z(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t))$ і $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t))$ належать простору $\mathbf{L}_2^2[0, 2]$, $t \in [0, 2]$.

За умови

$$(P_{N(L^*)}f)(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t}{4} \\ \frac{6t-3}{7} & 0 \end{pmatrix} \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{s-1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} f(s) ds = 0 \quad (4.92)$$

загальний розв'язок рівняння (4.90) має вигляд:

$$z(t) = X_r(t)c_r + (L^+f)(t) = \begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c_r + (L^+f)(t), c_r \in \mathbf{R}^2,$$

де $(L^+f)(t)$ побудований у прикладі 4.5,

$$(L^+f)(t) = f(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2t-5}{12} & 0 & \frac{-3(t-1)}{2} & 0 & \frac{1-t}{6} \\ \frac{3-24t}{7} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix} \times \quad (4.93)$$

$$\times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ s-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds.$$

Враховуючи, що $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t))$, умову (4.92) можна записати

$$\int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{s-1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds = \int_0^2 \begin{pmatrix} \frac{s-1}{2} \cdot f_2(s) \\ \frac{3s}{2} \cdot f_1(s) \end{pmatrix} ds = 0.$$

Знайдемо тепер умови розв'язності і загальний вигляд розв'язку крайової задачі (4.90), (4.91).

Підставивши загальний розв'язок інтегрального рівняння (4.90) у крайові умови (4.91) отримаємо алгебраїчне рівняння

$$Qc_r = -(L^+f)(0) + (L^+f)(2) \quad (4.94)$$

для визначення константи c_r .

Для цієї задачі маємо:

$$Q = X_r(0) - X_r(2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$P_{N(Q)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad P_{N(Q^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\text{rank } Q = 1$, а $\rho = 1$, то $P_{N_\rho(Q)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_{N_\rho(Q^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рівняння (4.94), розв'язне при виконанні умови

$$P_{N_\rho(Q^*)} \{ (L^+f)(0) - (L^+f)(2) \} = 0,$$

яка з урахуванням того, що $P_{N_\rho(Q^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, а $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t))$ набере вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(2) \\ f_2(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{48}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \right. \\ \left. \times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} ds \right\} = 0.$$

Після перетворень отримаємо:

$$f_2(0) - f_2(2) + \frac{24}{7} \int_0^2 (s-1)f_2(s)ds = 0. \quad (4.95)$$

При виконанні умови (4.95) рівняння (4.94) має розв'язок:

$$c_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_\rho - Q^+ \left\{ f(0) - f(2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{48}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \right. \\ \left. \times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds \right\}, \quad c_\rho \in \mathbf{R}^1.$$

Таким чином, задача (4.90), (4.91) розв'язна при виконанні умов (4.92), (4.95) і має загальний розв'язок

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_\rho + \begin{pmatrix} \frac{1-t}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \{f(0) - f(2)\} + f(t) + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3-24t}{7} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{-6}{7} & 0 \end{pmatrix} \times \\ \times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds, \quad c_\rho \in \mathbf{R}^1.$$

Приклад 4.8.

Розглянемо крайову задачу для рівняння (4.90) з крайовими умовами

$$\ell z(\cdot) = \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} \end{pmatrix} z(t) dt = \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}^3. \quad (4.96)$$

Підставивши розв'язок рівняння (4.90) у крайові умови (4.96), отримаємо алгебраїчне рівняння відносно c_r

$$Qc_r = \alpha - \ell L^+ f(\cdot) = \alpha - \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3s}{2} & 0 \\ 0 & \frac{s}{2} \end{pmatrix} f(s) ds - \quad (4.97)$$

$$- \overline{M}_1 \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds,$$

де

$$Q = \ell X_r(\cdot) = \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dt;$$

$$\overline{M}_1 = \ell M_1(\cdot) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{12} & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{29}{7} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

Після обчислень для цієї крайової задачі маємо:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{N(Q)} = 0, \quad P_{N(Q^*)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\text{rank } Q = 2$, $\rho = 2$, то $P_{N_\rho(Q)} = 0$; $P_{N_d(Q^*)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Тоді рівняння (4.97) розв'язне при виконанні умови:

$$P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell [f(\cdot) + M_1(\cdot) \int_0^2 N_1(s) f(s) ds] \right\} = 0,$$

яка з урахуванням того, що

$$P_{N_d(Q^*)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t)), \quad \alpha = \text{col}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

набере вигляду:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} - \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} dt - \right. \\ & \quad - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{12} & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{29}{7} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \quad \left. \times \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3t}{2} & 0 & t-1 & 0 & \frac{3t}{2} \\ \frac{t-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & t-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} dt \right\} = 0. \end{aligned}$$

Після перетворень отримаємо:

$$\alpha_1 - \alpha_3 + \frac{1}{14} \int_0^2 (s-1) f_2(s) ds = 0. \quad (4.98)$$

При виконанні умови (4.98) рівняння (4.97) має єдиний розв'язок:

$$\begin{aligned} c_r = Q^+ & \left\{ \alpha - \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} \end{pmatrix} f(t) dt - \right. \\ & \left. - \overline{M}_1 \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Таким чином, крайова задача (4.90), (4.96) розв'язна при виконанні умов (4.92), (4.98) і має єдиний розв'язок:

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0 & t-1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left\{ \alpha - \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} \end{pmatrix} f(t) dt - \right. \\ \left. - \overline{M}_1 \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds \right\} + (L^+ f)(t),$$

де $(L^+ f)(t)$ обчислюється за формулою (4.93).

Приклад 4.9.

Розглянемо крайову задачу для рівняння (4.90) з крайовими умовами

$$\ell z(\cdot) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} z(0) + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} z(2) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}^1. \quad (4.99)$$

Підставивши розв'язок рівняння (4.90) у крайові умови (4.99), отримаємо алгебраїчне рівняння відносно c_r

$$Q c_r = \alpha - \ell L^+ f(\cdot) = \alpha - \overline{f} - \quad (4.100)$$

$$- \overline{M}_1 \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds,$$

де

$$Q = \ell X_r(\cdot) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} X_r(0) + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} X_r(2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\overline{f} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} f(0) + \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} f(2);$$

$$\overline{M}_1 = \ell M_1(\cdot) = \begin{pmatrix} \frac{96}{7} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -3 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Для цієї крайової задачі маємо:

$$Q^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_{N(Q)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{N(Q^*)} = 0.$$

$$\text{rank } Q = 1, \quad \rho = 1, \quad d = 0, \quad \text{тому } P_{N_\rho(Q)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_{N_d(Q^*)} = 0.$$

Оскільки $P_{N_d(Q^*)} = 0$, то рівняння (4.100), розв'язне при будь-якій правій частині і має загальний розв'язок вигляду:

$$c_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_\rho + Q^+ \left\{ \alpha - \bar{f} - \right. \\ \left. - \overline{M}_1 \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds \right\}.$$

Таким чином, крайова задача (4.90), (4.99) розв'язна при виконанні умови (4.92) і має загальний розв'язок вигляду:

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_\rho + \begin{pmatrix} \frac{t-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \left\{ \alpha - \bar{f} - \right. \\ \left. - \overline{M}_1 \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3s}{2} & 0 & s-1 & 0 & \frac{3s}{2} \\ \frac{s-1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & s-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^* f(s) ds \right\} + (L^+ f)(t).$$

де $c_\rho \in \mathbf{R}^1$, а псевдообернений оператор L^+ має вигляд (4.93).

4.5. Узагальнений оператор Гріна та його властивості

Використовуючи підхід, запропонований у [281], крайову задачу (4.34), (4.35) можна розглядати як операторне рівняння

$$(Lz)(t) = \left(\begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} z \right) (t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ \alpha \end{bmatrix} = \varphi(t)$$

з лінійним обмеженим нормально розв'язним оператором $A = \text{col}[L, \ell]$, який діє з банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ у прямий добуток $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}$ функціонального банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і банахового простору $\mathbf{B}$, $A : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}$.

Оператор $A : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}$ буде обмеженим, якщо норму у просторі $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}$ визначити

$$\|(f, \alpha)\|_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}} = \|f\|_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} + \|\alpha\|_{\mathbf{B}}, \quad f \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2), \quad \alpha \in \mathbf{B}.$$

Розглянемо деякі властивості узагальненого оператора Гріна

$$(Gf)(t) := (L^- f)(t) - (\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^- \ell(L^- f)(\cdot))(t) \quad (4.101)$$

та його зв'язок з оператором A .

З метою спрощення записів у подальшому не будемо писати дужки та змінні.

Лема 4.1. *Узагальнений оператор Гріна G задовольняє співвідношенню*

$$AG = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_L} \ell L^- \end{bmatrix}. \quad (4.102)$$

Доведення. Дійсно, підставивши у (4.102) замість оператора G його вираз (4.101), отримаємо:

$$\begin{aligned} AG &= \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} [L^- - \mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^- \ell L^-] = \begin{bmatrix} L(L^- - \mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^- \ell L^-) \\ \ell(L^- - \mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^- \ell L^-) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} LL^- - L\mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^- \ell L^- \\ \ell L^- - \ell \mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^- \ell L^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LL^- \\ (I_{\mathbf{B}} - \mathcal{L} \mathcal{L}^-) \ell L^- \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_L} \ell L^- \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

оскільки

$$L\mathcal{P}_{N(L)} = 0, \quad \ell \mathcal{P}_{N(L)} = \mathcal{L}, \quad I_{\mathbf{B}} - \mathcal{L} \mathcal{L}^- = \mathcal{P}_{Y_L}.$$

Зауваження 4.10. У випадку, коли рівняння $Lz = f$ всюди розв'язне, властивість (4.102) набере вигляду:

$$\Lambda G = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}} \ell L_r^{-1} \end{bmatrix},$$

оскільки $R(L) = \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$, а за наслідком 3.2 з теореми 3.4 $L^- = L_r^{-1}$.

Теорема 4.15. Оператор

$$\Lambda^- = [G \quad \mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^-] \quad (4.103)$$

є обмеженим узагальнено-оберненим до лінійного обмеженого оператора $\Lambda = \text{col} [L \quad \ell]$.

Доведення. Як показано вище, при виконанні умов (4.43), (4.44) крайова задача

$$\Lambda z = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix}$$

розв'язна і її розв'язок має вигляд (4.45).

Тоді для обмеженого узагальнено-оберненого оператора

$$\Lambda^- : \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$$

маємо вигляд

$$\Lambda^- \varphi = \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix}^- \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix} = Gf + \mathcal{P}_{N(L)} \mathcal{L}^- \alpha.$$

Покажемо, що оператор Λ^- задовольняє властивостям:

$$1. \Lambda^- \Lambda \Lambda^- = \Lambda^-; \quad 2. \Lambda \Lambda^- \Lambda = \Lambda,$$

які визначають узагальнено-обернений оператор. Як підкреслено у [68] друга властивість є наслідком першої. Тому покажемо, що оператор Λ^-

задовольняє властивості $\Lambda^- \Lambda \Lambda^- = \Lambda^-$. Оскільки, $L\mathcal{P}_{N(L)} \equiv 0$, $\ell\mathcal{P}_{N(L)} = \mathcal{L}$, то:

$$\begin{aligned} \Lambda \Lambda^- &= \begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} [G \quad \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-] = \begin{bmatrix} LG & L\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^- \\ \ell G & \ell\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^- \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ \mathcal{P}_{Y_L}\ell L^- & \mathcal{L}\mathcal{L}^- \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Із співвідношень $L^-\mathcal{P}_{Y_L} = 0$, $\mathcal{L}^-\mathcal{P}_{Y_L} = 0$, $G\mathcal{P}_{Y_L} = 0$ маємо, що

$$\begin{aligned} \Lambda^- \Lambda \Lambda^- &= [G \quad \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-] \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ \mathcal{P}_{Y_L}\ell L^- & \mathcal{L}\mathcal{L}^- \end{bmatrix} = \\ &= [G(I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_L}) + \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\mathcal{P}_{Y_L}\ell L^- \quad \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\mathcal{L}\mathcal{L}^-] = \\ &= [G - G\mathcal{P}_{Y_L} + \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\mathcal{P}_{Y_L}\ell L^- \quad \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-] = [G \quad \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-] = \Lambda^-. \end{aligned}$$

Обмеженість оператора Λ^- виходить з обмеженості операторів L^- , G та $\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-$. Таким чином, оператор $\Lambda^- : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ є обмеженим узагальнено-оберненим до оператора Λ .

Теорема 4.16. *Оператор*

$$\mathcal{P}_{N(\Lambda)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_L}\ell L^- & \mathcal{P}_{Y_L} \end{bmatrix}$$

є обмеженим проектором банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ на підпростір $Y_\Lambda \subseteq \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}$.

Доведення. Використовуючи формулу $\Lambda \Lambda^- = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}} - \mathcal{P}_{Y_\Lambda}$, що зв'язує узагальнено-обернений оператор Λ^- і проектор $\mathcal{P}_{Y_\Lambda}$ [225], а також властивість (4.102) узагальненого оператора Гріна, знайдемо проектор $\mathcal{P}_{Y_\Lambda}$, який має блокову структуру:

$$\mathcal{P}_{Y_\Lambda} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathbf{B}} - \Lambda \Lambda^- =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} I_{\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} & 0 \\ 0 & I_{\mathbf{B}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ \mathcal{P}_{Y_L} \ell L^- & \mathcal{L} \mathcal{L}^- \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_L} \ell L^- & I_{\mathbf{B}} - \mathcal{L} \mathcal{L}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_L} \ell L^- & \mathcal{P}_{Y_L} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{P}_{Y_A}$ дійсно є проектором, оскільки задовольняє властивості $\mathcal{P}_{Y_A}^2 = \mathcal{P}_{Y_A}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{Y_A}^2 &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_L} \ell L^- & \mathcal{P}_{Y_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_L} \ell L^- & \mathcal{P}_{Y_L} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}^2 & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_L} \ell L^- \mathcal{P}_{Y_L} - \mathcal{P}_{Y_L}^2 \ell L^- & \mathcal{P}_{Y_L}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_L} \ell L^- & \mathcal{P}_{Y_L} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{Y_A}.
\end{aligned}$$

Обмеженість проектора $\mathcal{P}_{Y_A}$ випливає з обмеженості проекторів $\mathcal{P}_{Y_L}$, $\mathcal{P}_{Y_C}$, функціоналу ℓ та узагальнено-оберненого оператора L^- , які входять в його блокову структуру.

Очевидно, що умова

$$\mathcal{P}_{Y_A} f = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_L} \ell L^- & \mathcal{P}_{Y_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix} = 0,$$

еквівалентна умовам розв'язності (4.43), (4.44) крайової задачі (4.34), (4.35).

Зауваження 4.11. Якщо операторне рівняння (4.34) в крайовій задачі (4.34), (4.35) є всюди розв'язним, то проектор $\mathcal{P}_{Y_A}$ має вигляд

$$\mathcal{P}_{Y_A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_L} \ell L_r^{-1} & \mathcal{P}_{Y_L} \end{bmatrix},$$

оскільки в цьому випадку $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$, а за наслідком 3.2 з теореми 3.4 $L^- = L_r^{-1}$.

Висновки до четвертого розділу

У четвертому розділі доведено теореми про необхідні та достатні умови існування та структуру загальних розв'язків лінійних операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами та крайових задач для них у банахових та гільбертових просторах. Загальні підходи застосовані при розгляді необхідних та достатніх умов існування та вигляду загальних розв'язків операторних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром та лінійних крайових задач для них у банахових та гільбертових просторах.

Для цих задач:

1. З використанням формул для узагальнено-обернених та псевдообернених операторів, проекторів та ортопроекторів отримані умови існування розв'язків лінійних не всюди розв'язних операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами у банахових та гільбертових просторах, наведені формули для представлення їх загальних розв'язків.
2. Використовуючи формули для проекторів, ортопроекторів, узагальнено-обернених та псевдообернених операторів до інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах, отримано необхідні та достатні умови існування та вигляд загальних розв'язків цих рівнянь.
3. З використанням теорем про необхідні та достатні умови існування розв'язків операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами, знайдено умови існування розв'язків лінійних крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах. Наведені формули для представлення загальних розв'язків таких крайових задач за допомогою побудованого узагальненого оператора Гріна.

4. З використанням формул для узагальнено-обернених та псевдообернених операторів, проекторів та ортопроекторів отримано умови існування та формули для представлення за допомогою узагальненого оператора Гріна загальних розв'язків лінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах.
5. Використовуючи формули для проекторів, ортопроекторів та узагальнено-обернених операторів до інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром, знайдено умови існування розв'язків лінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах. Отримано формули для представлення загального розв'язку з використанням побудованого узагальненого оператора Гріна напіводнорідної крайової задачі.
6. Досліджено властивості узагальненого оператора Гріна та його зв'язок з узагальнено-оберненим оператором до оператора, який задає лінійну крайову задачу.

РОЗДІЛ 5

СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Дослідження умов розв'язності і побудова розв'язків слабконелінійних крайових задач

$$(Lz)(t) = f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad (5.1)$$

$$\ell z = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon).$$

для різних класів операторних рівнянь бере свій початок з робіт І. Г. Малкіна [149] і Е. О. Гребеннікова, Ю. О. Рябова [69], де розглядалися задачі про побудову періодичних розв'язків слабконелінійних диференціальних систем. Метод розв'язку цих задач оснований на побудові узагальненого оператора Гріна відповідної (5.1) лінійної напівводнорідної ($\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$) крайової задачі. Цей метод був узагальнений при розгляді крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь та систем функціонально-диференціальних рівнянь у загальному нетеровому випадку [29], [41]. Суттєвою особливістю цих задач є та, що лінійна частина вихідного рівняння представлена всюди розв'язним оператором L .

Схема дослідження задачі (5.1) ґрунтується на використанні узагальненого обернення нормально розв'язних операторів та переході за допомогою методів типу Ляпунова-Шмідта від задачі (5.1) до операторної системи, для розв'язання якої застосовні збіжні ітераційні процедури, основані на принципі нерухомої точки [29], [69], [149].

Застосовуючи отримані у третьому розділі конструкції узагальнено-обернених L^- операторів у банахових і псевдообернених L^+ у гільбертових просторах, а також доведені у четвертому розділі теореми про розв'язність

лінійних крайових задач для операторних рівнянь з лінійними узагальнено оборотними операторами L , у цьому розділі розглянуто задачі про умови існування та способи побудови розв'язків слабконелінійних (з узагальнено оборотною лінійною частиною) операторних рівнянь та крайових задач для них, які застосовані до слабконелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром та крайових задач для них у банахових та гільбертових просторах.

5.1. Слабконелінійні операторні рівняння з узагальнено оборотною лінійною частиною

Спочатку розглянемо в загальному вигляді умови існування та представлення розв'язків слабконелінійних операторних рівнянь, лінійні частини яких є узагальнено оборотними операторами у банахових просторах.

Розглянемо нелінійне операторне рівняння з малим додатнім параметром ε , $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$

$$(Lz(\cdot, \varepsilon))(t) = f(t) + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon). \quad (5.2)$$

Разом з рівнянням (5.2) розглянемо породжуюче лінійне операторне рівняння

$$(Lz_0)(t) = f(t), \quad (5.3)$$

яке отримується з (5.2) при $\varepsilon = 0$.

Рівняння (5.2) будемо розглядати при умовах, що:

(b1) $L : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — лінійний обмежений узагальнено оборотний оператор;

(b2) Z — нелінійна по z обмежена вектор-функція, яка в околі породжуючого розв'язку $\|z - z_0\| \leq q$ неперервно диференційовна по z , неперервна по сукупності змінних z, t, ε, q і ε_0 — досить малі константи; (5.4)

$$(b3) \quad Z(0, t, 0) = 0, Z'_z(0, t, 0) = 0;$$

$$(b4) \quad f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2).$$

Розглянемо задачу про знаходження умов існування і алгоритмів побудови розв'язку $z = z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), z(t, \cdot) \in \mathbf{C}[0; \varepsilon_0]$ операторного рівняння (5.2), який обертається при $\varepsilon = 0$ в один з породжуючих розв'язків рівняння (5.3).

5.1.1. Необхідна умова існування розв'язків. Розглянемо умови розв'язності рівняння (5.2), коли породжуюче рівняння (5.3), має нетривіальні розв'язки.

Внаслідок узагальненої оборотності оператора L з теореми 4.1 маємо, що породжуюче рівняння (5.3), має розв'язки тоді і лише тоді, коли $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ задовольняє умові:

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0 \quad (5.5)$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, \hat{z}_0) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z}_0)(t) + (L^- f)(t), \quad (5.6)$$

де $\hat{z}_0(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $L^- : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \rightarrow \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — узагальнено-обернений оператор до оператора L .

Теорема 5.1. *Нехай умова розв'язності (5.5) породжуючого рівняння (5.3), виконана, а рівняння (5.2) задовольняє умови (b1) — (b4) з (5.4) і має розв'язок $z(t, \varepsilon)$, що належить простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ по t , неперервний по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, який обертається при $\varepsilon = 0$ в деякий породжуючий*

розв'язок (5.6), отриманий при $\hat{z}_0 = \hat{z}_0(t)$. Тоді елемент $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ задовольняє рівнянню

$$\mathcal{P}_{Y_L} Z(z_0(\cdot, \hat{z}_0), \cdot, 0)(t) = 0. \quad (5.7)$$

Доведення. Нехай виконані умови теореми. Тоді при всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ для рівняння (5.2) виконується умова розв'язності

$$\mathcal{P}_{Y_L} \{f(t) + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} = 0.$$

Враховуючи виконання умови (5.5), отримуємо, що нелінійна вектор-функція $Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{Y_L} Z(z(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)(t) = 0.$$

Зважаючи на неперервність по ε розв'язку $z(t, \varepsilon)$ і нелінійної вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$ по сукупності змінних z , t та ε , переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ отримаємо $z(t, \varepsilon) \rightarrow z_0(t, \hat{z}_0)$ та

$$\mathcal{P}_{Y_L} Z(z_0(\cdot, \hat{z}_0), \cdot, \varepsilon)(t) = 0.$$

Теорему доведено.

Позначивши ліву частину (5.7) через $(F\hat{z}_0)(t)$, запишемо це рівняння у вигляді

$$(F\hat{z}_0)(t) = \mathcal{P}_{Y_L} Z(z_0(\cdot, \hat{z}_0), \cdot, 0)(t) = 0. \quad (5.8)$$

Зауваження 5.1. У випадку періодичної крайової задачі в скінченновимірному просторі $\hat{z}_0$ — векторна константа $\hat{z}_0 = c \in R^n$, яка має фізичний зміст — це амплітуда коливань породжуючого розв'язку. Тому в класичній періодичній задачі для диференціальних систем рівняння, аналогічне рівнянню (5.8), називається рівнянням для породжуючих амплітуд [149].

По аналогії з цим рівняння (5.8) будемо називати рівнянням для породжуючих елементів операторного рівняння (5.2), оскільки якщо рівняння (5.8) має розв'язок $\hat{z}_0 = \hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, то елемент $\hat{z}_0(t)$ визначає той породжуючий розв'язок $z_0(t, \hat{z}_0)$, якому може відповідати розв'язок $z(t, \varepsilon)$ вихідного рівняння (5.2), яке обертається при $\varepsilon = 0$ у $z_0(t, \hat{z}_0)$. Якщо ж рівняння для породжуючих елементів не має розв'язків, то операторне рівняння (5.2) не має шуканого розв'язку.

5.1.2. Достатні умови існування розв'язків. Знайдемо достатні умови існування розв'язків операторного рівняння (5.2), які залежать від розв'язності породжуючого рівняння (5.3).

Відносно породжуючого рівняння (5.3) можливі випадки:

1. Рівняння всюди і однозначно розв'язне, тобто $N(L) = N(L^*) = \{0\}$ і існує обмежений обернений оператор L^{-1} ;

2. Рівняння не всюди і однозначно розв'язне, тобто $N(L) = \{0\}$, $N(L^*) \neq \{0\}$ (оператор L — або n -нормальний ($n = 0$), якщо $\dim N(L) = \infty$, або нетеровий ($\text{ind } L = -\dim N(L^*)$), якщо $\dim N(L) < \infty$) і існує обмежений лівий обернений оператор L_l^{-1} ;

3. Рівняння всюди і неоднозначно розв'язне, тобто $N(L) \neq \{0\}$, $N(L^*) = \{0\}$ (оператор L — або d -нормальний ($d = 0$), якщо $\dim N(L^*) = \infty$, або нетеровий ($\text{ind } L = \dim N(L)$), якщо $\dim N(L^*) < \infty$) і існує обмежений правий обернений оператор L_r^{-1} ;

4. Рівняння не всюди і неоднозначно розв'язне, тобто $N(L) \neq \{0\}$, $N(L^*) \neq \{0\}$ і існує обмежений узагальнено-обернений оператор L^- .

Розглянемо найбільш загальний четвертий випадок, коли породжуюче рівняння (5.3) має сім'ю розв'язків (5.6).

Виконуючи в (5.2) заміну змінних

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, \hat{z}_0) + x(t, \varepsilon),$$

в якій елемент $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ задовольняє рівнянню для породжуючих елементів (5.8), приходимо до наступної задачі: знайти умови існування і алгоритм побудови розв'язку $x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $x(t, \cdot) \in \mathbf{C}[0; \varepsilon_0]$, $x(t, 0) = 0$ операторного рівняння

$$(Lx(\cdot, \varepsilon))(t) = \varepsilon Z(z_0(t, \hat{z}_0) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon). \quad (5.9)$$

Використовуючи властивості (b3), (b4) з (5.4) нелінійної вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$, виділимо у неї лінійну частину по x і члени нульового порядку по ε . В результаті отримаємо розвинення

$$Z(z_0(t, \hat{z}_0) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = Z_0(t, \hat{z}_0) + T(t)x(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (5.10)$$

де

$$Z_0(t, \hat{z}_0) = Z(z_0(t, \hat{z}_0), t, 0) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2);$$

$T(t) = \frac{\partial Z(z, t, 0)}{\partial z} \Big|_{z=z_0(t, \hat{z}_0)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — лінійна обмежена оператор-функція, що є похідною Фреше по z від $Z(z, t, \varepsilon)$ при $z(t) = z_0(t, \hat{z}_0)$;

R — нелінійна вектор-функція, що задовольняє умовам (b2) і (b3) з (5.4).

Використовуючи розвинення (5.10), запишемо умову розв'язності операторного рівняння (5.9)

$$\mathcal{P}_{Y_L} \{ Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T([\mathcal{P}_{N(L)}\hat{x}(\cdot, \varepsilon) + \bar{x}(\cdot, \varepsilon)])(t) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \}(t) = 0, \quad (5.11)$$

де $\hat{x}(\cdot, \varepsilon)$ — довільний елемент простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $\bar{x}(t, \varepsilon)$ — частинний, а $x(t, \varepsilon)$ — загальний розв'язок операторного рівняння (5.9).

Позначивши через $B_0 = \mathcal{P}_{Y_L} T \mathcal{P}_{N(L)}$ — лінійний обмежений оператор, який діє з простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ у підпростір $Y_L \subset \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ та враховуючи (5.8), рівняння (5.11) для визначення $\hat{x}(t)$ запишемо у вигляді

$$B_0 \hat{x}(\cdot, \varepsilon)(t) + \mathcal{P}_{Y_L} \{ T \bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \}(t) = 0. \quad (5.12)$$

Припустимо, що $B_0 : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow Y_L$ — узагальнено оборотний оператор.

Позначимо: $\mathcal{P}_{N(B_0)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow N(B_0)$ і $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} : Y_L \rightarrow Y_{B_0}$ обмежені проектори, а B_0^- — обмежений узагальнено-обернений оператор до оператора B_0 . Обмеженість проекторів $\mathcal{P}_{N(B_0)}$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}$ є наслідком узагальненої оборотності оператора B_0 [68], [119].

Розглядаючи нелінійну вектор-функцію Z як неоднорідність і використовуючи формулу (5.6), для розв'язку $x(t, \varepsilon)$ отримаємо

$$x(t, \varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{x})(t) + \bar{x}(t, \varepsilon).$$

Елемент $\hat{x} = \hat{x}(t, \varepsilon)$ визначається з умови (5.11) розв'язності рівняння (5.9), а вектор-функція $\bar{x}(t, \varepsilon)$ — частинний розв'язок рівняння (5.9):

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon L^- \{ Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + Tx(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \}(t).$$

Враховуючи, що $\hat{z}_0(t)$ задовольняє рівняння для породжуючих елементів (5.8), для визначення розв'язку $x(\cdot, \varepsilon)$ від рівняння (5.9) приходимо до еквівалентної операторної системи

$$x(t, \varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{x}(\cdot, \varepsilon))(t) + \bar{x}(t, \varepsilon),$$

$$B_0\hat{x}(\cdot, \varepsilon)(t) = -(\mathcal{P}_{Y_L}\{T\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t), \quad (5.13)$$

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon L^- \{ Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + Tx(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \}(t).$$

Розв'язність рівняння (5.2) залежить від розв'язності другого рівняння операторної системи (5.13), яке може бути всюди і однозначно розв'язним ($\mathcal{P}_{N(B_0)} = \mathcal{P}_{Y_{B_0}} = \{0\}$), всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0$), однозначно розв'язним ($\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$) або неоднозначно і не всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$).

Спочатку розглянемо достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (5.2).

Нехай друге рівняння операторної системи (5.13) однозначно розв'язне, тобто $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$. Тоді з наслідку 3.1 з теореми 3.3 маємо, що узагальнено-обернений оператор B_0^- буде лівим оберненим оператором $(B_0)_l^{-1}$. Внаслідок нормальної розв'язності оператора B_0 , друге рівняння операторної системи (5.13) розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_L} \{T\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t) = 0, \quad (5.14)$$

при виконанні якої воно має єдиний розв'язок

$$\hat{x}(t, \varepsilon) = (B_0)_l^{-1} \mathcal{P}_{Y_L} \{T\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t).$$

При $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_L} = 0$, умова (5.14) завжди виконується. Тому при $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_L} = 0$ операторна система (5.13) набере вигляду:

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}(\cdot, \varepsilon)(t) + \bar{x}(t, \varepsilon), \\ \hat{x}(t, \varepsilon) &= -(B_0)_l^{-1} \mathcal{P}_{Y_L} \{T\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t), \\ \bar{x}(t, \varepsilon) &= \varepsilon(L^- \{Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[(\mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}(\cdot, \varepsilon)) + \bar{x}(\cdot, \varepsilon)] + \\ &\quad + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Покажемо, що операторна система (5.15) належить до класу систем, для розв'язку яких застосовний метод простих ітерацій.

Введемо наступні позначення: $y(\cdot, \varepsilon) = \text{col}(x(\cdot, \varepsilon), \hat{x}(\cdot, \varepsilon), \bar{x}(\cdot, \varepsilon))$ — вектор-стовпець з банахового простору $\mathfrak{B} = \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $y(t, \cdot) \in \mathbf{C}[0, \varepsilon_0]$;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{P}_{N(L)} & I \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \quad (5.16)$$

клітинно-матричний оператор верхньотрикутного вигляду, де I — тотожний оператор у просторі $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, а оператор K діє на вектор-функцію $\varphi(t)$ за правилом

$$(K\varphi)(\cdot, \varepsilon) = -(B_0)_l^{-1} \mathcal{P}_{Y_L} T\varphi(\cdot, \varepsilon)(t);$$

$$U(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ -(B_0)_l^{-1} \mathcal{P}_{Y_L} R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)(t) \\ \varepsilon(L^{-}\{Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}(\cdot, \varepsilon) + \bar{x}(\cdot, \varepsilon)] + \\ + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t) \end{bmatrix}$$

— вектор-функція, яка задовольняє умовам (b2), (b3) з (5.4).

Використовуючи введені позначення, систему (5.15) можна записати у вигляді

$$y(t, \varepsilon) = (W y(\cdot, \varepsilon))(t) + U(y(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)(t). \quad (5.17)$$

З (5.17) маємо

$$V y(t, \varepsilon) = U(y(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)(t),$$

де

$$V = I_{\mathfrak{B}} - W = \begin{bmatrix} I & -\mathcal{P}_{N(L)} & -I \\ 0 & I & -K \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$I_{\mathfrak{B}}$ — тотожний оператор у просторі $\mathfrak{B}$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що завдяки структурі клітинно-матричного оператора V верхньотрикутного вигляду з тотожними операторами на головній діагоналі він має обернений оператор

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} I & \mathcal{P}_{N(L)} & \mathcal{P}_{N(L)} K + I \\ 0 & I & K \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Оператор V^{-1} діє на вектор-стовпець $y = \text{col}(x, \hat{x}, \bar{x})$ за правилом:

$$V^{-1} y = \begin{bmatrix} x + \mathcal{P}_{N(L)} \hat{x} + \mathcal{P}_{N(L)} K \bar{x} + I \bar{x} \\ \hat{x} + K \bar{x} \\ \bar{x} \end{bmatrix}.$$

Для доведення обмеженості оператора V^{-1} покажемо, що існує константа $c > 0$ така, що для всіх $y \in \mathfrak{B}$ виконується нерівність

$$|||V^{-1}y|||_{\mathfrak{B}} \leq c \left\{ |||x|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + |||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + |||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} \right\}.$$

Для цього доведемо обмеженість кожної компоненти вектора $V^{-1}y$ у банаховому просторі $\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Оператори, які входять до клітинно-матричного оператора V^{-1} , лінійні обмежені за визначенням. Оператор K обмежений як суперпозиція лінійних обмежених операторів. Позначимо норми операторів

$$|||\mathcal{P}_{N(L)}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} = p, \quad |||K|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} = k.$$

Враховуючи введені позначення, отримаємо:

$$\begin{aligned} & |||x + \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x} + \mathcal{P}_{N(L)}K\bar{x} + I\bar{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} \leq \\ & \leq |||x|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + |||\mathcal{P}_{N(L)}\hat{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + |||\mathcal{P}_{N(L)}K\bar{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + \\ & + |||I\bar{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} \leq |||x|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + p|||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + (pk + 1)|||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |||\hat{x} + K\bar{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} \leq |||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + |||K\bar{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} \leq \\ & \leq |||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + k|||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} & |||V^{-1}y|||_{\mathbf{B}} \leq |||x|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + (p + 1)|||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + (pk + k + 2)|||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} \leq \\ & \leq c \left\{ |||x|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + |||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} + |||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} \right\}, \end{aligned}$$

де $c = \max\{1, p + 1, pk + k + 2\}$. Тим самим обмеженість оператора V_1^{-1} доведено.

Враховуючи введені вище позначення, запишемо операторну систему (5.15) у вигляді:

$$y = V^{-1}Uy = V^{-1}\tilde{U}(\varepsilon)y,$$

де $\tilde{U}(\varepsilon)$, взагалі кажучи, нелінійний обмежений оператор. Враховуючи обмеженість оператора V^{-1} та обмеженість проміжку $\mathcal{I}$, існує таке значення параметра $\varepsilon = \varepsilon^*$, що для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon^*$ суперпозиція операторів $V^{-1}\tilde{U}(\varepsilon)$ буде оператором стиску. Тоді з принципу стискаючих відображень маємо, що система (5.15) має єдину нерухому точку, яка буде розв'язком рівняння (5.2).

Використовуючи метод простих ітерацій для знаходження розв'язків $x(t, \varepsilon)$ операторного рівняння (5.9) неперервних по ε , що обертаються в нуль при $\varepsilon = 0$, побудуємо ітераційний процес.

Перше наближення $\bar{x}_1(t, \varepsilon)$ до $\bar{x}(t, \varepsilon)$ знайдемо як частинний розв'язок операторного рівняння

$$Lx_1(\cdot, \varepsilon)(t) = \varepsilon Z_0(t, \hat{z}_0),$$

який існує завдяки вибору $\hat{z}_0 \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ з рівняння для породжуючих елементів (5.8). Цей розв'язок записується у вигляді

$$\bar{x}_1(t, \varepsilon) = \varepsilon(L^- Z_0(\cdot, \hat{z}_0))(t).$$

Перше наближення $x_1(t, \varepsilon)$ до розв'язку $x(t, \varepsilon)$ операторного рівняння (5.9) покладемо рівним $\bar{x}_1(t, \varepsilon)$:

$$x_1(t, \varepsilon) = \bar{x}_1(t, \varepsilon).$$

Друге наближення $x_2(t, \varepsilon)$ до шуканого розв'язку $x(t, \varepsilon)$ знаходимо як розв'язок операторного рівняння

$$\begin{aligned} Lx_2(\cdot, \varepsilon)(t) = & \varepsilon(Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(L)}\hat{x}_1(\cdot, \varepsilon) + \bar{x}_1(\cdot, \varepsilon)] + \\ & + R(x_1(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(t). \end{aligned} \quad (5.19)$$

З необхідної і достатньої умови розв'язності рівняння (5.19)

$$B_0\hat{x}_1(\cdot, \varepsilon)(t) = -(\mathcal{P}_{Y_L}\{T\bar{x}_1(\cdot, \varepsilon) + R(x_1(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t) \quad (5.20)$$

знаходимо єдине (оскільки $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$ за припущенням) перше наближення $\hat{x}_1(t, \varepsilon)$ до $\hat{x}(t, \varepsilon)$

$$\hat{x}_1(t, \varepsilon) = -(B_0)_l^{-1} \mathcal{P}_{Y_L} \{T\bar{x}_1(\cdot, \varepsilon) + R(x_1(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t).$$

Необхідна і достатня умова розв'язності відносно $\hat{x}_1(t, \varepsilon)$ рівняння (5.20) має вигляд

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_L} \{Tx_1(\cdot, \varepsilon) + R(x_1(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t) = 0. \quad (5.21)$$

Друге наближення $x_2(t, \varepsilon)$ до $x(t, \varepsilon)$ запишеться

$$x_2(t, \varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}_1(\cdot, \varepsilon))(t) + \bar{x}_2(t, \varepsilon),$$

де

$$\begin{aligned} \bar{x}_2(t, \varepsilon) = \varepsilon(L^{-}\{Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[(\mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}_1(\cdot, \varepsilon)) + \\ + \bar{x}_1(\cdot, \varepsilon)] + R(x_1(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t). \end{aligned}$$

Третє наближення $\bar{x}_3(t, \varepsilon)$ до частинного розв'язку $\bar{x}(t, \varepsilon)$ визначимо за формулою

$$\begin{aligned} \bar{x}_3(t, \varepsilon) = \varepsilon(L^{-}\{Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[(\mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}_2(\cdot, \varepsilon)) + \\ + \bar{x}_2(\cdot, \varepsilon)] + R(x_2(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t), \end{aligned}$$

як розв'язок операторного рівняння

$$\begin{aligned} L\bar{x}_3(\cdot, \varepsilon)(t) = \varepsilon(Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[(\mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}_2(\cdot, \varepsilon)) + \\ + \bar{x}_2(\cdot, \varepsilon)] + R(x_2(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(t). \end{aligned}$$

З необхідної і достатньої умови розв'язності цього операторного рівняння приходимо до рівняння

$$B_0 \hat{x}_2(\cdot, \varepsilon)(t) = -\mathcal{P}_{Y_L} \{T\bar{x}_2(\cdot, \varepsilon) + R(x_2(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t) \quad (5.22)$$

для знаходження другого наближення $\hat{x}_2(t, \varepsilon)$ до $\hat{x}(t, \varepsilon)$. При виконанні умови розв'язності рівняння (5.22)

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_L} \{T\bar{x}_2(\cdot, \varepsilon) + R(x_2(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t) = 0 \quad (5.23)$$

його єдиний розв'язок має вигляд:

$$\hat{x}_2(t, \varepsilon) = -(B_0)_l^{-1} \mathcal{P}_{Y_L} \{T\bar{x}_2(\cdot, \varepsilon) + R(x_2(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t),$$

оскільки $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$.

Таким чином, якщо $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_L} = 0$, то критерії розв'язності типу (5.21), (5.23) відповідних рівнянь на кожному кроці ітераційного процесу будуть виконані. Відповідно, якщо $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$, то рівняння типу (5.20), (5.22) на кожному кроці ітераційного процесу будуть однозначно розв'язні. Продовжуючи ітераційний процес далі, з операторної системи (5.15) отримуємо наступну схему для знаходження розв'язку $x(t, \varepsilon)$, що належить простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ по t , неперервного по ε , який перетворюється на нуль при $\varepsilon = 0$

$$\hat{x}_k(t, \varepsilon) = -(B_0)_l^{-1} \mathcal{P}_{Y_L} \{T\bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t),$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon L^- \{Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}_k(\cdot, \varepsilon) + \\ + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon)] + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t), \end{aligned}$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = \mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}_k(\cdot, \varepsilon)(t) + \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$x_0(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t, \varepsilon) \equiv 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 5.2. *Нехай операторне рівняння (5.2) задовольняє умови (b1) – (b4) з (5.4), а відповідне породжуюче рівняння (5.3) при виконанні умови (5.5) має сім'ю породжуючих розв'язків (5.6). Тоді, якщо оператор B_0 узагальнено оборотний і виконуються умови*

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0, \quad \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_L} = 0,$$

то для кожного елемента $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, який задовольняє рівнянню для породжуючих елементів (5.8) рівняння (5.2) має єдиний розв'язок

$z(t, \varepsilon) = z_0(t, \hat{z}_0) + x(t, \varepsilon)$, неперервний по ε , який обертається в породжуючий розв'язок $z_0(t, \hat{z}_0)$ при $\varepsilon = 0$. Цей розв'язок знаходиться за допомогою збіжного на $[0, \varepsilon_*] \subset [0, \varepsilon_0]$ ітераційного процесу

$$\begin{aligned}\hat{x}_k(t, \varepsilon) &= -(B_0)_l^{-1} \mathcal{P}_{Y_L} \{T\bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t), \\ \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon) &= \varepsilon L^{-1} \{Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(L)}\hat{x}_k(\cdot, \varepsilon) + \\ &\quad + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon)] + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t), \\ x_{k+1}(t, \varepsilon) &= \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x}_k(\cdot, \varepsilon)(t) + \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon), \\ x_0(t, \varepsilon) &\equiv \bar{x}_0(t, \varepsilon) \equiv 0, \\ z_k(t, \varepsilon) &= z_0(t, \hat{z}_0) + x_k(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{5.24}$$

Далі розглянемо більш загальний випадок, коли друге рівняння операторної системи (5.13) неоднозначно розв'язне ($\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$).

Припустимо, що $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_L} = 0$. В цьому випадку друге рівняння системи (5.13)

$$B_0\hat{x}(\cdot, \varepsilon)(t) = -(\mathcal{P}_{Y_L}\{T\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t)$$

буде завжди розв'язним і його розв'язок має вигляд

$$\hat{x}(t, \varepsilon) = \mathcal{P}_{N(B_0)}\tilde{x}(\cdot, \varepsilon)(t) + \hat{x}^{(0)}(t, \varepsilon),$$

де $\tilde{x}(\cdot, \varepsilon)$ — довільний елемент простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$,

$$\hat{x}^{(0)}(t, \varepsilon) = B_0^{-1}\mathcal{P}_{Y_L}\{T\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t).$$

Фіксуємо елемент $\tilde{x}(t, \varepsilon) = \tilde{x}_0^{(0)}(t, \varepsilon)$, отримаємо один з множини розв'язків другого рівняння операторної системи (5.13) $x^\sharp(t, \varepsilon) = \mathcal{P}_{N(B_0)}\tilde{x}_0^{(0)}(\cdot, \varepsilon)(t) \in N(B_0)$.

Таким чином, при виконанні умови $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_L} = 0$ операторна система (5.13) набере вигляду:

$$x(t, \varepsilon) = \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x}^{(0)}(\cdot, \varepsilon)(t) + \mathcal{P}_{N(L)}x^\sharp(\cdot, \varepsilon)(t) + \bar{x}(t, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(0)}(t, \varepsilon) &= -B_0^- \mathcal{P}_{Y_L} \{T[\mathcal{P}_{N(L)} x^\sharp(\cdot, \varepsilon) + \bar{x}(\cdot, \varepsilon)] + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t), \\ \bar{x}(t, \varepsilon) &= \varepsilon L^- \{Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}^{(0)}(\cdot, \varepsilon) + \mathcal{P}_{N(L)} x^\sharp(\cdot, \varepsilon) + \bar{x}(t, \varepsilon)] + \\ &\quad + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t).\end{aligned}\quad (5.25)$$

Операторна система (5.25) схожа на операторну систему (5.15), проте вони мають принципову відмінність. На відміну від другого рівняння системи (5.15), де $\hat{x}(t, \varepsilon)$ визначається однозначно, у другому рівнянні операторної системи (5.25) $\hat{x}^{(0)}(t, \varepsilon)$ — один з частинних розв'язків взятий при деякому фіксованому $\tilde{x}_0^{(0)}(t, \varepsilon)$.

Використовуючи введені вище позначення для $y(t, \varepsilon)$ та W (5.16), систему (5.25) можна представити у вигляді операторного рівняння

$$y(t, \varepsilon) = (W y(\cdot, \varepsilon))(t) + U_1(y(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)(t), \quad (5.26)$$

де

$$U_1(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(L)} x^\sharp(\cdot, \varepsilon)(t) \\ -B_0^- \mathcal{P}_{Y_L} \{T \mathcal{P}_{N(L)} x^\sharp(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)(t)\} \\ \varepsilon L^- \{Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[(\mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}(\cdot, \varepsilon)) + \mathcal{P}_{N(L)} x^\sharp(\cdot, \varepsilon) + \\ \bar{x}(\cdot, \varepsilon)] + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t) \end{bmatrix}$$

— нелінійна обмежена вектор-функція.

Операторне рівняння (5.26) еквівалентне рівнянню

$$V y(t, \varepsilon) = U_1(y(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)(t),$$

де оператор V має вигляд (5.18). Внаслідок обмеженості проміжку $\mathcal{I}$, операторів V^{-1} та $\tilde{U}_1(\varepsilon) = U_1(y(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)(t)$ існує $\varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ таке, що для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon_*$ оператор $V^{-1} \tilde{U}_1(\varepsilon)$ буде оператором стиску, а рівняння

$$y(t, \varepsilon) = V^{-1} U_1(y(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)(t),$$

має єдину нерухому точку, яка буде розв'язком операторної системи (5.25).

Теорема 5.3. *Нехай операторне рівняння (5.2) задовольняє умови (b1) – (b4) з (5.4), а відповідне породжуюче рівняння (5.3) за умови (5.5) має породжуючі розв’язки (5.6). Тоді, якщо оператор B_0 – узагальнено оборотний, то для кожного елемента $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, що задовольняє рівнянню для породжуючих елементів (5.8) при*

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0, \quad \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_L} = 0$$

рівняння (5.2) має хоча б один розв’язок $z(t, \varepsilon) = z_0(t, \hat{z}_0) + x(t, \varepsilon)$, неперервний по ε , який обертається в породжуючий розв’язок $z_0(t, \hat{z}_0)$ при $\varepsilon = 0$. Цей розв’язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0, \varepsilon_] \subset [0, \varepsilon_0]$ ітераційного процесу*

$$\begin{aligned} \hat{x}_k(t, \varepsilon) &= -B_0^- \mathcal{P}_{Y_L} \{T[\mathcal{P}_{N(L)} x^\sharp(\cdot, \varepsilon) + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon)] + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t), \\ \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon) &= \varepsilon L^- \{Z_0(\cdot, \hat{z}_0) + T[\mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}_k(\cdot, \varepsilon) + \mathcal{P}_{N(L)} x^\sharp(\cdot, \varepsilon) + \\ &\quad + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon)] + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t), \\ x_{k+1}(t, \varepsilon) &= \mathcal{P}_{N(L)} \hat{x}_k(\cdot, \varepsilon)(t) + \mathcal{P}_{N(L)} x^\sharp(\cdot, \varepsilon)(t) + \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon), \\ z_k(t, \varepsilon) &= z_0(t, \hat{z}_0) + x_k(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_0(t, \varepsilon) &\equiv \bar{x}_0(t, \varepsilon) \equiv 0, \end{aligned} \tag{5.27}$$

де $x^\sharp(t, \varepsilon)$ – фіксований елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Зауваження 5.2. *Якщо $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$, а $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0$, то умова розв’язності другого рівняння системи (5.13) буде завжди виконуватись і за наслідком 3.2 з теореми 3.4 в ітераційній процедурі (5.27) узагальнено-обернений оператор B_0^- буде правим оберненим оператором $(B_0)_r^{-1}$.*

Зауваження 5.3. *Якщо $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$, то $x^\sharp(t, \varepsilon) \equiv 0$ і ітераційна процедура (5.27) переходить в ітераційну процедуру (5.24).*

Зауваження 5.4. Не порушуючи загальності, для спрощення записів в ітераційній процедурі (5.27) можна покласти $x^\sharp(t, \varepsilon) = 0$.

5.2. Слабконелінійні рівняння Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах

Розглянемо слабконелінійне операторне інтегральне рівняння Фредгольма з малим невід'ємним параметром ε вигляду:

$$z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K(t, s)Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon)ds, \quad (5.28)$$

де

(с1) оператор-функції $M(t)$ та $N(t)$ діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ в себе, сильно неперервні з нормами $|||M||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|M(t)\|_{\mathbf{B}_1} = M_0 < \infty$ та $|||N||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|N(t)\|_{\mathbf{B}_1} = N_0 < \infty$;

(с2) оператор-функція $K(t, s)$ визначена у квадраті $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ і діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ в себе по кожній змінній, сильно неперервна по кожній змінній з нормою $|||K||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|K(t, s)\|_{\mathbf{B}_1} = K_0 < \infty$; (5.29)

(с3) $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$;

(с4) $Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ — нелінійна по z обмежена оператор-функція, яка в околі породжуючого розв'язку $\|z - z_0\| \leq q$

має сильно неперервну похідну Фреше по z і неперервна по сукупності змінних z, t, ε, q і ε_0 — досить малі константи;

(с5) $Z(0, t, 0) = 0, Z'_z(0, t, 0) = 0$;

(с6) $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Будемо шукати умови існування розв'язку $z = z(t, \varepsilon)$ рівняння (5.28), який визначений в класі вектор-функцій: $z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $z(t, \cdot) \in$

$\mathbf{C}(0, \varepsilon_0]$ і перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із породжуючих розв'язків $z_0(t, c)$ операторного рівняння

$$z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds = f(t). \quad (5.30)$$

З теореми 4.5 маємо, що породжуюче операторне рівняння (5.30) при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s)ds = 0 \quad (5.31)$$

має сім'ю розв'язків

$$\begin{aligned} z_0(t, c) &= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + \bar{z}(t) = \\ &= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + f(t) + M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds, \end{aligned} \quad (5.32)$$

де c — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, D^- — узагальнено-обернений оператор до оператора

$$D = I_{\mathbf{B}_1} - A, \quad A = \int_a^b N(s)M(s)ds.$$

Знайдемо необхідну умову існування розв'язку $z(t, \varepsilon)$ операторного рівняння (5.28), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один з породжуючих розв'язків (5.32) $z_0(t, c) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ системи (5.30).

Нехай рівняння (5.28) має розв'язки $z(t, \varepsilon)$, тоді згідно з теоремою 4.5 повинна виконуватись умова розв'язності

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left\{ f(s) + \varepsilon \int_a^b K(s, \tau)Z(z(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)d\tau \right\} ds = 0 \quad (5.33)$$

Враховуючи (5.31), умова (5.33) буде мати вигляд:

$$\varepsilon \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \int_a^b K(s, \tau)Z(z(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)d\tau ds = 0. \quad (5.34)$$

При $\varepsilon \neq 0$ повинна виконуватись рівність

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \int_a^b K(s, \tau) Z(z(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds = 0.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$, $z(t, \varepsilon) \rightarrow z_0(t, c)$. Враховуючи неперервність оператор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$ по сукупності змінних z, t, ε , при переході до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ у рівності (5.34), отримаємо необхідну умову існування розв'язку операторного рівняння (5.28)

$$F(c) = \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \int_a^b K(s, \tau) Z(z_0(\tau, c), \tau, 0) d\tau ds = 0. \quad (5.35)$$

По аналогії з подібними задачами для всюди розв'язних диференціальних рівнянь [48] рівняння (5.35) будемо називати рівнянням для породжуючих констант.

Отже, якщо рівняння (5.35) має розв'язок $c = c_0 \in \mathbf{B}_1$, то вектор c_0 визначає той породжуючий розв'язок $z_0(t, c_0)$, якому може відповідати розв'язок $z(t, \varepsilon)$ вихідної нелінійної системи (5.28). Якщо ж рівняння (5.35) не має розв'язків, то і операторне рівняння (5.28) не має шуканого розв'язку. Мова йде про дійсні розв'язки рівняння (5.35), оскільки розглядаються дісні банахові простори. Таким чином, необхідна умова існування розв'язку системи (5.28) задовольняється вибором константи c у породжуючому розв'язку (5.32), як дійсного кореня рівняння (5.35).

Таким чином, доведено необхідну умову існування розв'язку системи (5.28).

Теорема 5.4. *Нехай слабконелінійне операторне інтегральне рівняння (5.28) має розв'язок $z = z(t, \varepsilon)$: $z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $z(t, \cdot) \in \mathbf{C}(0, \varepsilon_0]$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в породжуючий розв'язок (5.32) з векторною константою $c = c_0 \in \mathbf{B}_1$. Тоді вектор c_0 обов'язково повинен бути дійсним коренем рівняння (5.35) для породжуючих констант.*

Для отримання достатньої умови існування розв'язків інтегрального рівняння Фредгольма (5.28) у випадку, коли породжуюче операторне рівняння (5.30) має сім'ю розв'язків (5.32) виконаємо у рівнянні (5.28) заміну змінних

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon), \quad (5.36)$$

де $z_0(t, c_0)$ — породжуючий розв'язок (5.32) рівняння (5.28), а вектор-констант $c_0 \in \mathbf{B}_1$ є дійсним коренем рівняння (5.35). Враховуючи нову змінну, будемо шукати умови існування розв'язку $x = x(t, \varepsilon)$: $x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $x(t, \cdot) \in \mathbf{C}[0, \varepsilon_0]$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в нульовий розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} x(t) - M(t) \int_a^b N(s)x(s)ds = \\ = f(t) + \varepsilon \int_a^b K(t, s)Z(z_0(s, c_0) + x(t, \varepsilon), s, \varepsilon)ds, \end{aligned} \quad (5.37)$$

Використовуючи неперервну диференційовність вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$ по x в околі точки $\varepsilon = 0$, виділимо у вектор-функції $Z(z_0 + x, t, \varepsilon)$ лінійну частину по z і члени нульового порядку по ε . Тоді маємо розвинення

$$Z(z_0 + x, t, \varepsilon) = Z(z_0(t, c_0), t, 0) + T(t)x + R(x, t, \varepsilon), \quad (5.38)$$

де вектор-функція $Z(z_0(t, c_0), t, 0) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, а оператор-функція

$$T(t) = T(t, c_0) = \frac{\partial Z(z, t, 0)}{\partial z} \Big|_{z=z_0(t, c_0)}$$

діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у себе, сильно неперервна з нормою $|||T||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|T(t)\|_{\mathbf{B}_1} = T_0 < \infty$.

Нелінійна вектор-функція $R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ задовольняє умови (с4), (с5) з (5.29).

Отже, враховуючи заміну (5.36), будемо розглядати операторне рівняння

$$x(t) - M(t) \int_a^b N(s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K(t,s) \left\{ Z(z_0(s, c_0), s, 0) + T(s)x(s, \varepsilon) + R(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right\} ds, \quad (5.39)$$

Використовуючи розвинення (5.38), запишемо умову розв'язності операторного рівняння (5.39)

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left\{ f(s) + \varepsilon \int_a^b K(s, \tau) \left[Z(z_0(\tau, c_0), \tau, 0) + T(\tau) \left(M(\tau) \mathcal{P}_{N(D)} c + \bar{x}(\tau, \varepsilon) \right) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \right\} ds = 0, \quad (5.40)$$

де c — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, $\bar{x}(t, \varepsilon)$ — частинний, а $x(t, \varepsilon)$ — загальний розв'язок операторного рівняння (5.39).

Позначимо через

$$B_0 = \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b \int_a^b N(s) K(s, \tau) T(\tau) M(\tau) d\tau ds \mathcal{P}_{N(D)}$$

— лінійний обмежений оператор, який діє з простору $\mathbf{B}_1$ у підпростір $Y_D \subset \mathbf{B}_1$. Тоді, враховуючи (5.31) та (5.35), рівняння (5.40) для визначення константи c набере вигляду

$$B_0 c + \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left\{ \int_a^b K(s, \tau) \left[T(\tau) \bar{x}(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \right\} ds = 0.$$

Припустимо, що $B_0 : \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_D$ — узагальнено оборотний оператор. Позначимо: $\mathcal{P}_{N(B_0)} : \mathbf{B}_1 \rightarrow N(B_0)$ і $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} : Y_D \rightarrow Y_{B_0}$ — обмежені проектори, а B_0^- — узагальнено-обернений оператор до оператора B_0 .

Розглядаючи нелінійну оператор-функцію Z як неоднорідність і використовуючи формулу (5.32), для розв'язку $x(t, \varepsilon)$ отримаємо

$$x(t, \varepsilon) = M(t) \mathcal{P}_{N(D)} c + \bar{x}(t, \varepsilon).$$

Елемент $c = c(\varepsilon)$ визначається з умови (5.40) розв'язності рівняння (5.39), а вектор-функція $\bar{x}(t, \varepsilon)$ — частинний розв'язок рівняння (5.39):

$$\begin{aligned} \bar{x}(t, \varepsilon) = & f(t) + M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds + \\ & + \varepsilon \int_a^b \left[K(t, \tau) + M(t)D^- \int_a^b N(s)K(s, \tau)ds \right] \times \\ & \times \left[Z(z_0(\tau, c_0), \tau, 0) + T(\tau)x(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Таким чином, враховуючи, що c_0 задовольняє рівняння для породжуючих констант (5.35), для визначення розв'язку $x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $x(t, \cdot) \in [0, \varepsilon_0]$, $x(t, 0) = 0$ від рівняння (5.39) приходимо до еквівалентної операторної системи

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) = & M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + \bar{x}(t, \varepsilon), \\ B_0c = & -\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left\{ \int_a^b K(s, \tau) \left[T(\tau)\bar{x}(\tau, \varepsilon) + \right. \right. \\ & \left. \left. + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \right\} ds = 0. \\ \bar{x}(t, \varepsilon) = & f(t) + \varepsilon \int_a^b \left[K(t, \tau) + M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds + \right. \\ & + M(t)D^- \int_a^b N(s)K(s, \tau)ds \left. \right] \left[Z(z_0(\tau, c_0), \tau, 0) + \right. \\ & \left. + T(\tau)x(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Розв'язність операторної системи (5.41) залежить від розв'язності її другого рівняння. Оскільки за припущенням, оператор B_0 — узагальнено оборотний, то воно може бути всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0$), однозначно

розв'язним ($\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$ або неоднозначно і не всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$).

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$ та $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$.

Друге операторне рівняння системи (5.41) має розв'язки тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left\{ \int_a^b K(s, \tau) \left[T(\tau) \bar{x}(\tau, \varepsilon) + \right. \right. \\ \left. \left. + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \right\} ds = 0, \end{aligned} \quad (5.42)$$

яка буде виконуватись завжди, якщо

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_D} = 0. \quad (5.43)$$

При виконанні умови (5.42) сім'я розв'язків другого рівняння системи (5.41) має вигляд

$$\begin{aligned} c(\varepsilon) = \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{c} - B_0^- \left[\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left\{ \int_a^b K(s, \tau) \left[T(\tau) \bar{x}(\tau, \varepsilon) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \right\} ds \right], \end{aligned}$$

де $\hat{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Таким чином, при виконанні умови (5.43) від системи (5.41) переходимо операторної системи

$$x(t, \varepsilon) = M(t) \mathcal{P}_{N(D)} c + \bar{x}(t, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} c(\varepsilon) = \mathcal{P}_{N(B_0)} \hat{c} - B_0^- \left[\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left\{ \int_a^b K(s, \tau) \left[T(\tau) \bar{x}(\tau, \varepsilon) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \right\} ds \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(t, \varepsilon) = & f(t) + M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds + \\ & + \varepsilon \int_a^b \left[K(t, \tau) + M(t)D^- \int_a^b N(s)K(s, \tau)ds \right] \times \\ & \times \left[Z(z_0(\tau, c_0), \tau, 0) + T(\tau)x(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau, \end{aligned}$$

де $\hat{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Поклавши $\hat{c} = 0$, $\mathcal{P}_{N(B_0)}\hat{c} = 0$, з множини розв'язків другого рівняння операторної системи (5.41) вибираємо один із розв'язків.

Таким чином, при виконанні умов $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_D} = 0$ операторна система (5.13) набере вигляду:

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) = & M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + \bar{x}(t, \varepsilon), \\ c(\varepsilon) = & -B_0^- \left[\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left\{ \int_a^b K(s, \tau) \left[T(\tau)\bar{x}(\tau, \varepsilon) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \right\} ds \right], \quad (5.44) \\ \bar{x}(t, \varepsilon) = & f(t) + M(t)D^- \int_a^b N(s)f(s)ds + \\ & \varepsilon \int_a^b \left[K(t, \tau) + M(t)D^- \int_a^b N(s)K(s, \tau)ds \right] \times \\ & \times \left[Z(z_0(\tau, c_0), \tau, 0) + T(\tau)x(\tau, \varepsilon) + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Враховуючи обмеженість операторів, які входять в систему (5.44) та обмеженість проміжку $\mathcal{I}$, по аналогії з параграфом 5.1.1 можна показати, що вона належить до систем, для розв'язку яких застосовний метод простих ітерацій. Таким чином, для операторного рівняння (5.28) справедлива теорема.

Теорема 5.5. Нехай операторне рівняння (5.28) задовольняє умови (с1) — (с6) з (5.29), а відповідне породжуюче рівняння (5.30) при виконанні умови (5.31) має сім'ю породжуючих розв'язків (5.32). Тоді, якщо оператор $B_0 : \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_D$ узагальнено оборотний і виконуються умови

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0, \quad \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_D} = 0,$$

то для кожного елемента $c_0 \in \mathbf{B}_1$, який задовольняє рівнянню для породжуючих констант (5.35) операторне рівняння (5.28) має принаймні один розв'язок $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$, неперервний по ε , який обертається в породжуючий розв'язок $z_0(t, c_0)$ при $\varepsilon = 0$. Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0, \varepsilon_*] \subset [0, \varepsilon_0]$ ітераційного процесу

$$\begin{aligned} c_k(\varepsilon) &= -B_0^- \left[\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left\{ \int_a^b K(s, \tau) \left[T(\tau) \bar{x}_k(\tau, \varepsilon) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + R(x_k(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau \right\} ds \right], \\ \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon) &= f(t) + M(t) D^- \int_a^b N(s) f(s) ds + \\ &+ \varepsilon \int_a^b \left[K(t, \tau) + M(t) D^- \int_a^b N(s) K(s, \tau) ds \right] \left\{ Z(z_0(\tau, c_0), \tau, 0) + \right. \\ &\quad \left. + T(\tau) \left[M(\tau) \mathcal{P}_{N(D)} c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(\tau, \varepsilon) \right] + R(x_k(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right\} d\tau, \\ x_{k+1}(t, \varepsilon) &= M(t) \mathcal{P}_{N(D)} c_k(\varepsilon) + \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon), \\ z_k(t, \varepsilon) &= z_0(t, c_0) + x_k(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_0(t, \varepsilon) &\equiv \bar{x}_0(t, \varepsilon) \equiv 0. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Зауваження 5.5. Якщо $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$, а $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0$, то оператор B_0 — буде всюди розв’язним d -нормальним з нульовим коядром або нетеровим ($\text{ind } B_0 = \dim N(B_0)$). За наслідком 3.2 з теореми 3.4 узагальнено-обернений оператор B_0^- буде правим оберненим оператором $(B_0)_r^{-1}$ і операторне рівняння (5.28) буде мати принаймні один розв’язок, який знаходиться за допомогою збіжного ітераційного процесу (5.45), де $B_0^- = (B_0)_r^{-1}$.

Зауваження 5.6. Якщо $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$, а $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$, то B_0 — однозначно розв’язний n -нормальний з нульовим ядром або нетеровий ($\text{ind } B_0 = -\dim Y_{B_0}$) оператор. За наслідком 3.1 з теореми 3.3 узагальнено-обернений оператор B_0^- буде лівим оберненим оператором $(B_0)_l^{-1}$ і при $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_D} = 0$ операторне рівняння (5.28) буде мати єдиний розв’язок, який знаходиться за допомогою збіжного ітераційного процесу (5.45), в якому $B_0^- = (B_0)_l^{-1}$.

5.3. Слабконелінійні крайові задачі для операторних рівнянь з нетеровою лінійною частиною у банахових просторах

Розглянемо задачу про умови існування та способи побудови розв’язків слабконелінійних крайових задач для операторних рівнянь, лінійна частина вихідного рівняння яких є нетеровим оператором. Схема дослідження будується на використанні узагальненого оператора Гріна відповідної лінійної породжуючої напіводнорідної ($\varepsilon = 0$ $\alpha = 0$) крайової задачі.

Нехай $\mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ і $\mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ — банахові простори вектор-функцій $z : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^n$; $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^{n_1}$; $L : \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ — лінійний обмежений нетерів оператор, ($\mu \neq \nu$, $\mu = \dim N(L) < \infty$, $\nu = \dim N(L^*) = \dim Y_L <$

∞); $\ell : \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^m$ — лінійний обмежений вектор-функціонал, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Розглянемо нелінійну крайову задачу з малим параметром ε

$$(Lz)(t) = f(t) + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (5.46)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (5.47)$$

Разом із задачею (5.46), (5.47) розглянемо лінійну породжуючу крайову задачу

$$(Lz_0)(t) = f(t), \quad (5.48)$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad (5.49)$$

яка отримується з (5.46), (5.47) при $\varepsilon = 0$.

Нехай:

(d1) $L : \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ — нетеровий оператор $\text{ind } L = \dim \ker L - \dim \ker L^* = \mu - \nu \neq 0$;

(d2) $Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ — нелінійна вектор-функція, яка в околі, породжуючого розв'язку $\|z - z_0\| \leq q$ має похідну Фреше по z і неперервна по сукупності змінних z, t та ε , q і ε_0 — досить малі константи;

(d3) $Z(0, t, 0) = 0, Z'_z(0, t, 0) = 0$;

(d4) $f(t) \in \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$; (5.50)

(d5) $\ell : \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^m$ — лінійний обмежений вектор-функціонал;

(d6) $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний по z вектор-функціонал, який в околі породжуючого розв'язку $\|z - z_0\| \leq q$ має похідну Фреше по z і неперервний по ε ;

(d7) $J(0, 0) = 0, J'_z(0, 0) = 0$;

(d8) $\alpha \in \mathbf{R}^m$.

Будемо розв'язувати задачу про знаходження умов існування і алгоритмів побудови розв'язку $z(t, \varepsilon)$ крайової задачі (5.46), (5.47), що

належить простору $\mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ по t , $z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, неперервного по ε , $z(t, \cdot) \in \mathbf{C}_n[\varepsilon]$, що обертається при $\varepsilon = 0$ у розв'язок породжуючої крайової задачі (5.48), (5.49) (індекс n у позначенні простору $\mathbf{C}_n[\varepsilon]$ показує розмірність вектор-стовпця).

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли породжуюча крайова задача (5.48), (5.49) є неоднозначно розв'язною.

Нехай Φ — матриця (2.11), яка складена з ν лінійно-незалежних базисних функціоналів нуль-простору $N(L^*)$.

Враховуючи зауваження 4.3 до теореми 4.4, маємо, що породжуюча крайова задача (5.48), (5.49) розв'язна тоді і лише тоді, коли $f(t) \in \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ і $\alpha \in \mathbf{R}^m$ задовольняють умови

$$\begin{cases} (\Phi f)(\cdot) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\alpha - \ell L^- f(\cdot)\} = 0, \quad (d = m - \text{rank } Q). \end{cases} \quad (5.51)$$

При виконанні умов (5.51) породжуюча крайова задача (5.48), (5.49) має загальний розв'язок

$$z_0(t) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) + X(t)Q^-\alpha, \quad (5.52)$$

де $X_r(t) = X(t)\mathcal{P}_{N_r(Q)}$ — $(n \times r)$ -вимірна матриця, стовпці якої є повною системою r -лінійно-незалежних розв'язків відповідної (5.48), (5.49) однорідної ($f(t) = 0$, $\alpha = 0$) крайової задачі, G — узагальнений оператор Гріна (4.54), Q^- — $(\mu \times m)$ -вимірна узагальнено-обернена матриця до $(m \times \mu)$ -вимірної матриці $Q = \ell X(\cdot)$.

5.3.1. Необхідна умова існування розв'язків. Виконуючи у (5.46), (5.47) заміну змінної

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t) + x(t, \varepsilon),$$

для відхилення $x(t, \varepsilon)$ від породжуючого розв'язку отримаємо наступну крайову задачу:

$$(Lx(\cdot, \varepsilon))(t) = \varepsilon Z(z_0(t) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon),$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Шукатимемо умову існування і алгоритм побудови розв'язку $x(t, \varepsilon)$: $x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $x(t, \cdot) \in \mathbf{C}[\varepsilon]$, що обертається при $\varepsilon = 0$ в нульовий.

Припустимо, що $f(t) \in \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ і $\alpha \in \mathbf{R}^m$ такі, що умови (5.51) виконані.

Теорема 5.6. *Нехай крайова задача (5.46), (5.47) задовольняє умови (5.50) і має розв'язок $z(t, \varepsilon)$, неперервний по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, що обертається при $\varepsilon = 0$ у деякий породжуючий розв'язок $z_0(t, c_r)$ вигляду (5.52), який отриманий при $c_r = c_0$. Тоді елемент $c_0 \in \mathbf{R}^r$ задовольняє системі рівнянь*

$$\begin{cases} \Phi Z(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}} \{J(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell L^{-1} Z(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\} = 0. \end{cases} \quad (5.53)$$

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Тоді при всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ виконується тотожність

$$\begin{aligned} (Lz(\cdot, \varepsilon))(t) &\equiv f + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \\ (\ell z)(\cdot) &\equiv \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Застосовуючи до цієї крайової задачі теорему 4.9 і враховуючи справедливність умов (5.51), отримаємо, що при всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ нелінійні вектор-функція $Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ та вектор-функціонал $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ задовольняють умови

$$\begin{cases} \Phi Z(z(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}} \{J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell L^{-1} Z(z(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\} = 0. \end{cases} \quad (5.54)$$

Тоді, оскільки $z(t, \varepsilon) \rightarrow z_0(t, c_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а нелінійні вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ і функціонал $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ задовольняють умови (d2), (d3) та (d5), (d6) з (5.50) в околі ($\varepsilon = 0$) розв'язку $z_0(t, c_0)$, то переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$, $z(t, \varepsilon) \rightarrow z(t, c_0)$ отримаємо систему рівнянь

$$F(c_0) = \begin{cases} \Phi Z(z_0(\cdot, c_0), \cdot, 0)(\cdot) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}} \{J(z_0(\cdot, c_0), 0) - \ell L^- Z(z_0(\cdot, c_0), \cdot, 0)(\cdot)\} = 0, \end{cases} \quad (5.55)$$

яка доводить справедливість теореми.

Якщо система (5.55) має деякий розв'язок $c_0 \in \mathbf{R}^r$, то константа c_0 визначає той породжуючий розв'язок $z_0(t, c_0)$, якому може відповідати розв'язок $z(t, \varepsilon)$ вихідної системи (5.46), (5.47), що обертається у $z_0(t, c_0)$ при $\varepsilon = 0$.

Якщо система рівнянь (5.55) не має розв'язків, то крайова задача (5.46), (5.47) не має шуканого розв'язку.

Оскільки система рівнянь (5.55) аналогічна відомому в теорії періодичних нелінійних коливань [69], [29] рівнянню для породжуючих амплітуд, то введемо наступне означення.

Означення 5.1. Система (5.55) називається системою операторних рівнянь для породжуючих констант крайової задачі (5.46), (5.47).

Таким чином, необхідна умова існування розв'язків неоднозначно розв'язної крайової задачі, яка полягає в тому, щоб система рівнянь для породжуючих констант (5.55) мала хоча б один розв'язок, задовольняється вибором елемента $c_r = c_0$ у сім'ї породжуючих розв'язків (5.52).

Зауваження 5.7. Якщо оператор L рівняння (5.46) — всюди розв'язний, то $\Phi \equiv 0$ і у системі рівнянь для породжуючих констант (5.55) перша рівність буде завжди виконуватись, як, наприклад, для крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь [29, 69, 149].

5.3.2. Достатні умови існування розв'язків. Знайдемо умови існування розв'язків крайової задачі (5.46), (5.47) у випадку, коли породжуюча крайова задача (5.48), (5.49) неоднозначно і не всюди розв'язна.

Виконуючи в задачі (5.46), (5.47) заміну змінних

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon),$$

в якій константа $c_0 \in \mathbf{R}^r$ задовольняє системі рівнянь для породжуючих констант (5.54), приходимо до наступної задачі: знайти умови існування і алгоритм побудови розв'язку $x(t, \varepsilon)$, $x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $x(t, \cdot) \in \mathbf{C}_n[\varepsilon]$, $x(t, 0) = 0$ крайової задачі

$$\begin{aligned} (Lx(\cdot, \varepsilon))(t) &= \varepsilon Z(z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \\ \ell x(\cdot, \varepsilon) &= \varepsilon J(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Використовуючи властивості (5.50) нелінійних вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$ та вектор-функціонала $J(z, \varepsilon)$, виділимо у них лінійні частини по x і члени нульового порядку по ε . Внаслідок чого отримаємо розвинення

$$Z(z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = Z_0(t, c_0) + L_0(t)x(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (5.57)$$

$$J(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J_0(\cdot, c_0) + \ell_0 x(\cdot, \varepsilon) + R_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon),$$

де

$$Z_0(t, c_0) = Z(z_0(t, c_0), t, 0) \in \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1}),$$

$$J_0(\cdot, c_0) = J(z_0(\cdot, c_0), 0) \in \mathbf{R}^m,$$

$L_0(t) : \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{B}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^{n_1})$ — лінійна обмежена оператор-функція, яка є похідною Фреше від нелінійної вектор-функції $Z(z, t, \varepsilon)$ по z при $z = z_0(t, c_0)$,

$\ell_0 : \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^m$ — лінійний обмежений вектор-функціонал, який є похідною Фреше від нелінійного вектор-функціонала $J(z, \varepsilon)$ по z при $z = z_0(t, c_0)$,

R — нелінійна вектор-функція, що задовольняє умовам (d2) і (d3) з (5.50),

R_1 — нелінійний вектор-функціонал, що задовольняє умовам (d6) та (d7) з (5.50).

Розглядаючи нелінійності в крайовій задачі (5.56) як неоднорідності і застосовуючи до неї теорему 4.9, для її загального розв'язку $x(t, \varepsilon)$ отримаємо наступний вираз:

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + \bar{x}(t, \varepsilon),$$

в якому невідомий вектор $c(\varepsilon) \in \mathbf{C}_r[\varepsilon]$ визначається з умов розв'язності типу (5.54)

$$\begin{cases} \Phi\{Z_0(\cdot, c_0) + \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{J_0(\cdot, c_0) + \ell_0 x(\cdot, \varepsilon) + R_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ + L_0(\cdot)x(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\} = 0, \\ -\ell L^-[Z_0(\cdot, c_0) + L_0(\cdot)x(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)]\} = 0. \end{cases}$$

Невідома вектор-функція $\bar{x}(t, \varepsilon)$ визначається за формулою:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t, \varepsilon) = & \varepsilon(GZ(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(t) + \\ & + \varepsilon X(t)Q^- J(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon), \end{aligned}$$

де G — узагальнений оператор Гріна (4.54).

Використовуючи розвинення (5.57) і той факт, що векторна константа $c_0 \in \mathbf{R}^r$ необхідно задовольняє системі рівнянь для породжуючих констант (5.55), для знаходження неперервного по ε розв'язку $x(t, \varepsilon) \in \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $x(t, 0) = 0$ слабконелінійної крайової задачі (5.46), (5.47) приходимо до еквівалентної операторної системи

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + \bar{x}(t, \varepsilon),$$

$$B_0 c(\varepsilon) = - \left[\begin{array}{c} \Phi\{L_0(\cdot)\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\} \\ - \ell L^-[L_0(\cdot)\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)]\} \end{array} \right], \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(t, \varepsilon) = & \varepsilon G\{Z(z_0(\cdot, c_0) + L_0(\cdot)[X_r(\cdot)c(\varepsilon) + \bar{x}(\cdot, \varepsilon)] + \\ & + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t) + \varepsilon X(t)Q^-\{J(z_0(\cdot, c_0)) + \\ & + \ell_0[X_r(\cdot)c(\varepsilon) + \bar{x}(\cdot, \varepsilon)] + R_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\}, \end{aligned}$$

де

$$B_0 = \left[\begin{array}{c} \Phi L_0(\cdot) \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0 + \ell L^- L_0(\cdot)\} \end{array} \right] X_r(\cdot) -$$

$((\nu + d) \times r)$ -вимірною сталою матрицею.

Позначимо через $\mathcal{P}_{N(B_0)} : \mathbf{R}^r \rightarrow N(B_0)$ і $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} : \mathbf{R}^{\nu+d} \rightarrow Y_{B_0}$ — обмежені проектори, а через B_0^- — $(r \times (\nu + d))$ -вимірну узагальнено-обернену матрицю до матриці B_0 .

Розв'язність операторної системи (5.58) залежить від розв'язності її другого рівняння. Оскільки в загальному випадку матриця B_0 — прямокутна, то воно може бути всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0$), однозначно розв'язним ($\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$) та не всюди і неоднозначно розв'язним ($\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$).

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$ та $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$, тобто $\text{rank } B_0 < \min(r, \nu + d)$.

У цьому випадку за теоремою 4.4 маємо, що друге рівняння операторної системи (5.58) при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \left[\begin{array}{c} \Phi\{L_0(\cdot)\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} &+R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\} \\ &-\ell L^{-}[L_0(\cdot)\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)]\} \end{aligned} \right] = 0$$

буде розв'язним і його розв'язок можна представити у вигляді:

$$c(\varepsilon) = \mathcal{P}_{N_\eta(B_0)}c_\eta - B_0^- \left[\begin{aligned} &\Phi\{L_0(\cdot)\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + \\ &\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ &+R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} \\ &-\ell L^{-}[L_0(\cdot)\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)]\} \end{aligned} \right],$$

де $\mathcal{P}_{N_\eta(B_0)}$ — $(r \times \eta)$ -вимірна матриця, яка складена з $\eta = r - \text{rank } B_0$ лінійно-незалежних стовпців проектора $\mathcal{P}_{N(B_0)}$, c_η — довільний елемент простору $\mathbf{R}^\eta$. Зафіксувавши $c_\eta = c_\eta^{(0)}$, з множини розв'язків другого рівняння операторної системи (5.58) отримаємо один фіксований $c_\eta^\# \in N(B_0)$, $c_\eta^\# = \mathcal{P}_{N_\eta(B_0)}c_\eta^{(0)}$. У подальшому будемо вважати, що $c_\eta^{(0)} \equiv 0$ і, як наслідок, $c_\eta^\# = 0$.

Таким чином, при виконанні умови $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \left[\begin{array}{c} \Phi \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}} \end{array} \right] = 0$ операторна система (5.58) набере вигляду:

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= X_r(t)c(\varepsilon) + \bar{x}(t, \varepsilon), \\ c(\varepsilon) &= -B_0^- \left[\begin{aligned} &\Phi\{L_0(\cdot)\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + \\ &\mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ &+R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} \\ &-\ell L^{-}[L_0(\cdot)\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)]\} \end{aligned} \right], \end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}(t, \varepsilon) = & \varepsilon(G\{Z(z_0(\cdot, c_0) + L_0(\cdot)[X_r(\cdot)c(\varepsilon) + \bar{x}(\cdot, \varepsilon)] + \\ & + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t) + \varepsilon X(t)Q^-\{J(z_0(\cdot, c_0) + \\ & + \ell_0[X_r(\cdot)c(\varepsilon) + \bar{x}(\cdot, \varepsilon)] + R_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\}.\end{aligned}$$

Використовуючи [29], [41], [48], [69], зведемо операторну систему (5.59) до системи, для розв'язку якої застосовний метод простих ітерацій.

Введемо наступні позначення:

$y(\cdot, \varepsilon) = \text{col}(x(\cdot, \varepsilon), c(\varepsilon), \bar{x}(\cdot, \varepsilon))$ — вектор-стовпець з банахового простору $\mathfrak{B}_1 = \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \times \mathbf{C}_r[\varepsilon] \times \mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$;

$$K_1\varphi(\cdot, \varepsilon)(t) = -B_0^- \begin{bmatrix} \Phi L_0(\cdot) \\ P_{N_d(Q^*)}[\ell_0 - \ell L^- L_0(t)] \end{bmatrix} \varphi(\cdot, \varepsilon) -$$

обмежений оператор;

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & X_r(t) & I \\ 0 & 0 & K_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \quad (5.60)$$

клітинно-матричний оператор верхньотрикутного вигляду, де I — тотожний оператор у просторі $\mathbf{B}_1(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$;

$$\begin{aligned}U_2(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_0^- \begin{bmatrix} \Phi R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \\ P_{Y_{Q_d}}\{\ell_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell L^- R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\} \end{bmatrix} \\ \varepsilon[(G\{Z(z_0(\cdot, c_0) + L_0(\cdot)[X_r(\cdot)c(\varepsilon) + \bar{x}(\cdot, \varepsilon)] + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\})(t) + \\ + X(t)Q^+\{J(z_0(\cdot, c_0) + \ell_0[X_r(\cdot)c(\varepsilon) + \bar{x}(\cdot, \varepsilon)] + \ell_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\})]. \end{bmatrix}\end{aligned}$$

нелінійна вектор-функція, яка задовольняє умовам (d2), (d3) з (5.50).

Оператори, які входять у клітинно-матричний оператор (5.60), лінійні обмежені за визначенням та як суперпозиції лінійних обмежених операторів.

Використовуючи введені позначення, операторну систему (5.59) представимо у вигляді

$$y(t, \varepsilon) = W_1 y(\cdot, \varepsilon)(t) + (U_2(y(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(t). \quad (5.61)$$

Враховуючи структуру клітинно-матричного оператора W_1 верхньотрикутного вигляду з нульовими клітками на головній діагоналі і нижче, з системи (5.61) маємо

$$V_1 y(t, \varepsilon) = U_2(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon),$$

де

$$V_1 = I_{\mathfrak{B}_1} - W_1 = \begin{bmatrix} I & -X_r & -I \\ 0 & I_r & -K_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$I_{\mathfrak{B}_1} = \text{diag}\{I, I_r, I\}$ — тотожний оператор у просторі $\mathfrak{B}_1$, I_r — тотожний оператор у просторі $\mathbf{C}_r[\varepsilon]$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що оператор V_1 має обернений

$$V_1^{-1} = \begin{bmatrix} I & X_r & X_r K_1 + I \\ 0 & I_r & K_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Обмеженість оператора V_1^{-1} доводиться аналогічно п. 5.1.2.

Оскільки оператор U_2 — нелінійний і залежить від ε , а оператор V_1^{-1} — обмежений, то існує таке значення параметра $\varepsilon = \varepsilon^*$, що для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon^*$

суперпозиція операторів $V_1^{-1}U_2$ буде оператором стиску. Тоді з принципу стискаючих відображень маємо, що система (5.59) має єдиний розв'язок.

Використовуючи метод простих ітерацій для знаходження розв'язків крайової задачі (5.46), (5.47) в класі вектор-функцій неперервних по ε , які обертаються в нуль при $\varepsilon = 0$, отримаємо наступний ітераційний процес.

Наближення $\bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon)$ до $\bar{x}(t, \varepsilon)$ шукатимемо як частинні розв'язки крайових задач

$$(L\bar{x}_{k+1}(\cdot, \varepsilon))(t) = \varepsilon\{Z_0(t, c_0) + L_0(t)[X_r(t)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(t, \varepsilon)] + R(x_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\},$$

$$\ell\bar{x}_{k+1}(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\{J_0(\cdot, c_0) + \ell_0[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon)] + R_1(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\}.$$

За теоремою 4.9, враховуючи розвинення (5.57), ці розв'язки мають вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon) = & \varepsilon G\{Z(z_0(\cdot, c_0) + L_0(\cdot)[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon)] + \\ & + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t) + \varepsilon X(t)Q^-\{J(z_0(\cdot, c_0) + \\ & + \ell_0[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon)] + R_1(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\}. \end{aligned}$$

З необхідної і достатньої умови розв'язності цих крайових задач приходимо до рівнянь

$$B_0c_k(\varepsilon) = - \left[\begin{array}{l} \Phi\{L_0(\cdot)\bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0\bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + R_1(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\} \\ - \ell L^-[L_0(\cdot)\bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)]\} \end{array} \right], \quad (5.62)$$

з яких знаходяться k -і наближення $c_k(\varepsilon)$ до $c(\varepsilon)$. Розв'язність системи (5.62) для знаходження першого наближення забезпечується вибором константи $c_0 \in \mathbf{R}^r$ з системи рівнянь для породжуючих констант (5.55), а решти — умовою

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \left[\begin{array}{c} \Phi \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}} \end{array} \right] = 0.$$

Тоді $(k + 1)$ -е наближення $x_{k+1}(t, \varepsilon)$ до $x(t, \varepsilon)$ запишемо у вигляді:

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де $x_0(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t, \varepsilon) = 0$, $x_1(t, \varepsilon) = \bar{x}_1(t, \varepsilon)$

Таким чином, для крайової задачі (5.46), (5.47) справедлива наступна теорема.

Теорема 5.7. *Нехай крайова задача (5.46), (5.47) задовольняє умови (d1) – (d8) з (5.50), а відповідна породжуюча крайова задача (5.48), (5.49) при виконанні умови (5.51) має сім'ю породжуючих розв'язків (5.52). Тоді для кожного елемента $c_0 \in \mathbf{R}^r$, що задовольняє системі рівнянь для породжуючих констант (5.55), при виконанні умов*

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0, \quad \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \begin{bmatrix} \Phi \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}} \end{bmatrix} = 0$$

крайова задача (5.46), (5.47) має принаймні один розв'язок $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$ неперервний по ε , що обертається у породжуючий розв'язок $z_0(t, c_0)$ при $\varepsilon = 0$. Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0, \varepsilon_*] \subset [0, \varepsilon_0]$ ітераційного процесу

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$c_k(\varepsilon) = -B_0^- \begin{bmatrix} \Phi\{L_0(\cdot)\bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}}\{\ell_0\bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + R_1(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\} \\ - \ell L^-[L_0(\cdot)\bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)]\} \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon) = & \varepsilon G\{Z(z_0(\cdot, c_0) + L_0(\cdot)[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon)] + \\ & + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\}(t) + \varepsilon X(t)Q^-\{J(z_0(\cdot, c_0) + \\ & + \ell_0[X_r(\cdot)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon)] + R_1(x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon))\}.\end{aligned}$$

Зауваження 5.8. Якщо $\text{rank } B_0 = r$, то $r \leq \nu + d$. У цьому випадку нуль-простір $N(B_0)$ матриці B_0 буде нульовим і, як наслідок, $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$. Тоді при виконанні умови $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \begin{bmatrix} \Phi \\ \mathcal{P}_{Y_{Q_d}} \end{bmatrix} = 0$ крайова задача (5.46), (5.47) буде мати єдиний розв'язок і в ітераційному алгоритмі теореми 5.7 замість узагальнено-оберненої матриці B_0^- буде ліва обернена матриця $(B_0)_l^{-1}$.

Зауваження 5.9. Якщо $r = \nu + d$ і $\text{rank } B_0 = r$, то до матриці B_0 існує обернена B_0^{-1} . Тоді $\mathcal{P}_{N(B_0)} \equiv 0$ і, як наслідок, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \equiv 0$. Таким чином, умови (5.77) автоматично виконуються і крайова задача (5.46), (5.47) буде мати єдиний розв'язок. У цьому випадку в ітераційному алгоритмі теореми 5.7 замість узагальнено-оберненої матриці B_0^- буде обернена матриця B_0^{-1} .

Зауваження 5.10. Якщо $r > \nu + d$, то крайова задача (5.46), (5.47) єдиного розв'язку не має.

Зауваження 5.11. Якщо оператор L — всюди розв'язний ($\Phi \equiv 0$) звичайний диференціальний оператор, або диференціальний оператор із запізненням, то ітераційна процедура (5.77) переходить в раніш відомі ітераційні процедури [29], [41], відповідно.

5.4. Слабконелінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у гільбертових просторах

Застосовуючи доведені у параграфі 5.3. у загальному вигляді теореми, розглянемо задачу про умови існування та побудову ітераційних процедур знаходження розв'язків слабконелінійних інтегральних рівнянь, лінійні частини яких є інтегральними операторами Фредгольма з виродженими ядрами.

Розглянемо слабконелінійну крайову задачу

$$\begin{aligned} (Lz)(t) &:= z(t) - M(t) \int_a^b N(s)z(s)ds = \\ &= f(t) + \varepsilon \int_a^b K(t, s)Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon)ds, \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon \int_a^b K_1(s)J(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon)ds. \quad (5.65)$$

Разом із задачею (5.64), (5.65) розглянемо лінійну породжуючу крайову задачу

$$z_0(t) - M(t) \int_a^b N(s)z_0(s)ds = f(t), \quad (5.66)$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad (5.67)$$

яка отримується з (5.64), (5.65) при $\varepsilon = 0$.

Нехай:

(f1) $M(t) — (n \times m)$ -, $N(t) — (m \times n)$ -, $f(t) — (n \times 1)$ -, $K(t, s) — (n \times n)$ -, $K_1(t) — (k \times n)$ -вимірні матриці, компоненти яких належать до гільбертового простору $\mathbf{L}_2[a, b]$;

(f2) $Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ та $J(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ — нелінійні вектор-функції, які в околі, породжуючого розв'язку $\|z - z_0\| \leq q$ мають похідні Фреше по z , неперервні по сукупності змінних z, t та ε , $q, \varepsilon —$ (5.68)
достатньо малі величини;

(f3) $Z(0, t, 0) = 0, Z'_z(0, t, 0) = 0, J(0, 0) = 0, J'_z(0, 0) = 0$;

(f4) $\ell : \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^k$ — лінійний обмежений вектор-функціонал;

(f5) $\alpha \in \mathbf{R}^k$.

Знайдемо умови розв'язності і формули для представлення розв'язків крайової задачі (5.64), (5.65) з допомогою узагальненого оператора Гріна (4.81) лінійної напіводнорідної крайової задачі, який був побудований у підрозділі 4.4.2.

Розв'язки слабконелінійної крайової задачі (5.64), (5.65) будемо шукати у класі вектор-функцій:

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n), \quad z(t, \cdot) \in \mathbf{C}(0, \varepsilon_0],$$

які перетворюються при $\varepsilon = 0$ в один із породжуючих розв'язків $z_0(t) = z(t, 0)$ крайової задачі (5.66), (5.67).

У підрозділі 4.4.2. е теоремі 4.12 показано, що при виконанні умов

$$\begin{cases} \int_a^b \Phi_r^*(s) f(s) ds = 0, \\ P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell[f(\cdot) + M_1(\cdot) \int_a^b N_1(s) f(s) ds] \right\} = 0, \end{cases} \quad (5.69)$$

лінійна породжуюча крайова задача (5.66), (5.67) має сім'ю розв'язків

$$z(t) = X_\rho(t) c_\rho + (Gf)(t) + X_r(t) Q^+ \alpha, \quad (5.70)$$

де G — узагальнений оператор Гріна (4.89), який діє на функцію $f(t)$ за правилом

$$(Gf)(t) = \bar{f}(t) + \bar{M}_1(t) \int_a^b N_1(s) f(s) ds. \quad (5.71)$$

Тут $\bar{f}(t) = f(t) - X_r(t)Q^+ \ell f(\cdot)$; $\bar{M}_1(t) = M_1(t) - X_r(t)Q^+ \ell M_1(\cdot)$, $M_1(t) = [\bar{M}(t)S^{-1}, -X_r(t)\beta^{-1}]$ ($n \times (m + 2r)$)-вимірна матриця, яка складена з матриць $\bar{M}(t)S^{-1}$ та $X_r(t)\beta^{-1}$, $N_1(t) = \text{col}[\bar{N}(t), \Phi_r^*(t)]$ — ($n \times (m + 2r)$)-вимірна матриця, яка складена з матриць $\bar{N}(t)$ та $\Phi_r^*(t)$, $X_r(t)$ та $\Phi_r(t)$ — ($n \times r$)-вимірні матриці, які складені з лінійно-незалежних векторів нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ операторів L та L^* , відповідно, S^{-1} матриця обернена до матриці $S = I - \int_a^b \bar{N}(t)\bar{M}(t)dt$, Q^+ — псевдообернена матриця до ($k \times r$)-вимірної матриці $\bar{Q} = \ell X_r(\cdot)$.

Виконуючи у (5.64), (5.65) заміну змінної

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_\rho) + x(t, \varepsilon)$$

для відхилення $x(t, \varepsilon)$ від породжуючого розв'язку отримуємо наступну крайову задачу:

$$\begin{aligned} z(t) - M(t) \int_a^b N(s) z(s) ds &= f(t) + \\ + \varepsilon \int_a^b K(t, s) Z((z_0(s, c_\rho) + x(s, \varepsilon)), s, \varepsilon) ds, \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon \int_a^b K_1(s) J((z_0(s, c_\rho) + x(s, \varepsilon)), \varepsilon) ds. \quad (5.73)$$

Нехай у породжуючій задачі (5.66), (5.67) $f(t) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ і $\alpha \in \mathbf{R}^k$ такі, що умови (5.72) виконані. Тоді для крайової задачі (5.64), (5.65) справедлива теорема.

Теорема 5.8. *Нехай крайова задача (5.64), (5.65) задовольняє умови (f1) — (f5) з (5.68) і має розв'язок $z(t, \varepsilon)$, неперервний по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, що*

обертається при $\varepsilon = 0$ у деякий породжуючий розв'язок $z_0(t, c_\rho)$ вигляду (5.70), який отриманий при $c_\rho = c_0$. Тоді елемент $c_0 \in \mathbf{R}^p$ задовольняє системі рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b \Phi_r^*(s) \int_a^b K(s, \tau) Z((z_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds = 0, \\ P_{N_d(Q^*)} \left\{ \int_a^b K_1(s) J(z_0(s, c_0) + x(s, \varepsilon), \varepsilon) - \right. \\ \left. - \ell \int_a^b K(\cdot, s) Z((z_0(s, c_0) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \right. \\ \left. - \ell M_1(\cdot) \int_a^b N_1(s) \int_a^b K(s, \tau) Z((z_0(\tau, c_0) + x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds \right\} = 0. \end{array} \right. \quad (5.74)$$

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 5.6. Систему рівнянь (5.74) будемо називати системою рівнянь для породжуючих констант.

Використовуючи властивості (5.68) нелінійних оператора $Z(z, t, \varepsilon)$ і функціонала $J(z, \varepsilon)$ виділимо у них лінійні частини по x і члени нульового порядку по ε . Внаслідок чого отримаємо розвинення

$$Z(z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = Z_0(t, c_0) + L_0(t)x(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon),$$

$$J(z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon), \varepsilon) = J_0(t, c_0) + \ell_0(t)x(t, \varepsilon) + R_1(x(t, \varepsilon), \varepsilon),$$

де

$$Z_0(t, c_0) = Z(z_0(t, c_0), t, 0) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n),$$

$$J_0(t, c_0) = J(z_0(t, c_0), 0) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n);$$

$$L_0(t) = L_0(t, c_0) = \frac{\partial Z(z, t, 0)}{\partial z} \Big|_{z=z(t, c_0)} \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n);$$

$$\ell_0(t) = \ell_0(t, c_0) = \frac{\partial J(z, t, 0)}{\partial z} \Big|_{z=z(t, c_0)} \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n);$$

$R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ та $R_1(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ нелінійні вектор-функції, які задовольняють умовам (а2) і (а3) з (5.68).

Розглядаючи нелінійності у крайовій задачі (5.72), (5.73) як неоднорідності і застосовуючи до неї теорему 4.12, для представлення її розв'язку $x(t, \varepsilon)$ отримаємо наступний вираз:

$$x(t, \varepsilon) = X_\rho(t)c(\varepsilon) + \bar{x}(t, \varepsilon),$$

у якому невідомий вектор $c(\varepsilon) \in \mathbf{C}_\rho[\varepsilon]$ визначається з умов розв'язності типу (5.74)

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b \Phi_r^*(s) \int_a^b K(s, \tau) \left[Z_0(t, c_0) + L_0(t)x(t, \varepsilon) + \right. \\ \left. + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right] d\tau ds = 0, \\ P_{N_d(Q^*)} \left\{ \int_a^b K_1(s) \left[J_0(s, c_0) + \ell_0(s)x(s, \varepsilon) + R_1(x(s, \varepsilon), \varepsilon) \right] ds - \right. \\ - \ell \int_a^b K(\cdot, s) \left[Z_0(s, c_0) + L_0(s)x(s, \varepsilon) + R(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] ds - \\ \left. - \ell M_1(\cdot) \int_a^b N_1(s) \int_a^b K(s, \tau) \left[Z_0(\tau, c_0) + L_0(\tau)x(\tau, \varepsilon) + \right. \right. \\ \left. \left. + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \right] d\tau ds \right\} = 0, \end{array} \right.$$

де $x(s, \varepsilon) = X_\rho(s)c(\varepsilon) + \bar{x}(s, \varepsilon)$.

Невідома вектор-функція $\bar{x}(t, \varepsilon)$ визначається за формулою:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t, \varepsilon) = & \varepsilon \left(G \int_a^b K(\cdot, s) \left\{ Z_0(s, c_0) + L_0(s)x(s, \varepsilon) + R(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right\} ds \right)(t) - \\ & + X_r(t) Q^+ \int_a^b K_1(s) \left\{ J_0(s, c_0) + \ell_0(s)x(s, \varepsilon) + R_1(x(s, \varepsilon), \varepsilon) \right\} ds. \end{aligned}$$

де оператор G визначається формулою (5.71).

Позначимо

$$\bar{R}(x(s, \varepsilon), \bar{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) := L_0(s)\bar{x}(s, \varepsilon) + R(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon),$$

$$\bar{R}_1(x(s, \varepsilon), \bar{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) := \ell_0(s)\bar{x}(s, \varepsilon) + R_1(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon).$$

Використовуючи той факт, що векторна константа $c_0 \in \mathbf{R}^\rho$ необхідно задовольняє системі рівнянь для породжуючих констант (5.74), для знаходження неперервного по ε розв'язку $x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $x(t, 0) = 0$ слабконелінійної крайової задачі (5.64), (5.65) проходимо до еквівалентної операторної системи

$$x(t, \varepsilon) = X_\rho(t)c(\varepsilon) + \bar{x}(t, \varepsilon),$$

$$B_0 c(\varepsilon) = - \left[\begin{array}{l} \int_a^b \Phi_r^*(s) \int_a^b K(s, \tau) \bar{R}(x(\tau, \varepsilon), \bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds \\ P_{N_d(Q^*)} \left\{ \int_a^b K_1(s) \bar{R}_1(x(s, \varepsilon), \bar{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \right. \\ \left. - \ell \int_a^b K(\cdot, s) \bar{R}(x(s, \varepsilon), \bar{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \ell M_1(\cdot) \times \right. \\ \left. \times \int_a^b N_1(s) \int_a^b K(s, \tau) \bar{R}(x(\tau, \varepsilon), \bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds \right\} \end{array} \right], \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon \Big[& G \left(\int_a^b K(\cdot, s) \left\{ Z_0(s, c_0) + L_0(s) [X_\rho(s)c(\varepsilon) + \bar{x}(s, \varepsilon)] + \right. \right. \\ & \left. \left. + R(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds \right\} \right)(t) + X_r(t) Q^+ \int_a^b K_1(s) \left\{ J_0(s, c_0) + \right. \\ & \left. + \ell_0(s) [X_\rho(s)c(\varepsilon) + \bar{x}(s, \varepsilon)] + R_1(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right\} ds \Big], \end{aligned}$$

де

$$B_0 = \left[\begin{array}{l} \int_a^b \Phi_r^*(s) \int_a^b K(s, \tau) L_0(\tau) X_\rho(\tau) d\tau ds \\ P_{N_d(Q^*)} \left\{ \int_a^b K_1(s) \ell_0(s) X_\rho(s) ds - \ell \int_a^b K(\cdot, s) L_0(s) X_\rho(s) ds - \right. \\ \left. - \ell M_1(\cdot) \int_a^b N_1(s) \int_a^b K(s, \tau) L_0(\tau) X_\rho(\tau) d\tau ds \right\} \end{array} \right] -$$

$((r + d) \times \rho)$ -вимірна стала матриця. Нагадаємо, що $\rho = k - \text{rank } Q$, а $d = r - \text{rank } Q$.

Позначимо через $P_{N(B_0)} : \mathbf{R}^\rho \rightarrow N(B_0)$ і $P_{N(B_0^*)} : \mathbf{R}^{r+d} \rightarrow N(B_0^*)$ — обмежені ортопроектори, а через $B_0^+ = (\rho \times (r+d))$ -вимірну псевдообернену матрицю до матриці B_0 .

Нехай $\text{rank} B_0 < \min(\rho, r+d)$. Тоді за теоремою 4.4 друге рівняння операторної системи (5.75) при виконанні умови

$$P_{N(B_0^*)} \left[\begin{array}{l} \int_a^b \Phi_r^*(s) \int_a^b K(s, \tau) \bar{R}(x(\tau, \varepsilon), \bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds \\ P_{N_d(Q^*)} \left\{ \int_a^b K_1(s) \bar{R}_1(x(s, \varepsilon), \bar{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \right. \\ \left. - \ell \int_a^b K(\cdot, s) \bar{R}(x(s, \varepsilon), \bar{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \ell M_1(\cdot) \times \right. \\ \left. \times \int_a^b N_1(s) \int_a^b K(s, \tau) \bar{R}(x(\tau, \varepsilon), \bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds \right\} \end{array} \right] = 0$$

буде мати сім'ю розв'язків

$$c(\varepsilon) = P_{N(B_0)} \hat{c}_\rho - B_0^+ \left[\begin{array}{l} \int_a^b \Phi_r^*(s) \int_a^b K(s, \tau) \bar{R}(x(\tau, \varepsilon), \bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds \\ P_{N_d(Q^*)} \left\{ \int_a^b K_1(s) \bar{R}_1(x(s, \varepsilon), \bar{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \right. \\ \left. - \ell \int_a^b K(\cdot, s) \bar{R}(x(s, \varepsilon), \bar{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \ell M_1(\cdot) \times \right. \\ \left. \times \int_a^b N_1(s) \int_a^b K(s, \tau) \bar{R}(x(\tau, \varepsilon), \bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds \right\} \end{array} \right],$$

де $\hat{c}_\rho \in R^\rho$ — довільний елемент евклідового простору R^ρ , який у подальшому будемо вважати нулем $\hat{c}_\rho = 0$.

Таким чином, при виконанні умови $P_{N(B_0^*)} \left[\begin{array}{l} \Phi_r^*(s) \\ P_{N_d(Q^*)} \end{array} \right] = 0$ операторна система (5.75) буде мати вигляд:

$$x(t, \varepsilon) = X_\rho(t) c(\varepsilon) + \bar{x}(t, \varepsilon),$$

$$c(\varepsilon) = -B_0^+ \left[\begin{array}{l} \int_a^b \Phi_r^*(s) \int_a^b K(s, \tau) \bar{R}(x(\tau, \varepsilon), \bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds \\ P_{N_d(Q^*)} \left\{ \int_a^b K_1(s) \bar{R}_1(x(s, \varepsilon), \bar{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \right. \\ \left. - \ell \int_a^b K(\cdot, s) \bar{R}(x(s, \varepsilon), \bar{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \ell M_1(\cdot) \times \right. \\ \left. \times \int_a^b N_1(s) \int_a^b K(s, \tau) \bar{R}(x(\tau, \varepsilon), \bar{x}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds \right\} \end{array} \right], \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon \Big[& G \left(\int_a^b K(\cdot, s) \left\{ Z_0(s, c_0) + L_0(s) [X_\rho(s) c(\varepsilon) + \bar{x}(s, \varepsilon)] + \right. \right. \\ & \left. \left. + R(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds \right\} \right)(t) + X_r(t) Q^+ \int_a^b K_1(s) \left\{ J_0(s, c_0) + \right. \\ & \left. + \ell_0(s) [X_\rho(s) c(\varepsilon) + \bar{x}(s, \varepsilon)] + R_1(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right\} ds \Big]. \end{aligned}$$

Як показано у параграфі 5.3. операторна система (5.76) належить до класу систем, для яких застосовний збіжний метод простих ітерацій.

Теорема 5.9. *Нехай крайова задача (5.64), (5.65) задовольняє умови (f1) – (f5) з (5.68), а відповідна породжуюча крайова задача (5.66), (5.67) при виконанні умов (5.69) має сім'ю породжуючих розв'язків (5.70). Тоді для кожного елемента $c_0 \in \mathbf{R}^p$, що задовольняє системі рівнянь для породжуючих констант (5.74), при виконанні умов*

$$P_{N(B_0)} \neq 0, \quad P_{N(B_0^*)} \begin{bmatrix} \Phi_r^*(s) \\ P_{N_d(Q^*)} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.77)$$

крайова задача (5.64), (5.65) має принаймні один розв'язок $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$ неперервний по ε , що обертається у породжуючий розв'язок $z_0(t, c_0)$ при $\varepsilon = 0$. Цей розв'язок знаходиться за допомогою збіжного на $[0, \varepsilon_] \subset [0, \varepsilon_0]$ ітераційного процесу*

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned}
x_{k+1}(t, \varepsilon) &= X_\rho(t)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\
c_k(\varepsilon) &= -B_0^+ \left[\begin{aligned} &\int_a^b \Phi_r^*(s) \int_a^b K(s, \tau) \bar{R}(x_k(\tau, \varepsilon), \bar{x}_k(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds \\ &P_{N_d(Q^*)} \left\{ \int_a^b K_1(s) \bar{R}_1(x_k(s, \varepsilon), \bar{x}_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \right. \\ &\quad \left. - \ell \int_a^b K(\cdot, s) \bar{R}(x_k(s, \varepsilon), \bar{x}_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds - \ell M_1(\cdot) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_a^b N_1(s) \int_a^b K(s, \tau) \bar{R}(x_k(\tau, \varepsilon), \bar{x}_k(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) d\tau ds \right\} \end{aligned} \right], \quad (5.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \left[G \left(\int_a^b K(\cdot, s) \left\{ Z_0(s, c_0) + L_0(s) [X_\rho(s)c_k(\varepsilon) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{x}_k(s, \varepsilon)] + R(x_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds \right\} \right) (t) + X_r(t) Q^+ \int_a^b K_1(s) \left\{ J_0(s, c_0) + \right. \\
&\quad \left. \left. + \ell_0(s) [X_\rho(s)c_k(\varepsilon) + \bar{x}_k(s, \varepsilon)] + R_1(x_k(s, \varepsilon), \varepsilon) \right\} ds \right].
\end{aligned}$$

Зауваження 5.12. Нехай $P_{N(B_0)} = 0$. Це означає, що $\text{rank } B_0 = \rho$. У цьому випадку при виконанні умови $P_{N(B_0^*)} \begin{bmatrix} \Phi \\ P_{N_d(Q^*)} \end{bmatrix} = 0$ крайова задача (5.64), (5.65) буде мати єдиний розв'язок.

Висновки до п'ятого розділу

У п'ятому розділі з використанням теорем про необхідні та достатні умови існування та представлення розв'язків операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами та лінійних крайових задач для них, досліджено слабконелінійні операторні рівняння та слабконелінійні крайові задачі для операторних рівнянь з узагальнено оборотною лінійною частиною у банахових та гільбертових просторах.

У цьому розділі:

1. Для слабконелінійних операторних рівнянь (лінійна частина яких — нормально розв'язний оператор з доповнювальними ядром та образом) отримано необхідні умови існування розв'язків, побудовано операторне рівняння для породжуючих елементів, отримано достатні умови існування єдиного та принаймні одного розв'язків, запропоновано ітераційні процедури для їх побудови та доведено їх збіжність.
2. Використовуючи загальні підходи до дослідження слабконелінійних операторних рівнянь отримано необхідні і достатні умови існування розв'язків слабконелінійних операторних рівнянь у банахових просторах, лінійна частина яких — не всюди розв'язне операторне рівняння Фредгольма з виродженим ядром. Отримано необхідні умови існування розв'язків, побудовано операторне рівняння для породжуючих елементів, встановлено достатні умови існування принаймні одного розв'язку, запропоновано збіжні ітераційні процедури для побудови цих розв'язків.
3. Для слабконелінійних крайових задач, лінійна частина вихідних рівнянь яких — нетеровий оператор, побудовано систему операторних рівнянь для породжуючих констант. Отримано достатні умови існування єдиного та принаймні одного розв'язку слабконелінійних

- крайових задач. З використанням узагальненого оператора Гріна відповідної лінійної напіводнорідної крайової задачі, запропоновані збіжні ітераційні процедури для побудови принаймні одного розв'язку таких задач.
4. Для слабконелінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у скінченновимірних гільбертових просторах побудована система операторних рівнянь для породжуючих констант, отримано достатні умови існування принаймні одного розв'язку. З використанням узагальненого оператора Гріна відповідної лінійної напіводнорідної крайової задачі побудовано збіжні ітераційні процедури для знаходження розв'язків таких задач.

РОЗДІЛ 6

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Запропонований у [190] підхід до дослідження періодичних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у [41], [186] успішно був узагальнений на випадок нетерових крайових задач для всюди розв'язних диференціальних систем. Отримані у попередніх розділах необхідні і достатні умови існування і формули для представлення загальних розв'язків лінійних операторних рівнянь з не всюди розв'язними операторами та крайових задач для них, що діють у банахових або гільбертових просторах, дозволяють розв'язати задачі про знаходження умов існування та структуру загальних розв'язків крайових задач для нормально розв'язних операторних рівнянь з імпульсною дією.

У цьому розділі розглянуті умови існування та алгоритми побудови розв'язків лінійних не всюди розв'язних нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією та лінійних крайових задач для них, а також лінійні та слабконелінійні крайові задачі для диференціальних систем із запізненням та імпульсною дією.

6.1. Лінійні крайові задачі для нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією

Нехай $\mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ — простір сумовних зі степенем p , $1 < p < \infty$ на скінченному проміжку $\mathcal{I} = [a, b]$ вектор-функцій $z(\cdot) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^n$ з нормою

$$\|z\|_{\mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)} = \sqrt[p]{\int_a^b \sum_{i=1}^n |z(s)|^p ds},$$

$\mathbf{D}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ — простір абсолютно неперервних вектор-функцій, похідні яких належать простору $\mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ (індекс p вказує на зв'язок з простором $\mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ у вказаному сенсі) з нормою

$$\|z\|_{\mathbf{D}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)} = \|z(a)\|_{\mathbf{R}^n} + \|\dot{z}\|_{\mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)},$$

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\eta$ — фіксована строго впорядкована множина точок проміжку $\mathcal{I}$, $\mathbf{D}_p(\mathcal{I} \setminus \{\tau_i\}_I, \mathbf{R}^n)$ — простір абсолютно неперервних на кожному з проміжків $[a, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), \dots, [\tau_\eta, b]$ вектор-функцій $z(t)$, неперервних справа в точках $\tau_i, i = \overline{1, \eta}$, які мають у цих точках розриви першого роду, таких, що $\dot{z}(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$.

Розглянемо лінійне операторне рівняння

$$(Lz)(t) = f(t), \quad (6.1)$$

де $L : \mathbf{D}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ — лінійний нетеровий оператор ($\dim \ker L = \mu < \infty, \dim \ker L^* = \nu < \infty, \mu \neq \nu$).

Нехай в моменти часу $\tau_i, i = 1, 2, \dots, \eta$ розв'язки рівняння (6.1) мають стрибки, які визначаються рівностями

$$\Delta z \Big|_{t=\tau_i} - S_i z(\tau_i-) = a_i, \quad (6.2)$$

де $\Delta z|_{t=\tau_i} = z(\tau_i+) - z(\tau_i-)$, матриці $S_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ такі, що $\det(E - S_i) \neq 0$, тобто розв'язки рівняння (6.1) однозначно продовжуються через точки розриву, $a_i \in \mathbf{R}^n$.

Систему (6.1), (6.2) називатимемо лінійним нетеровим операторним рівнянням з імпульсною дією.

Під розв'язком лінійного нетероного операторного рівняння з імпульсною дією (6.1) — (6.2) будемо розуміти функцію $z(t) \in \mathbf{D}_p(\mathcal{I} \setminus \{\tau_i\}_I, \mathbf{R}^n)$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, що задовольняє рівнянню (6.1) при майже всіх $t \in [a, b]$ та умовам (6.2) при $t = \tau_i, i = \overline{1, \eta}$.

Будемо шукати розв'язки системи (6.1), (6.2), які задовольняють умовам

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad (6.3)$$

де $\ell : \mathbf{D}_p(\mathcal{I} \setminus \{\tau_i\}_I, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}^m$ — m -вимірний лінійний обмежений векторний функціонал, $\alpha \in \mathbf{R}^m$.

Систему (6.1) — (6.3) — будемо називати лінійною крайовою задачею для нетерового операторного рівняння з імпульсною дією.

6.1.1. Умови існування та загальний розв'язок лінійного імпульсного нетерового операторного рівняння. Спочатку розглянемо задачу про знаходження загального розв'язку нетерового операторного рівняння з імпульсною дією

$$(Lz)(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \quad t \neq \tau_i, \quad (6.4)$$

$$\Delta z|_{t=\tau_i} = S_i z(\tau_i - 0) + a_i, \quad i = 1, 2, \dots, \eta. \quad (6.5)$$

За теоремою 4.4 лінійне нетерове операторне рівняння (6.4) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, які задовольняють умову

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0, \quad (6.6)$$

при виконанні якої воно має розв'язок

$$z(t, c) = X(t)c + (L^- f)(t),$$

де $X(t)$ — $(n \times \mu)$ -вимірна фундаментальна матриця, яка складена з базисних векторів нуль-простору $N(L)$ оператора L , $c \in \mathbf{R}^\mu$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow Y_L$ проектор на підпростір $Y_L \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$; L^- — узагальнено-обернений оператор до нетерового оператора L .

При виконанні умови (6.6) нетерове операторне рівняння (6.4) на проміжках $[a, \tau_1]$ та $]\tau_1, \tau_2]$ має загальні розв'язки

$$z_1(t) = X(t)c + (L^- f)(t), \quad t \in [a, \tau_1],$$

$$z_2(t) = X(t)c_2 + (L^-f)(t), \quad t \in]\tau_1, \tau_2], \quad (6.7)$$

де $c, c_2 \in \mathbf{R}^\mu$, L^- — узагальнено-обернений оператор до нетерового оператора L .

З імпульсних умов (6.5) маємо:

$$\begin{aligned} X(\tau_1+)c_2 + (L^-f)(\tau_1+) = \\ = (E + S_1)\{X(\tau_1-)c + (L^-f)(\tau_1-)\} + a_1. \end{aligned} \quad (6.8)$$

З метою спрощення записів у подальшому вважатимемо, що

$$X(\tau_i-) = X(\tau_i+) = X(\tau_i), \quad (L^-f)(\tau_i-) = (L^-f)(\tau_i+) = (L^-f)(\tau_i).$$

Позначимо через $P_1 = P_{N(X(\tau_1))}$ — $(\mu \times \mu)$ -вимірну матрицю-ортопроектор, що проектує евклідів простір $\mathbf{R}^\mu$ на нуль-простір $N(X(\tau_1))$ сталої $(n \times \mu)$ -вимірної матриці $X(\tau_1)$, $P_1 : \mathbf{R}^\mu \rightarrow N(X(\tau_1))$, а через $P_1^{(*)} = P_{N(X^*(\tau_1))}$ — $(n \times n)$ -вимірну матрицю-ортопроектор, що проектує евклідів простір $\mathbf{R}^n$ на нуль-простір $N(X^*(\tau_1))$ $(\mu \times n)$ -вимірної матриці $X^*(\tau_1)$ спряженої до матриці $X(\tau_1)$, $P_1^{(*)} : \mathbf{R}^n \rightarrow N(X^*(\tau_1))$.

Оскільки $(n \times \mu)$ -вимірна матриця $X(t)$ складена з повної системи μ лінійно-незалежних базисних векторів $\{f_i\}_{i=1}^\mu$, то стала матриця $X(\tau_1)$ має повний ранг ($\text{rank } X(\tau_1) = n$, $n \leq \mu$), тому $P_1^{(*)} \equiv 0$. Тоді система (6.8) завжди розв'язна відносно $c_2 \in \mathbf{R}^\mu$, оскільки умова її розв'язності

$$P_1^{(*)}\{(E + S_1)X(\tau_1)c + S_1(L^-f)(\tau_1) + a_1\} = 0$$

завжди виконується і при цьому вона має сім'ю розв'язків

$$c_2 = P_1c + X^+(\tau_1)(E + S_1)X(\tau_1)c + X^+(\tau_1)S_1(L^-f)(\tau_1) + X^+(\tau_1)a_1,$$

де $P_1c \in N(X(\tau_1))$, $c \in \mathbf{R}^\mu$ — довільний μ -вимірний вектор, $X^+(\tau_1)$ — єдина $(\mu \times n)$ -вимірна псевдообернена матриця до матриці $X(\tau_1)$. Матрицю $X^+(\tau_1)$ можна побудувати за формулою (3.24), яка в цьому випадку має вигляд

$$X^+(\tau_1) = (E_\mu - P_1)X_r^{-1}(\tau_1),$$

оскільки як було показано вище $P_1^{(*)} = P_{N(X^*(\tau_1))} \equiv 0$. E_μ — одинична матриця розмірністю μ .

Підставивши знайдене значення c_2 у (6.7), отримаємо вираз для загального розв'язку $z_2(t)$ нетерового операторного рівняння з імпульсною дією (6.4) на проміжку $]\tau_1, \tau_2]$

$$z_2(t) = X(t)[P_1 + X^+(\tau_1)(E + S_1)X(\tau_1)]c + \\ + (L^-f)(t) + X(t)X^+(\tau_1)S_1(L^-f)(\tau_1) + X(t)X^+(\tau_1)a_1,$$

який після позначень

$$\bar{S}_1 = X^+(\tau_1)(E + S_1)X(\tau_1), \quad (L_1^-f)(\tau_1) = X^+(\tau_1)S_1(L^-f)(\tau_1)$$

запишемо у вигляді

$$z_2(t) = X(t)[\bar{S}_1 + P_1]c + (L^-f)(t) + \\ + X(t)(L_1^-f)(\tau_1) + X(t)X^+(\tau_1)a_1.$$

На проміжку $]\tau_2, \tau_3]$ розв'язок нетерового операторного рівняння (6.1) має вигляд:

$$z_3(t) = X(t)c_3 + (L^-f)(t), \quad t \in]\tau_2, \tau_3], \quad c \in \mathbf{R}^\mu. \quad (6.9)$$

З імпульсних умов (6.2) маємо:

$$X(\tau_2+)c_3 + (L^-f)(\tau_2+) = \\ (E + S_2)\{X(\tau_2-)[\bar{S}_1 + P_1]c + (L^-f)(\tau_2-) + \\ X(\tau_2-)(L_0^-f)(\tau_1) + X(\tau_2-)X^+(\tau_1)a_1\} + a_2. \quad (6.10)$$

Позначимо через $P_2 - (\mu \times \mu)$ -вимірну матрицю-ортопроектор, $P_2 : \mathbf{R}^\mu \rightarrow N(X(\tau_2))$, а через $P_2^{(*)} - (n \times n)$ -вимірну матрицю-ортопроектор $P_2^{(*)} : \mathbf{R}^n \rightarrow N(X^*(\tau_2))$.

Стала $(n \times \mu)$ -вимірною матриця $X(\tau_2)$ має повний ранг, $P_2^{(*)} \equiv 0$, тому рівняння (6.10) завжди розв'язне відносно $c_3 \in \mathbf{R}^\mu$ і має сім'ю розв'язків

$$\begin{aligned} c_3 = & P_2 c + X^+(\tau_2)(E + S_2)X(\tau_2)[\bar{S}_1 + P_1]c + \\ & + X^+(\tau_2)S_2(L^- f)(\tau_2) + X^+(\tau_2)(E + S_2)X(\tau_2)(L_1^- f)(\tau_1) + \\ & + X^+(\tau_2)(E + S_2)X(\tau_2)X^+(\tau_1)a_1 + X^+(\tau_2)a_2. \end{aligned}$$

Після позначень

$$\bar{S}_2 = X^+(\tau_2)(E + S_2)X(\tau_2),$$

$$(L_2^- f)(\tau_2) = X^+(\tau_2)S_2(L^- f)(\tau_2),$$

підставивши знайдене значення c_3 у рівняння (6.9), отримаємо вираз для загального розв'язку $z_3(t)$ на проміжку $]\tau_2, \tau_3]$

$$\begin{aligned} z_3(t) = & X(t)[\bar{S}_2\bar{S}_1 + \bar{S}_2P_1 + P_2]c + (L^- f)(t) + \\ & + X(t)[\bar{S}_2(L_1^- f)(\tau_1) + (L_2^- f)(\tau_2)] + X(t)[\bar{S}_2X^+(\tau_1)a_1 + X^+(\tau_2)a_2]. \end{aligned}$$

Провівши аналогічні обчислення на проміжку $]\tau_3, \tau_4]$ для розв'язку $z_4(t)$ отримаємо:

$$\begin{aligned} z_4(t) = & X(t)[\bar{S}_3\bar{S}_2\bar{S}_1 + \bar{S}_3\bar{S}_2P_1 + \bar{S}_3P_2 + P_3]c + (L^- f)(t) + \\ & + X(t)[\bar{S}_3\bar{S}_2(L_1^- f)(\tau_1) + \bar{S}_3(L_2^- f)(\tau_2) + (L_3^- f)(\tau_3)] + \\ & + X(t)[\bar{S}_3\bar{S}_2X^+(\tau_1)a_1 + \bar{S}_3X^+(\tau_2)a_2 + X^+(\tau_3)a_3], \end{aligned}$$

де

$$\bar{S}_3 = X^+(\tau_3)(E + S_3)X(\tau_3),$$

$$(L_3^- f)(\tau_3) = X^+(\tau_3)S_3(L^- f)(\tau_3),$$

Продовжуючи цей процес далі, для нетерового операторного рівняння з імпульсною дією отримаємо наступне твердження.

Теорема 6.1. Нетерове операторне рівняння з імпульсною дією (6.1), (6.2) розв'язне для будь-яких $a_i \in \mathbf{R}^n$ ($i = 1, \dots, \eta$) і тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, які задовольняють умову

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0. \quad (6.11)$$

При виконанні цієї умови воно має загальний розв'язок

$$z(t, c) = \overline{X}(t)c + \left(L_{\Delta}^{-} \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix} \right) (t), \quad c \in \mathbf{R}^{\mu}, \quad (6.12)$$

де $\overline{X}(t) = X(t) \sum_{i=1}^k \prod_{\nu=k-1}^i \overline{S}_{\nu} P_{i-1}$, $t \in]\tau_{k-1}, \tau_k]$ — $(n \times \mu)$ -вимірна матриця, яка є розв'язком відповідного (6.4), (6.5) однорідного ($f(t) = 0, a_i = 0$) нетерового операторного рівняння з імпульсною дією,

$$\left(L_{\Delta}^{-} \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix} \right) (t) = (L^{-} f)(t) + \sum_{i=1}^{k-1} (\tilde{L}_i^{-} f)(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{X}_i(t) a_i, \quad t \in]\tau_{k-1}, \tau_k]$$

— узагальнено-обернений оператор до нетерового оператора з імпульсною дією $L_{\Delta} = \text{col}[L, \Delta - S_i]$.

Тут

$$(\tilde{L}_i^{-} f)(t) = X(t) \prod_{\nu=k-1}^{i+1} \overline{S}_{\nu} (L_i^{-} f)(\tau_i), \quad \tilde{X}_i(t) = X(t) \prod_{\nu=k-1}^{i+1} \overline{S}_{\nu} X^{+}(\tau_i),$$

$$\overline{S}_i = X^{+}(\tau_i)(E + S_i)X(\tau_i), \quad (L_i^{-} f)(\tau_i) = X^{+}(\tau_i)S_i(L^{-} f)(\tau_i),$$

$P_0 = E_{\mu}$, $\prod_{\nu=k}^{i+1} \overline{S}_{\nu} = E_{\mu}$, якщо $k < i + 1$, $X^{+}(\tau_i)$ — $(\mu \times n)$ -вимірні псевдообернені матриці до $(n \times \mu)$ -вимірних сталих матриць $X(\tau_i)$; $P_i : \mathbf{R}^{\mu} \rightarrow N(X(\tau_i))$ — $(\mu \times \mu)$ -вимірні матриці-ортoprojectори евклідового простору $\mathbf{R}^{\mu}$ на нуль-простори $N(X(\tau_i))$ матриць $X(\tau_i)$, E_{μ} — одинична матриця.

Зауваження 6.1. Якщо рівняння (6.1) має розв'язок при будь-якій функції $f(t) \in L_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, то в теоремі 6.1 умова (6.11) буде відсутня. Тоді імпульсне операторне рівняння (6.1), (6.2) є всюди розв'язним, наприклад, у випадку звичайних диференціальних систем з імпульсною дією [41], імпульсних систем із відхиленням аргументу, які будуть розглянуті далі. Більше того, у випадку систем звичайних диференціальних рівнянь формула (6.12) значно спрощується [190].

Зауваження 6.2. Якщо оператор L діє у гільбертових просторах, то в теоремі 6.1 замість проектора P_{Y_L} буде ортопроектор $P_{N(L^*)}$, а замість узагальнено-оберненого оператора L^- буде псевдообернений оператор L^+ .

6.1.2. Умови існування та загальний розв'язок лінійної крайової задачі для нетерового операторного рівняння з імпульсною дією. Далі розглянемо розв'язність та встановимо вигляд загального розв'язку лінійної крайової задачі з імпульсною дією (6.1) — (6.3).

Для того, щоб розв'язок (6.12) нетерового операторного рівняння з імпульсною дією (6.1), (6.2) задовольняв крайовим умовам (6.3) необхідно і достатньо, щоб $\ell z(\cdot, c) = \alpha$, звідки для визначення векторної константи $c \in \mathbf{R}^\mu$ отримаємо алгебраїчну систему

$$Qc = \alpha - \ell \left(L_{\Delta}^- \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix} \right) (\cdot) \quad (6.13)$$

де $Q = \ell \bar{X}(\cdot) = \ell X(\cdot) \sum_{i=1}^{\eta} \prod_{\nu=\eta-1}^i \bar{S}_{\nu} P_{i-1}$ — $(m \times \mu)$ -вимірна стала матриця.

Нехай $\text{rank } Q = r_1$. За теоремою 4.4 рівняння (6.13) розв'язне відносно $c \in \mathbf{R}^\mu$ тоді і тільки тоді, коли

$$P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell \left(L_{\Delta}^- \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix} \right) (\cdot) \right\} = 0, \quad d = m - r_1$$

і при цьому має $r = n - r_1$ - параметричну сім'ю розв'язків

$$c = P_{N_r(Q)}c_r + Q^+\alpha - Q^+\ell\left(L_{\Delta}^-\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(\cdot), \quad r = \mu - r_1. \quad (6.14)$$

Тут Q^+ — єдина $(\mu \times m)$ -вимірна матриця псевдообернена до $(m \times \mu)$ -вимірної матриці Q ; $P_{N_r(Q)}$ — $(\mu \times r)$ -вимірна матриця, стовпці якої — повна система r лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(Q)} : \mathbf{R}^\mu \rightarrow N(Q)$; $P_{N_d(Q^*)}$ — $(d \times m)$ -вимірна матриця, рядки якої — повна система d лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{N(Q^*)}$.

Підставивши значення $c \in \mathbf{R}^r$ (6.14) у (6.12), отримаємо загальний розв'язок $z(t, c_r)$ лінійної крайової задачі для нетерового операторного рівняння з імпульсною дією:

$$\begin{aligned} z(t, c_r) = & \bar{X}(t)P_{N_r(Q)}c_r + \bar{X}(t)Q^+\alpha + (L^-f)(t) - \\ & - \bar{X}(t)Q^+\ell(L^-f)(\cdot) + \sum_{i=1}^{k-1}(\tilde{L}_i^-f)(t) - \sum_{i=1}^{\eta-1}\bar{X}(t)Q^+\ell(\tilde{L}_i^-f)(\cdot) + \\ & + \sum_{i=1}^{k-1}\tilde{X}_i(t)a_i - \sum_{i=1}^{\eta-1}\bar{X}(t)Q^+\ell\tilde{X}_i(\cdot)a_i, \quad t \in]\tau_{k-1}, \tau_k]. \end{aligned}$$

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 6.2. *Нехай $\text{rank } Q < \min(m, \mu)$. Тоді лінійна крайова задача (6.1) — (6.3) для нетерового операторного рівняння з імпульсною дією розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $\alpha \in \mathbf{R}^m$, $a_i \in \mathbf{R}^n$, які задовольняють $\nu + d$ лінійно-незалежним умовам*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(\cdot) = 0, \quad (6.15)$$

$$P_{N_d(Q^*)}\left\{\alpha - \ell\left(L_{\Delta}^-\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(\cdot)\right\} = 0. \quad (6.16)$$

При виконанні цих умов вона має сім'ю r лінійно-незалежних розв'язків

$$z(t, c_r) = \overline{X}(t)c_r + \left(G_{\Delta} \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix} \right) (t) + \overline{X}(t)Q^+\alpha \quad (6.17)$$

де $\overline{X}_r(t) = \overline{X}(t)P_{N_r(Q)}$ — $(n \times r)$ -вимірна матриця, яка є розв'язком відповідної однорідної ($f(t) = 0, \alpha = 0, a_i = 0$) крайової задачі з імпульсною дією,

$$\begin{aligned} \left(G_{\Delta} \begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix} \right) (t) &:= (L^-f)(t) - \overline{X}(t)Q^+\ell(L^-f)(\cdot) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} (\tilde{L}_i^-f)(t) - \sum_{i=1}^{\eta-1} \overline{X}(t)Q^+\ell(\tilde{L}_i^-f)(\cdot) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{X}_i(t)a_i - \sum_{i=1}^{\eta-1} \overline{X}(t)Q^+\ell\tilde{X}_i(\cdot)a_i \end{aligned} \quad (6.18)$$

— узагальнений оператор Гріна відповідної (6.1) — (6.3) напіводнорідної ($\alpha = 0$) крайової задачі з імпульсною дією, $t \in]\tau_{k-1}, \tau_k]$.

Зауваження 6.3. Якщо лінійне операторне рівняння (6.1) є всюди розв'язним, наприклад, у випадку систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією, то у теоремі 6.2 умова (6.15) буде відсутня, а формула (6.18) значно спрощується [36].

Приклад 6.1.

Знайдемо умову розв'язності і загальний вигляд розв'язку лінійної крайової задачі для операторного рівняння з імпульсною дією

$$(Lz)(t) \equiv \dot{z}(t) - z(1) + z(0) = f(t), \quad t \in [0, 2], \quad (6.19)$$

$$\Delta z|_{t=\tau_1} = S_1 z(\tau_1 - 0) + a_1, \quad \tau_1 \in]0, 2[, \quad S_1 \in \mathbf{R}^1, \quad (6.20)$$

$$\ell z(\cdot) = z(0) - z(2) = \alpha. \quad (6.21)$$

Оператор $L : \mathbf{D}_2([0, 2], \mathbf{R}^1) \rightarrow \mathbf{L}_2([0, 2], \mathbf{R}^1)$ діє з простору абсолютно неперервних функцій у простір підсумовуваних з квадратом функцій і є нетеровим.

Дійсно, однорідні рівняння

$$(Lz)(t) = 0, \quad (L^*y)(t) = 0$$

мають, відповідно, лінійно-незалежні розв'язки

$$z_1(t) = 1, \quad z_2(t) = t; \quad y(t) = \chi_{[0,1]}(t),$$

де $\chi_{[0,1]}(t)$ – характеристична функція відрізка $[0, 1]$.

Проектори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{D}_2([0, 2], \mathbf{R}^1) \rightarrow N(L)$ та $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{L}_2([0, 2], \mathbf{R}^1) \rightarrow Y_L$, які побудовані за формулами (2.12), мають вигляд:

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = 3/2t \int_0^2 (s-1)z(s)ds + \int_0^2 (2-3/2s)z(s)ds,$$

$$(\mathcal{P}_{Y_L}y)(t) = \chi_{[0,1]}(t) \int_0^2 \chi_{[0,1]}(s)y(s)ds.$$

З теореми 4.4 маємо, що рівняння (6.19) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_2([0, 2], \mathbf{R}^1)$, які задовольняють умову

$$(\mathcal{P}_{Y_L})f(t) = \chi_{[0,1]}(t) \int_0^2 \chi_{[0,1]}(s)f(s)ds = 0,$$

яка еквівалентна умові

$$\int_0^1 f(s)ds = 0. \quad (6.22)$$

При виконанні умови (6.22) рівняння (6.19) має двохпараметричну сім'ю розв'язків

$$z(t) = X(t)c + (L^-f)(t), \quad c \in \mathbf{R}^2,$$

де $X(t) = [t \ 1]$ – матриця, яка складена з лінійно-незалежних розв'язків рівняння $(Lz)(t) = 0$;

$$\begin{aligned} (L^-f)(t) = & \int_0^t f(s)ds + t\chi_{[0,1]}(t) \int_0^2 \chi_{[0,1]}(s)f(s)ds + \\ & + \frac{t}{2} \int_0^2 (\chi_{[0,1]}(s) - 1)f(s)ds - \end{aligned}$$

узагальнено-обернений оператор до оператора L .

Побудуємо тепер загальний розв'язок операторного рівняння з імпульсною дією (6.19), (6.20). Оскільки $X(t) = [t \ 1]$, то $X(\tau_1) = [\tau_1 \ 1]$. Знайдемо $X^+(\tau_1)$, $P_1 : \mathbf{R}^2 \rightarrow N(X(\tau_1))$ та обчислимо $\bar{S}_1 + P_1$:

$$X^+(\tau_1) = \frac{1}{1 + \tau_1^2} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \frac{1}{1 + \tau_1^2} \begin{bmatrix} 1 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & \tau_1^2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{S}_1 + P_1 = \frac{1}{1 + \tau_1^2} \begin{bmatrix} 1 + (1 + S_1)\tau_1^2 & S_1\tau_1 \\ S_1\tau_1 & 1 + S_1 + \tau_1^2 \end{bmatrix}.$$

Враховуючи це, загальний розв'язок $z(t) = \begin{cases} z_1(t), & t \in [0, 1], \\ z_2(t), & t \in]1, 2] \end{cases}$ нетерового операторного рівняння з імпульсною дією (6.19), (6.20) матиме вигляд:

$$z_1(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} c + \int_0^t f(s)ds + t \int_0^1 f(s)ds - \frac{t}{2} \int_1^2 f(s)ds,$$

$$\begin{aligned}
z_2(t) = & \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1 + \tau_1^2} \begin{bmatrix} 1 + (1 + S_1)\tau_1^2 & S_1\tau_1 \\ S_1\tau_1 & 1 + S_1 + \tau_1^2 \end{bmatrix} c + \\
& + \int_0^t f(s)ds - \frac{t}{2} \int_1^2 f(s)ds + \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1 + \tau_1^2} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \\
& \times \left\{ S_1 \int_0^{\tau_1} f(s)ds + (E + S_1)\tau_1 \int_0^1 f(s)ds - \frac{S_1\tau_1}{2} \int_1^2 f(s)ds + \right. \\
& \left. + \frac{1}{1 + \tau_1^2} \begin{bmatrix} S_1\tau_1 \\ S_1 \end{bmatrix} a_1 \right\},
\end{aligned} \tag{6.23}$$

де $c \in \mathbf{R}^1$.

Тепер знайдемо розв'язки крайової задачі з імпульсною дією (6.19) – (6.21).

Нехай для визначеності $S_1 = 1$, $\tau_1 = 1$. Тоді з (6.23) маємо:

$$\begin{aligned}
z_1(t) = & \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} c + \int_0^t f(s)ds + t \int_0^1 f(s)ds - \frac{t}{2} \int_1^2 f(s)ds, \\
& c \in \mathbf{R}^1, \quad t \in [0, 1];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2(t) = & \begin{bmatrix} \frac{(3t+1)}{2} & \frac{(t+3)}{2} \end{bmatrix} c + \int_0^t f(s)ds + \frac{3t+3}{2} \int_0^1 f(s)ds - \\
& - \frac{3t+1}{4} \int_1^2 f(s)ds + \frac{t+1}{2} a_1, \\
& c \in \mathbf{R}^1, t \in]1, 2].
\end{aligned}$$

Для цієї крайової задачі маємо:

$$Q = \ell \bar{X}(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

$$\text{rank } Q = 1, \quad r = 1, \quad P_{N(Q)} = \begin{bmatrix} \frac{9}{58} & -\frac{21}{58} \\ -\frac{21}{58} & \frac{49}{58} \end{bmatrix},$$

$$P_{N_r(Q)} = \begin{bmatrix} \frac{9}{58} \\ -\frac{21}{58} \end{bmatrix}, \quad P_{N(Q^*)} = 0, \quad Q^+ = \begin{bmatrix} -\frac{7}{29} \\ -\frac{3}{29} \end{bmatrix}.$$

Оскільки $P_{N(Q^*)} = 0$, то умова (6.16) теореми 6.2 завжди виконується. Тоді крайова задача (6.19) – (6.21) має розв'язок для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_2([0, 2], \mathbf{R}^1)$, які задовольняють умові (6.22). Для таких $f(t)$ розв'язок $z(t) = \begin{cases} z_1(t), t \in [0, 1], \\ z_2(t), t \in]1, 2] \end{cases}$ цієї задачі має вигляд:

$$z_1(t) = \frac{9t - 21}{58}c_1 + \int_0^t f(s)ds - \frac{7t + 3}{29} \int_0^2 f(s)ds -$$

$$-\frac{5t + 27}{58} \int_0^1 f(s)ds - \frac{9t - 21}{116} \int_1^2 f(s)ds -$$

$$-\frac{7t + 3}{29}\alpha - \frac{21t + 9}{58}a_1, \quad c_1 \in \mathbf{R}^1, \quad \alpha \in \mathbf{R}^1;$$

$$z_2(t) = \frac{3t - 27}{58}c_1 + \int_0^t f(s)ds - \frac{12t + 8}{29} \int_0^2 f(s)ds -$$

$$-\frac{21t - 15}{58} \int_0^1 f(s)ds - \frac{3t - 27}{116} \int_1^2 f(s)ds -$$

$$-\frac{12t + 8}{29}\alpha - \frac{7t - 5}{58}a_1, \quad c_1 \in \mathbf{R}^1, \quad \alpha \in \mathbf{R}^1.$$

6.2. Крайові задачі для диференціальних систем із запізненням аргументу та імпульсною дією

Розглянуті у попередніх параграфах методи аналізу лінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь у банахових просторах застосовні з відповідними уточненнями і змінами при вивченні крайових задач для функціонально-диференціальних рівнянь, а саме — диференціальних рівнянь із запізненням аргументу та імпульсною дією.

6.2.1. Відомості з теорії функціонально-диференціальних рівнянь. Розглянемо лінійне рівняння із запізненням аргументу

$$\dot{z}(t) - \sum_{i=1}^k A_i(t)z(h_i(t)) = g(t), \quad t \in \mathcal{I}, \quad (6.24)$$

$$z(s) = \psi(s), \quad \text{якщо } s \notin \mathcal{I}.$$

Позначимо:

$$(S_h z)(t) = \begin{cases} z[h(t)], & \text{якщо } h(t) \in \mathcal{I}, \\ 0, & \text{якщо } h(t) \notin \mathcal{I}, \end{cases} \quad (6.25)$$

$$\psi^h(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } h(t) \in \mathcal{I}, \\ \psi[h(t)], & \text{якщо } h(t) \notin \mathcal{I}, \end{cases} \quad (6.26)$$

Використовуючи позначення (6.25) оператора внутрішньої суперпозиції S_h та рівність (6.26), запишемо рівняння (6.24) у вигляді:

$$(Lz)(t) := \dot{z}(t) - \sum_{j=1}^k A_j(t)(S_{h_j} z)(t) = f(t), \quad (6.27)$$

$$\text{де } f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^k A_j(t)\psi^{h_j}(t).$$

Позначивши $A(t) = [A_1(t), A_2(t), \dots, A_k(t)]$ – $(n \times N)$ -вимірну ($N = nk$) матрицю, яка складена з матриць $A_j(t)$; $S_h = \text{col}[S_{h_1}, S_{h_2}, \dots, S_{h_k}]$ – оператор внутрішньої суперпозиції, рівняння (6.27) запишемо у вигляді:

$$(Lz)(t) = \dot{z}(t) - A(t)(S_h z)(t) = f(t). \quad (6.28)$$

Вивчення рівняння (6.28) будемо вести у припущенні [4], що оператор L діє з банахового простору $\mathbf{D}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ абсолютно неперервних функцій $z : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{R}^n$ у банаховий простір $\mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ ($1 < p < \infty$); оператор внутрішньої суперпозиції S_h діє з простору $\mathbf{D}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ у простір $\underbrace{\mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \times \dots \times \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)}_k = \mathbf{L}_p^N(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$. Через $(S_h P(\cdot, s))(t)$ позначимо $(n \times N)$ -вимірну матрицю, стовпці якої є результатом застосування по першому аргументу оператора внутрішньої суперпозиції S_h до відповідних стовпців $(n \times n)$ -вимірної матриці $P(t, s)$, як до n -вимірних вектор-функцій.

Означення 6.1. Розв'язком диференціальної системи (6.28) називається абсолютно неперервна на $\mathcal{I}$ вектор-функція $z(t) \in \mathbf{D}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, що задовольняє майже всюди на $\mathcal{I}$ цій системі.

Відомо [207], що неоднорідне операторне рівняння з запізненням, розв'язне при будь-якій правій частині $f(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, тобто $\mathcal{P}_{Y_L} \equiv 0$. При цьому відповідне однорідне рівняння $Lz = 0$ має n -параметричну сім'ю розв'язків, тобто $\dim \ker L = n$. Таким чином, операторне рівняння (6.28) є всюди розв'язним [132] і його розв'язок за наслідком 4.2 з теореми 4.3 має вигляд:

$$z(t) = X(t)c + (L_r^{-1}f)(t), \quad c \in \mathbf{R}^n,$$

де $L_r^{-1} : \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{D}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ – лінійний обмежений правий обернений оператор. У [121] показано, що будь-який обмежений оператор, який діє з простору $\mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ у простір $\mathbf{D}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ є інтегральним, тобто

$$(L_r^{-1}f)(t) = \int_a^b K(t, s)f(\tau) ds.$$

Ядро цього оператора — $(n \times n)$ -вимірна матриця $K(t, s)$ називається матрицею Коші, яка при кожному фіксованому $s \in \mathcal{I}$ є розв'язком матричної задачі Коші

$$(LK(\cdot, s))(t) \equiv \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} - A(t)(S_h K(\cdot, s))(t) = 0, \\ K(t, t) = I.$$

Всюди надалі вважатимемо матрицю $K(t, s)$ визначеною у квадраті $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$, вважаючи $K(t, s) \equiv 0$ при $a \leq t < s \leq b$. Фундаментальна $(n \times n)$ -вимірна матриця відповідного (6.28) однорідного ($f(t) \equiv 0$) рівняння має вигляд $X(t) = K(t, a)$.

6.2.2. Розв'язок диференціальної системи з відхиленням аргументу та імпульсною дією. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння з відхиленням аргументу

$$(Lz)(t) \equiv \dot{z}(t) - A(t)S_h z(t) = f(t), \quad t \in \mathcal{I}. \quad (6.29)$$

Будемо шукати розв'язки рівняння (6.29), які мають стрибки у фіксованих точках $\tau_i \in]a, b[$, $i = \overline{1, \eta}$:

$$\Delta z|_{t=\tau_i} = z(\tau_i + 0) - z(\tau_i -) = S_j z(\tau_i -) + a_i, \quad (6.30)$$

де $S_i \in \mathbf{R}^{(n \times n)}$ сталі матриці такі, що $(E + S_i)$ невинроджені, $a_i \in \mathbf{R}^n$, $i = \overline{1, \eta}$.

Систему (6.29), (6.30) називатимемо диференціальною системою з відхиленням аргументу та імпульсною дією.

Під розв'язком диференціальної системи із запізненням та імпульсною дією (6.29), (6.30) будемо розуміти функцію $z(t)$ що належить простору $\mathbf{D}_p(\mathcal{I} \setminus \{\tau_i\}_I, \mathbf{R}^n)$ абсолютно неперервних на кожному з проміжків $[a, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), \dots, [\tau_\eta, b]$ вектор-функцій $z(t)$, неперервних справа в точках τ_i , $i = \overline{1, \eta}$, які мають у цих точках розриви першого роду, таких, що $\dot{z}(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$.

Для побудови загального розв'язку імпульсної диференціальної системи з запізненням (6.29), (6.30) застосуємо методику підрозділу 5.3.

Як було вказано вище, задача Коші для рівняння (6.29) всюди розв'язна і її загальний розв'язок на проміжках $[a, \tau_1]$, $]\tau_1, \tau_2]$ має вигляд:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= X(t)c + \int_a^t K(t, s)f(s)ds, \quad t \in [a, \tau_1], \\ z_2(t) &= X(t)c_2 + \int_a^t K(t, s)f(s)ds, \quad t \in]\tau_1, \tau_2], \end{aligned} \quad (6.31)$$

де $X(t)$ — $(n \times n)$ -вимірна нормальна фундаментальна матриця, $c, c_2 \in \mathbf{R}^n$.

З імпульсних умов (6.30) отримуємо алгебраїчну систему для знаходження константи c_2

$$\begin{aligned} &X(\tau_1+)c_2 + \int_a^{\tau_1+} K(\tau_1+, s)f(s)ds = \\ &= (E + S_1)\{X(\tau_1-)c + \int_a^{\tau_1-} K(\tau_1-, s)f(s)ds\} + a_1. \end{aligned}$$

Ця система завжди розв'язна відносно c_2 , оскільки $\det X(t) \neq 0$ для всіх $t \in [a, b]$, в тому числі і для $t = \tau_1$.

З метою спрощення записів у подальшому вважатимемо, що

$$X(\tau_i) = X(\tau_i+) = X(\tau_i), \quad K(\tau_1-, s) = K(\tau_1+, s) = K(\tau_1, s).$$

Знаходячи c_2 з останньої рівності і підставляючи його у (6.31) отримаємо загальний розв'язок задачі (6.29), (6.30) на проміжку $]\tau_1, \tau_2]$:

$$z_2(t) = X(t)X^{-1}(\tau_1)(E + S_1)X(\tau_1)c + \int_a^{\tau_1} X(t)X^{-1}(\tau_1)S_1K(\tau_1, s)f(s)ds +$$

$$+ \int_a^t K(t, s)f(s)ds + X(t)X^{-1}(\tau_1)a_1.$$

На проміжку $]\tau_2, \tau_3]$ загальний розв'язок системи (6.29) має вигляд

$$z_3(t) = X(t)c_3 + \int_a^t K(t, s)f(s)ds.$$

З імпульсних умов (6.30) маємо

$$z_3(\tau_2 + 0) = (E + S_2)z_2(\tau_2 - 0) + a_2,$$

звідки отримаємо для загального розв'язку $z_3(t)$ системи (6.29), (6.30) на проміжку $]\tau_2, \tau_3]$ наступний вираз:

$$\begin{aligned} z_3(t) &= X(t)X^{-1}(\tau_2)(E + S_2)X(\tau_2)X^{-1}(\tau_1)(E + S_1)X(\tau_1)c + \\ &+ \int_a^{\tau_1} X(t)X^{-1}(\tau_2)(E + S_2)X(\tau_2)X^{-1}(\tau_1)S_1K(\tau_1, s)f(s)ds + \\ &+ \int_a^{\tau_2} X(t)X^{-1}(\tau_2)S_2K(\tau_2, s)f(s)ds + \int_a^t K(t, s)f(s)ds + \\ &+ X(t)X^{-1}(\tau_2)(E + S_2)X(\tau_2)X^{-1}(\tau_1)a_1 + X(t)X^{-1}(\tau_2)a_2. \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес для системи (6.29), (6.30) з запізненням та імпульсною дією отримаємо наступне твердження.

Теорема 6.3. *Нехай $\text{rank}(E + S_i) = n$, $i = 1, 2, \dots, \eta$. Тоді задача Коші для диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією (6.29), (6.30) всюди розв'язна і її розв'язок має вигляд*

$$z(t) = \overline{X}(t)c + \int_a^b K(t, s)f(s) + \sum_{i=1}^{k-1} \int_a^{\tau_i} \overline{K}_i(t, s)f(s)ds + \sum_{i=1}^{k-1} \overline{X}_i(t)a_i, \quad (6.32)$$

де $\overline{X}(t) = X(t) \prod_{\nu=1}^{k-1} X^{-1}(\tau_\nu)(E + S_\nu)X(\tau_\nu)$ — фундаментальна $(n \times n)$ -матриця відповідної (6.29), (6.30) однорідної $(f(t) = 0, a_i = 0)$ системи з імпульсною дією, $t \in]\tau_{k-1}, \tau_k]$,

$$\overline{K}_i(t, s) = X(t) \prod_{\nu=k-1}^{i+1} X^{-1}(\tau_\nu)(E + S_\nu)X(\tau_\nu)X^{-1}(\tau_i)S_iK(\tau_i, s),$$

$$\overline{X}_i(t) = X(t) \prod_{\nu=k-1}^{i+1} X^{-1}(\tau_\nu)(E + S_\nu)X(\tau_\nu)X^{-1}(\tau_i), \quad t \in]\tau_{k-1}, \tau_k].$$

Тут $\prod_{\nu=k}^{i+1} X^{-1}(\tau_\nu)(E + S_\nu)X(\tau_\nu) = E_n$, якщо $k < i + 1$; $K(t, s)$ — матриця Коші диференціальної системи з запізненням $K(t, s) \equiv 0$, якщо $s > t$.

Надалі на проміжках $]\tau_{k-1}, \tau_k]$ розв'язок (6.32), враховуючи визначення матриці $K(t, s)$, будемо записувати у вигляді:

$$z(t) = \overline{X}(t)c + \int_a^b \overline{K}(t, s)f(s)ds + \sum_{i=1}^{k-1} \overline{X}_i(t)a_i, \quad (6.33)$$

де

$$\int_a^b \overline{K}(t, s)f(s)ds = \int_a^b K(t, s)f(s)ds + \sum_{i=1}^{k-1} \int_a^{\tau_i} \overline{K}_i(t, s)f(s)ds.$$

6.2.3. Критерій існування та структура загального розв'язку лінійної крайової задачі. Знайдемо умови існування та загальний вигляд розв'язку лінійної нетерової крайової задачі з імпульсною дією

$$\dot{z}(t) - A(t)S_h z(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \quad t \neq \tau_i, \quad (6.34)$$

$$\Delta z|_{t=\tau_i} = S_i z(\tau_i+) + a_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \eta,$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad (6.35)$$

де $\ell = \text{col}[l_1, \dots, l_m]$ — лінійний обмежений m -вимірний вектор-функціонал, визначений на просторі функцій $z(t) \in \mathbf{D}_p(\mathcal{I} \setminus \{\tau_i\}_I, \mathbf{R}^n)$, $\alpha \in \mathbf{R}^m$.

Як було показано вище, загальний розв'язок $z(t, c)$ системи (6.34) має вигляд (6.32).

Для того, щоб розв'язок (6.33) диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією (6.34) задовольняв крайовим умовам (6.35) необхідно і достатньо, щоб $\ell z(\cdot, c) = \alpha$, звідки для визначення векторної константи $c \in \mathbf{R}^n$ отримуємо алгебраїчну систему

$$Qc = \alpha - \ell \int_a^b K(\cdot, s)f(s)ds - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i(\cdot, s)f(s)ds - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \bar{X}_i(\cdot)a_i, \quad (6.36)$$

де $Q = \ell \bar{X}(\cdot) = \ell X(\cdot) \prod_{\nu=1}^{\eta-1} X^{-1}(\tau_\nu)(E + S_\nu)X(\tau_\nu) - (m \times n)$ -вимірна стала матриця.

Нехай $Q^+ - (n \times m)$ -вимірна єдина псевдообернена до Q матриця. Позначимо через $P_{N(Q)} - (n \times n)$ -вимірну матрицю-ортопроектор, яка проектує $\mathbf{R}^n$ на нуль-простір $N(Q)$ матриці Q : $P_{N(Q)} : \mathbf{R}^n \rightarrow N(Q)$; аналогічно $P_{N(Q^*)} : \mathbf{R}^m \rightarrow N(Q^*) - (m \times m)$ -вимірна матриця. Далі позначимо через $P_{N_r(Q)} - (n \times r)$ -вимірну матрицю, стовпці якої є r лінійно-незалежні стовпці матриці $P_{N(Q)}$ ($r = n - \text{rank } Q$); $P_{N_d(Q^*)} - (d \times m)$ -вимірна матриця, рядки якої — d лінійно-незалежні рядки матриці $P_{N(Q^*)}$ ($d = m - \text{rank } Q$).

Рівняння (6.36) розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова:

$$P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell \int_a^b K(\cdot, s)f(s)ds - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i(\cdot, s)f(s)ds - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \bar{X}_i(\cdot)a_i \right\} = 0,$$

при виконанні якої алгебраїчне рівняння (6.36) має сім'ю r -лінійно-незалежних розв'язків

$$c = P_{N_r(Q)}c_r + Q^+ \left\{ \alpha - \ell \int_a^b K(\cdot, s)f(s)ds - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i(\cdot, s)f(s)ds - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \bar{X}_i(\cdot)a_i \right\}, \quad (6.37)$$

де $c_r \in \mathbf{R}^r$.

Підставивши знайдене значення $c \in \mathbf{R}^n$ (6.37) у (6.33), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (6.34), (6.35).

Теорема 6.4. *Нехай $\text{rank}(E + S_i) = n$, $i = \overline{1, \eta}$, $\text{rank } Q = n_1 \leq \min(n, m)$. Тоді відповідна (6.34), (6.35) однорідна ($f(t) = 0, a_i = 0, \alpha = 0$) крайова задача має сім'ю $r = n - n_1$ і лише r лінійно-незалежних розв'язків*

$$z(t, c_r) = \bar{X}_r(t)c_r,$$

де $\bar{X}_r(t) = \bar{X}_r(t)P_{N_r(Q)}$ — фундаментальна $(n \times r)$ -матриця однорідної крайової задачі з імпульсною дією.

Неоднорідна крайова задача (6.34) — (6.35) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $a_j \in \mathbf{R}^n$ і $\alpha \in \mathbf{R}^m$, які задовольняють умову

$$P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha - \ell \int_a^b \bar{K}(\cdot, s)f(s)ds - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \bar{X}_i(\cdot)a_i \right\} = 0 \quad (6.38)$$

і при цьому має r -параметричну сім'ю лінійно-незалежних розв'язків $z(t, c_r) \in \mathbf{D}_p(\mathcal{I} \setminus \{\tau_i\}_I, \mathbf{R}^n)$

$$z(t, c_r) = \bar{X}_r(t)c_r + \left(G \begin{bmatrix} f(\cdot) \\ a_j \end{bmatrix} \right) (t) + \bar{X}(t)Q^+\alpha, \quad (6.39)$$

де G — узагальнений оператор Гріна напіводнорідної ($\alpha = 0$) крайової

задачі з імпульсною дією (6.34) – (6.35), який на проміжках $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ діє на вектор-функцію $f(t)$ та вектор-стовпці a_i за правилом

$$\begin{aligned} \left(G \begin{bmatrix} f(\cdot) \\ a_i \end{bmatrix} \right) (t) &= \int_a^b K(t, s) f(s) ds - \bar{X}(t) Q^+ \ell \int_a^b K(\cdot, s) f(s) ds + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i(t, s) f(s) ds - \bar{X}(t) Q^+ \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i(\cdot, s) f(s) ds + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \bar{X}_i(t) a_i - \bar{X}(t) Q^+ \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \bar{X}_i(\cdot) a_i + \bar{X}(t) Q^+ \alpha. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Зауваження 6.4. У випадку відсутності імпульсів теорема 6.4 переходить у відому раніше [32].

Якщо крайова задача фредгольмова ($m = n$), то умова $\text{rank } Q = n$ ($\det Q \neq 0$, $P_{N(Q)} \equiv 0$, $P_{N(Q^*)} \equiv 0$) еквівалентна відомому некритичному випадку [190], [29], [69], який характеризуються тим, що відповідна (6.34), (6.35) однорідна крайова задача з імпульсною дією має тільки тривіальні розв'язки. У цьому випадку існує обернена матриця Q^{-1} до матриці Q і система (6.36) однозначно розв'язна відносно $c \in \mathbf{R}^n$, в результаті чого неоднорідна крайова задача (6.34), (6.35) при будь-яких $f(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $\alpha \in \mathbf{R}^n$ і $a_j \in \mathbf{R}^n$ має єдиний розв'язок.

Таким чином для фредгольмової некритичної крайової задачі справедливе наступне твердження.

Теорема 6.5. Нехай $\text{rank}(E + S_i) = n$ ($i = \overline{1, \eta}$), $m = n$. Якщо $\text{rank } Q = n$ ($\det Q \neq 0$), то відповідна (6.34), (6.35) однорідна задача не має розв'язків крім тривіального.

Неоднорідна крайова задача (6.34) (6.35) розв'язна для будь-яких $f(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $a_j \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}^n$ і має розв'язок

$$z(t, c) = \left(G \begin{bmatrix} f(\cdot) \\ a_i \end{bmatrix} \right) (t) + \bar{X}(t) Q^{-1} \alpha,$$

де G — оператор Гріна некритичної напіводнорідної крайової задачі з імпульсною дією (6.34), (6.35), який на проміжках $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ діє на вектор-функцію $f(t)$ та вектор-стовпці a_i за правилом

$$\begin{aligned} \left(G \begin{bmatrix} f(\cdot) \\ a_i \end{bmatrix} \right) (t) = & \int_a^b K(t, s) f(s) ds - \bar{X}(t) Q^{-1} \ell \int_a^b K(\cdot, s) f(s) ds + \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i(t, s) f(s) ds - \bar{X}(t) Q^{-1} \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i(\cdot, s) f(s) ds + \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} \bar{X}_i(t) a_i - \bar{X}(t) Q^{-1} \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \bar{X}_i(\cdot) a_i + \bar{X}(t) Q^{-1} \alpha. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Приклад 6.2.

Розглянемо задачу про регуляризацию за допомогою імпульсної дії не всюди розв'язної крайової задачі (6.34), (6.35).

Нехай при деяких $f_0(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $a_i^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ і $\alpha_0 \in \mathbf{R}^m$ крайова задача (6.34), (6.35) не розв'язна, тобто умова (6.38) не виконується. Додамо в цю задачу в момент часу $t = \bar{\tau}_1$ імпульсну дію

$$\Delta z|_{t=\bar{\tau}_1} = \bar{S}_1 z(\bar{\tau}_1+) + \bar{a}_1, \quad \tau_i \neq \bar{\tau}_1 \in \mathcal{I}, \quad (6.42)$$

причому $\det(E + \bar{S}_1) \neq 0$.

Величину $\bar{a}_1$ вибираємо з критерію типу (6.38)

$$\begin{aligned} P_{N_d(Q^*)} \ell \bar{X}_1^{(0)}(\cdot) \bar{a}_1 = & P_{N_d(Q^*)} \left\{ \alpha_0 - \ell \int_a^b K^{(0)}(\cdot, s) f_0(s) ds - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^{\eta} \ell \int_a^{\tau_i} \bar{K}_i^{(0)}(\cdot, s) f_0(s) ds - \sum_{i=1}^{\eta} \ell \bar{X}_i^{(0)}(\cdot) a_i^0 \right\} \end{aligned}$$

розв'язності отриманої імпульсної крайової задачі (6.34), (6.35), (6.42) так, щоб вона стала розв'язною при будь-яких $f_0(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $a_i^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ та $\alpha_0 \in \mathbf{R}^m$; $K^{(0)}(t, s)$ – матриця Коші задачі (6.34), (6.35), (6.42); $\overline{K}_i^{(0)}(t, s)$, $\overline{X}_i^{(0)}(t)$ – елементи (блоки) матриці Коші і фундаментальної матриць, відповідно, системи з запізненням та імпульсною дією (6.34), (6.42).

Введемо позначення: $\overline{Q} = P_{N_d(Q^*)} \ell \overline{X}_1^{(0)}(\cdot) - (d \times n)$ -вимірна матриця; $P_{N(\overline{Q}^*)}$ – $(d \times d)$ -вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує $\mathbf{R}^d$ на $N(\overline{Q}^*)$; $P_{N(\overline{Q})}$ – $(n \times n)$ -вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує $\mathbf{R}^n$ на $N(\overline{Q})$. Тоді з теореми 6.4 будемо мати твердження.

Наслідок 6.1. *Не всюди розв'язну крайову задачу (6.34), (6.35) можна зробити всюди розв'язною при будь-яких $f_0(t) \in \mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $a_i^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ і $\alpha_0 \in \mathbf{R}^m$, додаючи до неї ще одну імпульсну дію (6.42) тоді і лише тоді, коли*

$$P_{N(\overline{Q}^*)} P_{N_d(Q^*)} = 0.$$

При цьому величину додаткового (регуляризуючого) імпульсу треба взяти таким:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 = & P_{N(\overline{Q})} c + \overline{Q}^+ P_{N_d(Q^*)} \{ \alpha_0 - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \int_a^b \overline{K}^0(\cdot, s) f_0(s) ds - \\ & - \sum_{i=1}^{\eta} \ell \int_a^{\tau_i} \overline{K}_i^{(0)}(\cdot, s) f_0(s) ds - \sum_{i=1}^{\eta} \ell \overline{X}_i^{(0)}(\cdot) a_i^{(0)} \}, \quad c \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

6.3. Слабконелінійні крайові задачі для диференціальних систем із запізненням та імпульсною дією

Розглянемо слабконелінійну крайову задачу для диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією.

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) - A(t)(S_h z)(t) &= f(t) + \varepsilon Z((S_h z)(t), t, \varepsilon), \\ \Delta|_{t=\tau_i} - S_i z(\tau_i-) &= a_i + \varepsilon J_i((S_h z)(\tau_i-, \varepsilon), \varepsilon),\end{aligned}\quad (6.43)$$

$$\ell z = \alpha + \varepsilon J((S_h z)(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Поставлену задачу розв'язуватимемо за допомогою узагальненого оператора Гріна напіводнорідної лінійної крайової задачі з імпульсною дією, побудованого у попередньому підрозділі, шляхом зведення її до еквівалентної операторної системи і застосування до неї методу простих ітерацій у припущенні що:

(g1) стовпці $(n \times N)$ -вимірної матриці $A(t)$ та n -вимірний вектор $f(t)$ належать простору $\mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$, $(1 < p < \infty)$;

(g2) $S_h : \mathbf{D}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{L}_p^N(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$ — оператор внутрішньої суперпозиції визначений рівністю $S_h = \text{col}[S_{h_1}, S_{h_2}, \dots, S_{h_k}]$, функції $h_j(t)$ — вимірні на $[a, b]$, $h_j(t) \leq t$ ($j = \overline{1, k}$), $N = nk$;

(g3) нелінійна n -вимірна вектор-функція $Z(y, t, \varepsilon)$ (6.44) неперервно диференційовна по y , неперервна по сукупності змінних y, t та ε в околі $\varepsilon = 0$ та розв'язку $z(t, c_0)$ породжуючої крайової задачі;

(g4) нелінійні по z n - і m -вимірні векторні функціонали $J_i(y(\tau_i-, \varepsilon), \varepsilon)$ та $J(y(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ неперервно диференційовні (за Фреше) в околі $z(t, c_0)$, $\varepsilon = 0$, неперервні по ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$;

$$\left. - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \bar{X}_i(\cdot) J_i(S_h z_0(\tau_i, c_0), 0) \right\} = 0,$$

де $P_{N_d(Q^*)}$ — $(d \times m)$ -вимірний матриця, рядки якої — d -лінійно-незалежні рядки матриці $P_{N(Q^*)} : \mathbf{R}^m \rightarrow N(Q^*)$, $Q = \ell \bar{X}(\cdot)$.

Справедливість теореми виходить з теореми 5.6, оскільки через всюди розв'язність вихідної диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією, умова (5.53) складається з одного рівняння.

Для знаходження достатніх умов існування, а також алгоритму побудови розв'язку крайової задачі (6.43) вона, описаним у п'ятому розділі способом, зводиться до еквівалентної операторної системи.

Провівши заміну змінної $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$, де $z_0(t, c_0)$ породжуючий розв'язок з векторною константою $c_0 \in \mathbf{R}^r$, що задовольняє рівнянню для породжуючих констант (6.45), отримаємо крайову задачу

$$\begin{aligned} (Lx)(t) &= \dot{x}(t) - A(t)S_h x(t) + \\ &+ Z((S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)])(t), t, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\Delta|_{t=\tau_i} - S_i x(\tau_i, 0) = \varepsilon J_i(S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)](\tau_i-), \varepsilon),$$

$$\ell x(\cdot) = \varepsilon J(S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)], \varepsilon)$$

для знаходження відхилення $x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{D}_p(\mathcal{I} \setminus \{\tau_i\}_I, \mathbf{R}^n)$, $x(t, \cdot) \in \mathbf{C}[0, \varepsilon]$, від породжуючого розв'язку, яке обертається в нуль при $\varepsilon = 0$.

Використовуючи умови (g3) і (g4) на нелінійності Z, J_i, J в околі породжуючого розв'язку $z_0(t, c_0)$, виділимо у вектор-функцій $Z(S_h[z_0 + x], t, \varepsilon)$, $J_i(S_h[z_0 + x], \varepsilon)$, $J(S_h[z_0 + x], \varepsilon)$ лінійну частину по x і члени нульового порядку по ε :

$$Z((S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)])(t), t, \varepsilon) = Z((S_h z_0(\cdot, c_0))(t), t, 0) +$$

$$+A_0(t)(S_h x(\cdot, \varepsilon))(t) + R((S_h x(\cdot, \varepsilon))(t), t, \varepsilon),$$

де

$$A_0(t) = A_0(t, c_0) = \frac{\partial Z(y, t, 0)}{\partial y} \Big|_{y=(S_h z_0)(t, c_0)}$$

— $(n \times N)$ -вимірний матриця, стовпці якої належать простору $\mathbf{L}_p(\mathcal{I}, \mathbf{R}^n)$,

$$R(0, t, 0) = 0, \quad \partial R(0, t, 0) / \partial S_h x = 0;$$

$$J_i(S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)](\tau_i), \varepsilon) = J_i((S_h z_0(\cdot, c_0))(\tau_i), 0) +$$

(6.47)

$$+A_i(S_h x(\cdot, \varepsilon))(\tau_i) + R_i(S_h(x(\cdot, \varepsilon))(\tau_i), \varepsilon),$$

де

$$A_i = \frac{\partial J_i(y, 0)}{\partial y} \Big|_{y=S_h z_0(\tau_i, c_0)}, \quad i = \overline{1, \eta}$$

— $(n \times N)$ -вимірні сталі матриці,

$$R_i(0, 0) = 0, \quad \partial R_i(0, 0) / \partial S_h x = 0;$$

$$J(S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)](\cdot), \varepsilon) = J((S_h z_0(\cdot, c_0))(\cdot), 0) +$$

(6.48)

$$+l_0(S_h x(\cdot, \varepsilon))(\cdot) + R_0(S_h x(\cdot, \varepsilon)(\cdot), \varepsilon),$$

l_0 — лінійна частина векторного функціонала

$$J(z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$$

$$R_0(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial R_0(0, 0)}{\partial S_h x} = 0.$$

За теоремою 6.4 розв'язок $x(t, \varepsilon)$ крайової задачі (6.43) має вигляд:

$$x(t, \varepsilon) = \overline{X}_r(t)c + x^{(1)}(t, \varepsilon).$$

Тут, враховуючи розвинення (6.47), (6.48), невідомий вектор $c \in \mathbf{R}^r$ визначається з умови типу (6.38) розв'язності крайової задачі (6.46)

$$\begin{aligned} & P_{N_d(Q^*)} \left\{ J(S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)](\cdot), \varepsilon) - \right. \\ & - \ell \int_a^b \overline{K}(\cdot, s) Z((S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)])(t), t, \varepsilon) ds - \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell X(\cdot) J_i(S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)](\tau_i - 0), \varepsilon) \right\} = 0, \end{aligned}$$

в якому нелінійності розглядаються як неоднорідності, а невідома вектор-функція $x^{(1)}(t, \varepsilon)$ знаходиться з допомогою узагальненого оператора Гріна (6.41) за формулою:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \overline{X}(t) Q^+ J(S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)], \cdot, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon \left(G \begin{bmatrix} Z((S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)])(t), t, \varepsilon) \\ J_j(S_h[z_0(\cdot, c_0) + x(\cdot, \varepsilon)](\tau_j), \varepsilon) \end{bmatrix} \right) (t). \end{aligned}$$

Нехай необхідна умова (6.45) існування розв'язків крайової задачі (6.43) виконується. Позначимо через

$$\begin{aligned} B_0 &= P_{N_d(Q^*)} \left\{ l_0(S_h \overline{X}_r(\cdot) - \ell \int_a^b \overline{K}(\cdot, s) A_1(s) S_h \overline{X}_r(s) ds - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \overline{X}_i(\cdot) A_i(S_h \overline{X}_r)(\tau_i) \right\} \end{aligned}$$

— $(d \times r)$ -вимірну сталу матрицю.

Тоді для знаходження розв'язку $x(t, \varepsilon)$ крайової задачі (6.43) приходимо до еквівалентної операторної системи

$$x(t, \varepsilon) = \overline{X}_r(t) c(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$B_0 c(\varepsilon) = -P_{N_d(Q^*)} \left\{ l_0 S_h x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(S_h x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\ell \int_a^b \overline{K}(\cdot, s)[A_1(s)(S_h x^{(1)}(s, \varepsilon)) + R(S_h x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)]ds - \\
& - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \overline{X}_i(\cdot)[A_i(S_h x^{(1)}(\cdot, \varepsilon))(\tau_i) + R_i(S_h x(\cdot, \varepsilon)(\tau_i), \varepsilon)] \Big\}, \\
\end{aligned} \tag{6.49}$$

$$\begin{aligned}
x^{(1)}(t, \varepsilon) = & \varepsilon \overline{X}(t) Q^+ \{ J(S_h z_0(\cdot, c_0), 0) + l_0 S_h [X_r(\cdot) c(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)] + \\
& + R_0(S_h x(\cdot, \varepsilon)) \} + \varepsilon \left(G \left[\begin{array}{l} Z((S_h z_0(\cdot, c_0))(*), *, 0) + \\ J_j((S_h z_0(\cdot, c_0))(\tau_j), 0) + \\ + A_1(*) S_h [\overline{X}_r(\cdot) c(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)](*) + R((S_h x(\cdot, \varepsilon))(*), *, \varepsilon) \\ + A_j S_h [\overline{X}_r(\cdot) c(\varepsilon) + x^{(1)}(\cdot, \varepsilon)](\tau_j) + R_j(S_h x(\cdot, \varepsilon))(\tau_j), \varepsilon \end{array} \right] \right) (t).
\end{aligned}$$

Розв'язність цієї системи залежить від розв'язності другого рівняння.

Позначимо через $P_{N(B_0)} : \mathbf{R}^r \rightarrow N(r \times r)$ -вимірну матрицю-ортопроектор, а через $P_{N(B_0^*)} : R^d \rightarrow N(B_0^*) - (r \times d)$ -вимірну матрицю-ортопроектор, $B_0^+ - d \times d$ -вимірну матрицю псевдообернену до матриці B_0 .

Якщо $P_{N(B_0^*)} P_{N_d(Q^*)} = 0$, то умова розв'язності другого рівняння операторної системи (6.49) завжди виконується і його розв'язки можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
c = & \hat{c} - B_0^+ P_{N_d(Q^*)} \{ l_0 S_h x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(S_h x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\
& - \ell \int_a^b \overline{K}(\cdot, s)[A_1(s)(S_h x^{(1)}(\cdot, \varepsilon))(s) + R(S_h x(\cdot, \varepsilon), s, \varepsilon)]ds - \\
& - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \overline{X}_i(\cdot)[A_i(S_h x^{(1)}(\cdot, \varepsilon))(\tau_i) + R_i(S_h x(\cdot, \varepsilon)(\tau_i), \varepsilon)] \Big\}.
\end{aligned}$$

де $\hat{c} = P_{N(B_0)}c$ — довільний вектор-стовпець $\hat{c} \in N(B_0)$, B_0^+ — $(r \times d)$ -вимірна єдина псевдообернена до B_0 матриця. Поклавши $\hat{c} = 0$, виділимо один з множини розв'язків другого рівняння операторної системи (6.49).

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 6.7. *Нехай крайова задача (6.43) задовольняє умови (g1)–(g6) з (6.44), а породжуюча крайова задача – умови теореми 6.4. Тоді для кожного значення вектора $c_0 \in \mathbf{R}^r$, що задовольняє рівнянню (6.45) для породжуючих констант, при виконанні умови*

$$P_{N(B_0^*)}P_{N_d(Q^*)} = 0 \quad (6.50)$$

крайова задача (6.43) має принаймні один розв'язок $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$, який обертається у породжуючий $z_0(t, c_0)$ при $\varepsilon = 0$. Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0, \varepsilon_*] \subseteq [0, \varepsilon_0]$ ітераційного процесу:

$$\begin{aligned} z_{k+1}(t, \varepsilon) &= z_0(t, c_0) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \\ x_{k+1}(t, \varepsilon) &= \overline{X}_r c_k(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon), \\ c_k(\varepsilon) &= -B_0^+ P_{N_d(Q^*)} \left\{ l_0 S_h x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + R_0(S_h x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \ell \int_a^b \overline{K}(\cdot, s) \left[A_1(s)(S_h x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon))(s) + R(S_h x_k(\cdot, \varepsilon)(s), s, \varepsilon) \right] ds - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{\eta-1} \ell \overline{X}_i(\cdot) \left[A_i(S_h x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon))(\tau_i) + R_i(S_h x_k(\cdot, \varepsilon)(\tau_i), \varepsilon) \right] \right\}, \\ x_{k+1}^{(1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \overline{X}(t) Q^+ \left\{ J(S_h z_0(\cdot, c_0), 0) + l_0 S_h \left[X_r(\cdot) c_k(\varepsilon) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon) \right] + R_0(S_h x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right\} + \varepsilon \left(G \left[\begin{array}{l} Z((S_h z_0(\cdot, c_0))(*), *, 0) + \\ J_j((S_h z_0(\cdot, c_0))(\tau_j-), 0) + \end{array} \right. \right. \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned}
& + A_1(*) S_h \left[\overline{X}_r(\cdot) c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon) \right] (*) + R((S_h x_k(\cdot, \varepsilon)(*), *, \varepsilon) \\
& + A_j S_h \left[\overline{X}_r(\cdot) c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon) \right] (\tau_j -) + R_j(S_h x_k(\cdot, \varepsilon))(\tau_j -), \varepsilon) \left. \vphantom{\begin{aligned} & + A_1(*) S_h \left[\overline{X}_r(\cdot) c_k(\varepsilon) + x_k^{(1)}(\cdot, \varepsilon) \right] (*) + R((S_h x_k(\cdot, \varepsilon)(*), *, \varepsilon) \right.} \right] \Bigg) (t), \\
& x_0(t, \varepsilon) = x_0^{(1)}(t, \varepsilon) = 0.
\end{aligned}$$

Зауваження 6.5. У випадку, коли $P_{N(B_0)} = 0$, при виконанні умови (6.50), слабконелінійна імпульсна задача (6.43) матиме єдиний розв'язок $z(t, \varepsilon)$, який обертається у породжуючий при $\varepsilon = 0$.

Зауваження 6.6. У випадку фредгольмових крайових задач ($m = n$) з умови $P_{N(B_0)} = 0$ маємо, що $P_{N(B_0^*)} = 0$. У цьому випадку умова $P_{N(B_0^*)} P_{N_d(Q^*)} = 0$ автоматично виконується і $\det B_0 \neq 0$. В ітераційній процедурі (6.46) замість B_0^+ буде B_0^{-1} .

Висновки до шостого розділу

У шостому розділі розглянуто умови існування та способи побудови загальних розв'язків не всюди розв'язних нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією та лінійних крайових задач для них, а також нетерових лінійних та слабконелінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь з запізненням та імпульсною дією.

Для цих задач:

1. З використанням проекторів та формули для побудови узагальнено-оберненого оператора до нетерового у банахових просторах отримано необхідні та достатні умови існування та формулу для представлення загальних розв'язків нетерового операторного рівняння з імпульсною дією.
2. Доведено теорему про необхідні та достатні умови існування та представлення загальних розв'язків лінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією за допомогою побудованого узагальненого оператора Гріна.
3. Побудовано розв'язок лінійної диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією. Отримано умови існування та побудовано узагальнений оператор Гріна лінійної нетерової крайової задачі для диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією.
4. Для слабконелінійних крайових задач для диференціальних систем з запізненням та імпульсною дією у скінченновимірних банахових просторах побудовано операторне рівняння для породжуючих констант, отримано достатні умови існування принаймні одного розв'язку. З використанням узагальненого оператора Гріна відповідної лінійної напіводнорідної крайової задачі побудовано збіжні ітераційні процедури для знаходження розв'язків таких задач.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В роботі запропоновано загальну концепцію дослідження лінійних та слабконелінійних крайових задач для нормально розв'язних операторних рівнянь у банахових та гільбертових просторах. В дослідженні виділені класи узагальнено оборотних і, як наслідок, нормально розв'язних операторів, для яких побудовано обмежені узагальнено-обернені та псевдообернені оператори. Це оператори наступних класів: топологічно нетерові, топологічно фредгольмові, n -нормальні з доповнювальним образом, d -нормальні з доповнювальним ядром, нетерові та фредгольмові.

Загальні методи дослідження крайових задач для операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами застосовано до дослідження лінійних та слабконелінійних інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром та крайових задач для них у банахових та гільбертових просторах та лінійних крайових задач для нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією, а також нетерових крайових задач для диференціальних систем з запізненням та імпульсною дією.

1. Для встановлення загального вигляду узагальнено оборотних операторів доведено аналоги леми Е. Шмідта для топологічно нетерових, топологічно фредгольмових, n - та d -нормальних операторів у банахових та гільбертових просторах. На основі цих лем, для всіх перелічених класів нормально розв'язних операторів з доповнювальним ядром та образом, доведено теореми про їх загальний вигляд, які узагальнюють теореми С. М. Нікольського про загальний вигляд фредгольмових та Ф. Р. Аткинсона про загальний вигляд нетерових операторів.

2. З використанням теорем про загальний вигляд узагальнено оборотних операторів доведено теореми, в яких отримано формули для побудови обмежених узагальнено-обернених операторів до топологічно нетерових, топологічно фредгольмових, n -нормальних та d -нормальних у банахових просторах. Запропоновано формули для обчислення псевдообернених операторів до нормально розв'язних у гільбертових просторах. Загальні підходи застосовані до дослідження інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром, для яких встановлено умови їх топологічної фредгольмовості та запропоновано конструкції обмежених узагальнено-обернених та псевдообернених операторів у банахових та гільбертових просторах.
3. Встановлено критерії розв'язності та запропоновано формули для представлення загальних розв'язків лінійних не всюди розв'язних операторних рівнянь з обмеженими узагальнено оборотними операторами. Використовуючи отримані в роботі результати отримано необхідні та достатні умови існування та вигляд загальних розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах.
4. Доведено теореми про необхідні та достатні умови існування та представлення загальних розв'язків лінійних крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами у банахових та гільбертових просторах. Застосовуючи методи дослідження крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь доведено теореми про умови існування розв'язків лінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових та гільбертових просторах та запропоновано формули для представлення їх загальних розв'язків. Досліджено властивості узагальненого оператора Гріна

та його зв'язок з узагальнено-оберненим оператором до оператора лінійної крайової задачі.

5. Для слабконелінійних операторних рівнянь (лінійна частина яких — оператор з доповнювальними ядром та образом) та крайових задач для них отримано необхідні умови існування розв'язків, побудовано операторне рівняння для породжуючих елементів, отримано достатні умови існування єдиного та принаймні одного розв'язків, запропоновано ітераційні процедури для їх побудови та доведено їх збіжність. Загальні підходи до дослідження крайових задач застосовані до дослідження слабконелінійних крайових задач для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у скінченновимірних гільбертових просторах, побудовано систему рівнянь для породжуючих констант, отримано достатні умови існування принаймні одного розв'язку, побудовано збіжні ітераційні процедури для знаходження розв'язків таких задач.
6. Доведено теореми про необхідні та достатні умови існування та представлення загальних розв'язків нетерових операторних рівнянь з імпульсною дією та лінійних крайових задач для них.
7. Для лінійних диференціальних систем з запізненням та імпульсною дією отримано умови існування та формулу для представлення загальних розв'язків. Доведено теорему про необхідні та достатні умови існування та представлення загальних розв'язків лінійних нетерових крайових задач для диференціальної системи з запізненням та імпульсною дією.
8. Для слабконелінійних крайових задач для диференціальних систем з запізненням та імпульсною дією у скінченновимірних банахових просторах побудовано рівняння для породжуючих констант, отримано достатні умови існування принаймні одного

розв'язку та запропоновано збіжні ітераційні процедури для знаходження розв'язків таких задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абдуллаев А. Р.* Топологические нетеровы операторы: обобщенная обратимость и аддитивное представление / А. Р. Абдуллаев, А. Б. Бурмистрова // Известия вузов. – 1994. – № 6. – С. 3 – 7.
2. *Азбелев Н. В.* О краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений / Н. В. Азбелев // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 4. – С. 579 – 584.
3. *Азбелев Н. В.* Уравнения с запаздывающим аргументом / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 12. – С. 2027 – 2050.
4. *Азбелев Н. В.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
5. *Алиев Ф. С.* Обобщение теоремы С. М. Никольского на случай замкнутого оператора / Ф. С. Алиев // Докл. АН Азерб. ССР. – 1960. – Т. 16, № 1. – С. 7 – 11.
6. *Альтман М. Ш.* О биортогональных системах / М. Ш. Альтман // Доклады АН СССР. – 1949. – Т. 67. – С. 413 – 416.
7. *Андронов А. А.* Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.
8. *Антоневич А. Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск: Изд-во Минск. ун-та, 1984. – 351 с.
9. *Аткинсон Ф. В.* Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. В. Аткинсон – М.: Мир, 1968. – 749 с.
10. *Аткинсон Ф. В.* Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах / Ф. В. Аткинсон // Мат. сборник. Нов. сер. – 1951. – Т. 28, № 1. – С. 3 – 14.

11. *Ахиезер Н. И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – Москва: Наука, 1966. – 544 с.
12. *Ахиезер Н. И.* Теория операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – Харьков: Вища шк., 1977. – Ч. 1. – 315 с.
13. *Бари Н. К.* О базисах в гильбертовом пространстве / Н. К. Бари // Доклады АН СССР. – 1946. – Т. 54. – С. 383 – 386.
14. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве / Н. К. Бари // Уч. записки МГУ. – 1951. – Т. 4. – Вып. 148. – С. 69 – 107.
15. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости параболических дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков // Доклады академии наук. Российская академия наук. – 2002. – Т.383, №5. – С. 583 – 585.
16. *Баскаков А.Г.* Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов. / А. Г. Баскаков. // Мат. заметки. – 2000. – Т. 67, № 6. – С. 816 – 827.
17. *Баскаков А. Г.* О дифференциальных и разностных фредгольмовых операторах / А. Г. Баскаков // Доклады академии наук. Российская академия наук. – 2007. – Т. 416, № 2. – С. 156 – 160.
18. *Беллман Р.* Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
19. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц / Р. Беллман – М.: Наука, 1969. – 367 с.
20. *Беллман Р.* Математические методы в медицине / Р. Беллман – М.: Мир, 1987. – 200 с.
21. *Березанский Ю. М.* Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – Киев: Наук. думка, 1990. – 600 с.

22. *Боголюбов Н. Н.* Собрание научных трудов: В 12 т. / Н. Н. Боголюбов – М.: Наука, 2005 – . –
Т. 1: Математика, 1925 – 1990. – 775 с.
23. *Боголюбов Н. Н.* Собрание научных трудов: В 12 т. / Н. Н. Боголюбов – М.: Наука, 2005 – . –
Т. 2: Нелинейная механика, 1932 – 1940. – 828 с.
24. *Боголюбов Н. Н.* Собрание научных трудов: В 12 т. / Н. Н. Боголюбов – М.: Наука, 2005 – . –
Т. 3: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – 605 с.
25. *Боголюбов Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
26. *Боголюбов Н. Н.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко. – Киев: Наук. думка, 1969. – 247 с.
27. *Бойчук А. А.* Построение решений двухточечных краевых задач для слабозмущенных нелинейных систем в критических случаях / А. А. Бойчук // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, № 10. – С. 1416 – 1420.
28. *Бойчук А. А.* Краевые задачи для слабозмущенных систем в критических случаях / А. А. Бойчук – Киев, 1988. – 44 с. – (Препр. АН УССР. Ин-т математики; 88.39).
29. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач / А. А. Бойчук – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
30. *Бойчук А. А.* Построение решений краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием в критических случаях / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1990. – №6. С. 3 – 6.

31. *Бойчук А. А.* Возникновение решений линейных краевых задач для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев // Краевые задачи математич. физики. – Киев: Наукова думка, 1990. – С. 34 – 38.
32. *Бойчук А.А.* Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в гильбертовых пространствах / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1990. – № 8. – С. 3 – 6.
33. *Бойчук А. А.* Периодические решения нелинейных автономных систем в критических случаях / А.А. Бойчук, В. Ф Журавлев, С. М. Чуйко // Укр. мат журн. 1990. – Т. 42, № 9. – С. 1180 – 1187.
34. *Бойчук А. А.* Обобщенный обратный оператор к нетерову в банаховом пространстве / А. А. Бойчук, В. Ф Журавлев // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1991. – № 1. – С. 5 – 8.
35. *Бойчук А. А.* Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в банаховых пространствах / А. А. Бойчук, В. Ф Журавлев // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 10. – С. 1343 – 1350.
36. *Бойчук А. А.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях / А. А. Бойчук, Н. А. Перестюк, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 9. – С. 1516 – 1521.
37. *Бойчук А. А.* Периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием в критических случаях / А. А. Бойчук, С. М. Чуйко // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1991. – № 9. – С. 9 – 13.
38. *Бойчук А. А.* Автономные слабонелинейные краевые задачи //Дифференц. уравнения / А. А. Бойчук, С. М. Чуйко. – 1992. – Т. 28, № 10. – С. 1668 – 1674.

39. *Бойчук А. А.* Построение псевдообратного оператора в гильбертовом пространстве / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев // Моделирование динамики деформируемых сред. – Киев: Наукова думка, 1993. – С. 33 – 38.
40. *Бойчук А. А.* Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 10. – С. 1677 – 1682.
41. *Бойчук А. А.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко. – Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. – 320 с.
42. *Бойчук А. А.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями / А. А. Бойчук, С. М. Чуйко // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 10, № 1. – С. 51 – 65.
43. *Бойчук А. А.* Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. А. Покутний // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 65, №2. – С. 163 - 174.
44. *Бойчук А. А.* Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / А. А. Бойчук, А. А. Покутний // Нелінійні коливання. – 2006. – Т. 9, № 1. – С. 3 – 14.
45. *Бойчук А. А.* Обмежені розв'язки слабконелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі / О. А. Бойчук, О. О. Покутний // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 151 – 159.
46. *Бойчук О. А.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі / О. А. Бойчук, Є. В. Панасенко // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 16 – 19.

47. *Бойчук О. А.* Слабкозбурені крайові задачі для диференціальних рівнянь в банаховому просторі / О. А. Бойчук, Є. В. Панасенко // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 291 – 304.
48. *Бойчук О. А.* Слабконелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь у критичному випадку в банаховому просторі / О. А. Бойчук, Є. В. Панасенко // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, № 4. – С. 483 – 496.
49. *Бойчук А. О.* Множина обмежених на всій осі розв'язків слабо збурених систем / О. А. Бойчук // Нелінійні коливання. – 2003. – Т. 6, № 3. – С. 309 – 318.
50. *Бойчук А. О.* Обмежені на R розв'язки слабо нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь / О. А. Бойчук // Нелінійні коливання. – 2003. – Т. 6, № 4. – С. 439 – 447.
51. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев – Новосибирск: Наука, СО, 1980. – 222 с.
52. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев – Новосибирск: Наука, СО, 1988. – 154 с.
53. *Вайнберг М. М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
54. *Валеев К. Г.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений / К. Г. Валеев, О. А. Жаутыков. – Алма-Ата: Наука, 1974. – 412 с.
55. *Ван-дер-Поль Б.* Нелинейная теория электрических колебаний / Б. Ван-дер-Поль – М.: Связь, 1935.
56. *Верлань А. Ф.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, И. С. Сизиков. – Киев: Наук. думка, 1986. – 542 с.

57. *Вишик М. И.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // УМН. – 1960. – Т. 15, Вып. 3. – С. 3 – 80.
58. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров – М.: Наука, 1971. – 512 с.
59. *Воеводин В. В.* Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
60. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра – М.: Наука, 1976. – 286 с.
61. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ / Б. З. Вулих – М.: Наука, 1967. – 415 с.
62. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер – М.: Наука, 1988. – 552 с.
63. *Городній М. Ф.* Про оборотність оператора $\frac{d}{dt} + A$ у просторі $L_2(\mathbb{R}, H)$ / М. Ф. Городній, А. В. Чайковський // Нелінійні коливання. – 2006. – Т. 9, № 1. – 31 – 37.
64. *Гохберг И. Ц.* Некоторые свойства нормально разрешимых операторов / И. Ц. Гохберг // Доклады АН СССР. – 1955. – Т. 104, №1. – С. 14 – 18.
65. *Гохберг И. Ц.* О границах применимости теорем Ф. Нетера / И. Ц. Гохберг – Кишинев: Уч. записки ун-та, 1955. – Вып. 17. – С. 35 – 44.
66. *Гохберг И. Ц.* Основные положения о дефектных числах и индексах линейных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн // УМН. – 1957. – Т. 12, Вып. 2. – С. 43 – 118.
67. *Гохберг И. Ц.* Введение в теорию линейных несамопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

68. *Гохберг И. Ц.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов / И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
69. *Гребенников Е. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
70. *Гребенников Е. А.* Введение в резонансную аналитическую механику / Е. А. Гребенников, Ю. А. Митропольский, Ю. А. Рябов. – М.: Янус-М, 1999. – 302 с.
71. *Гринблум М. М.* Биортогональные системы в пространстве Банаха / М. М. Гринблум // Доклады АН СССР. – 1945. – Т. 47, № 2. – С. 79 – 82.
72. *Гринблум М. М.* К теории биортогональных систем / М. М. Гринблум // Доклады АН СССР. – 1947. – Т. 55, № 4. – С. 291 – 295.
73. *Далецкий Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
74. *Данфорд Н.* Линейные операторы: Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
75. *Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений* / В. В. Гудков, Ю. А. Клоков, А. Я. Лепин и др. – Рига: Зинатне, 1973. – 135 с.
76. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович – М.: Наука, 1967. – 472 с.
77. *Журавлев В. Ф.* Нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с запаздывающим аргументом: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. Ф. Журавлев – Киев, 1991. – 19 с.

78. Журавлев В. Ф. О разрешимости и построении решений краевых задач для нетеровых операторных уравнений в гильбертовых пространствах / В. Ф. Журавлев // Моделирование и исследование устойчивости физических процессов: Тез. докл. III научно-технического семинара 24 – 27 мая 1992 г. – Киев, 1992. – С. 59 – 60.
79. Журавлев В. Ф. Краевые задачи для слабонелинейных операторных уравнений с нетеровой линейной частью в гильбертовых пространствах / В. Ф. Журавлев // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики — вторые боголюбовские чтения: Тез. докл. конференции 14 – 18 сентября 1992 г. – Киев, 1992. – С. 60.
80. Журавлев В. Ф. Анализ слабонелинейных краевых задач с нетеровой линейной частью / В. Ф. Журавлев // Моделирование и исследование устойчивости физических процессов: Тез. докл. IV научно-технического семинара 24 – 28 мая 1993 г. – Киев, 1993. – Ч. 1. – С. 50 – 51.
81. Журавлев В. Ф. Линейные краевые задачи для нормально разрешимых операторных уравнений / В. Ф. Журавлев // 20-th Summer School "Appcations of Mathematics in Engineering", 26.08 – 02.09 1994, Varna, Bulgaria: Sofia, 1995. – P. 232 – 247.
82. Журавлев В. Ф. Обобщенное обращение нормально разрешимых операторов в сепарабельных гильбертовых пространствах / В. Ф. Журавлев // Моделирование и исследование устойчивости систем (моделирование систем): Тез. докл. конференции 15 – 19 мая 1995 г. – Киев, 1995. – С. 44.
83. Журавлев В. Ф. Решение интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром в критических случаях / В. Ф. Журавлев,

- Л. Г. Плесканева // Моделирование и исследование устойчивости систем (моделирование систем): Тез. докл. конференции 15 – 19 мая 1995 г. – Киев, 1995. – С. 45.
84. Журавлев В. Ф. Линейные краевые задачи для нетеровых операторных уравнений с импульсным воздействием / В. Ф. Журавлев // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 8. – С. 1035 – 1042.
 85. Журавлев В. Ф. Обобщение теоремы Ф.Р. Аткинсона на случай нормально разрешимых операторов в гильбертовых пространствах и ее применение / В. Ф. Журавлев // Моделирование и исследование устойчивости систем: Тез. докл. конференции 20 – 24 мая 1996 г. – Киев, 1996. – С. 52.
 86. Журавлев В. Ф. Обобщение теоремы Ф.Р. Аткинсона на случай нормально разрешимых операторов в банаховых пространствах и ее применение / В. Ф. Журавлев // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування: Тез. доп. конф. 15 – 18 травня 1996 г. – Київ, 1996. – С. 67.
 87. Журавлев В. Ф. Решение нормально разрешимых операторных уравнений в банаховых пространствах с базисом / В. Ф. Журавлев // Доклады академии наук. Российская академия наук. – 1997. – Т. 352, № 3. – С. 304 – 306.
 88. Журавлев В. Ф. Обобщение теоремы С. М. Никольского на случай нормально разрешимых операторов в сепарабельных гильбертовых пространствах / В. Ф. Журавлев // Доклады академии наук. Российская академия наук. – 1997. – Т. 355, № 3. – С. 303 – 305.
 89. Журавлев В. Ф. Обобщение теоремы Ф. В. Аткинсона на случай нормально разрешимых операторов в банаховых пространствах / В. Ф. Журавлев // Доклады академии наук. Российская академия наук. – 1998, Т. 358, № 2. – С. 157 – 159.

90. Журавлев В. Ф. Линейные краевые задачи для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / В. Ф. Журавлев // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 70-ти річчя академіка А. М. Самойленка: Тез. доп. конф. 18 – 21 червня 2008 р. – Мелітополь, 2008. – С. 50.
91. Журавлев В. Ф. Обобщение леммы Шмидта на случай n - (d)-нормальных операторов в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, №4. – С. 443 – 450.
92. Журавлев В. Ф. Построение обобщенно обратного оператора к нормально разрешимому в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // International Conference "Dynamical system modeling and stability investigation": Thesis of conference reports May 27 – 29, 2009. – Kyiv, 2009. – P. 63.
93. Журавльов В. П. Узагальнення леми Шмідта на випадок n - (d)-нормальних операторів у банаховому просторі / В. П. Журавльов // Міжнародна конференція до 100-річчя М. М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди: Тез. доп. конф. 8 – 13 червня 2009 р. – Чернівці, 2009. – С. 48 – 49.
94. Журавлев В. Ф. Условия разрешимости и представление решений нормально разрешимых операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Український математичний конгрес. – 2009 (до 100-річчя М. М. Боголюбова): Тез. докл. конгресу 27 – 29 серпня 2009 р. – Київ, 2009. – <http://imath.kiev.ua/congress2009/partUMC2009.html>.
95. Журавлев В. Ф. Критерий разрешимости и представление решений линейных n - (d)-нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Укр. мат. журнал. – 2010. – Т. 62, №2. – С. 167 – 182.

96. Журавлев В. Ф. Краевые задачи для линейных уравнений с обобщенно обратимым оператором в банаховом пространстве с базисом / В. Ф. Журавлев // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, №4. – С. 522 – 532.
97. Журавльов В. П. Лінійні крайові задачі для нетерових операторних рівнянь у банаховому просторі./ В. П. Журавльов // Науковий вісник Чернівецького університету. Сер. математика. – 2010. – Вип. 528. – С. 51 – 57.
98. Журавлев В. Ф. Построение обобщенно обратного оператора к матричному в банаховом пространстве. / В. Ф. Журавлев // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математика і інформатика. – 2010. – Вип. 21. – С. 61 – 71.
99. Журавлев В. Ф. Линейные краевые задачи для операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // XIII Міжнародна конференція ім. академіка М. Кравчука: Тез. доп. конф. 13 – 15 травня 2010 р. – Київ, 2010. – С. 158.
100. Журавлев В. Ф. Краевые задачи для операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Десята Кримська міжнародна математична школа "Метод функций Ляпунова и его приложения", Крим, Алушта: Тез. доп. конф. 13 – 18 вересня 2010 р. – Симферополь, 2010. – С. 50.
101. Журавльов В. П. Загальний вигляд n -нормальних та d -нормальних операторів у банаховому просторі / В. П. Журавльов // Науковий вісник Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича. Сер. математика. – 2011. – Т. 1, № 4. – С. 52 – 58.
102. Журавлев В. Ф. Псевдообратный оператор к матричному в бесконечномерном гильбертовом пространстве / В. Ф. Журавлев // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математика і інформатика. – 2011. – Вип. 22, № 1. – С. 52 – 63.

103. *Журавлев В. Ф.* Слабонелинейные краевые задачи для операторных уравнений в критическом случае / В. Ф. Журавлев // Динамические системы, Симферополь: Таврический нац. ун-т им. В. И. Вернадского. – 2011. – Т. 1(29), № 2. – С. 227 – 241.
104. *Журавльов В. П.* Слабконелінійні крайові задачі для операторних рівнянь з нетеровою лінійною частиною / В. П. Журавльов // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математика і інформатика. – 2011. – Вин. 22, № 2. – С. 79 – 92.
105. *Журавлев В. Ф.* Краевые задачи для нетеровых операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Международная научно-техническая конференция SAIT 2011 "Системный анализ и информационные технологии", Киев: Тез. докл. конф. 23 – 28 мая 2011 г. – Киев, 2011. – С. 89.
106. *Журавлев В. Ф.* Нормально разрешимые краевые задачи для операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященную выдающемуся математику И. Г. Петровскому: Тез. докл. конференции 29 мая – 4 июня 2011 г. – Москва, 2011. – С. 191 – 192.
107. *Журавлев В. Ф.* Слабонелинейные краевые задачи для операторных уравнений в банаховом пространстве / В. Ф. Журавлев // Международная конференция "Моделирование и исследование устойчивости динамических систем": Тез. докл. конференции 25 – 27 мая 2011 г. – Киев, 2011. – С. 78.
108. *Журавльов В. П.* Умови існування та представлення розв'язків лінійної крайової задачі для нетерового операторного рівняння / В. П. Журавльов // IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача

- КМУ СПММ–2011: Тез. доп. конф. 24 – 27 травня 2011 р. – Львів, 2011. – С. 93.
109. *Журавльов В. П.* Узагальнений оператор Гріна лінійної крайової задачі для імпульсного нетерового операторного рівняння / В. П. Журавльов // Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвячена 65-річчю кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету ім. Тараса Шевченка: Тез. доп. конф. 8 – 10 червня 2011 р. – Київ, 2011. – С. 80.
 110. *Журавлев В. Ф.* Краевые задачи для интегральных уравнений с вырожденным ядром / В. Ф. Журавлев // Нелінійні коливання. – 2012. – Т. 15, №1. – С. 36 – 52.
 111. *Журавлев В. Ф.* Критерий разрешимости и построение решений нормально разрешимых операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Журавлев // Нелинейные колебания. – 2012. – Т. 15, №2. – С. 165 – 177.
 112. *Журавльов В. П.* Узагальнений оператор Гріна лінійної крайової задачі для нетерового операторного рівняння / В. П. Журавльов // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: Тез. доп. конф. 19 – 21 квітня 2012 р. – Т. 1. – Київ, 2012. – С. 180 – 181.
 113. *Журавльов В. П.* Слабконелінійні крайові задачі для операторних рівнянь з нетеровою лінійною частиною / В. П. Журавльов // Всеукраїнська наукова конференція, присвячена 50-річчю кафедри прикладної математики: Тез. докл. конф. 11 – 13 червня 2012 р. – Чернівці, 2012. – С. 34.
 114. *Журавлев В. Ф.* Решение интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых пространствах / В. Ф. Журавлев

- // Abstract XVI International Conference "Dynamical system modelling and stability investigation", May 29 – 31 2013: Kiev, 2013. – P. 90.
115. *Журавльов В. П.* Псевдообернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі / В. П. Журавльов // Міжнародна наукова конференція "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження А. М. Самойленка: Тез. доп. конф. 23 – 30 червня 2013 р. – Севастополь, 2013. – С. 97 – 98.
 116. *Журавльов В. П.* Побудова розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у гільбертових просторах / В. П. Журавльов // Міжнародна математична конференція "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка: Матеріали конф. 12 – 14 червня, 2013. – Слов'янськ. – С. 13 – 14.
 117. *Завалишин С. Т.* Динамические системы с импульсной структурой / С. Т. Завалишин, А. Н. Сесекин, С. Е. Дрозденко. – Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1983. – 112 с.
 118. *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида – М.: Мир, 1967. – 624 с.
 119. *Кадец М. И.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах / М. И. Кадец, Б. С. Митягин // УМН. – 1973. – Т. 28, Вып. 6. – С. 77 – 94.
 120. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. 3-е изд. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
 121. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах / Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 548 с.

122. *Карлович Ю. И.* Теория Нетера сингулярных интегральных операторов со сдвигом / Ю. И. Карлович, В. Г. Кравченко, Г. С. Литвинчук // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 3 – 27.
123. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като – М.: Мир, 1972. – 740 с.
124. *Каудерер Г.* Нелинейная механика / Г. Каудерер – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.
125. *Качуровский Р. И.* К теории Фредгольма для нелинейных операторных уравнений / Р. И. Качуровский // Доклады АН СССР. – 1970. – Т. 192, № 5. – С. 968 – 972.
126. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.
127. *Кигурадзе И. Т.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
128. *Кодлюк Т.И.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач / Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, № 1. – С. 70 – 81.
129. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
130. *Королук В. С.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем / В. С. Королук, А. Ф. Турбин. – Киев: Наук. думка, 1978. – 218 с.
131. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн – М.: Наука, 1967. – 464 с.
132. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн – М.: Наука, 1971. – 104 с.

133. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ / С. Г. Крейн – М.: Наука, 1972. – 544 с.
134. *Крылов А. Н.* Вибрация судов / Крылов А. Н. // Собр. трудов академика А. Н. Крылова. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – Т. X. – 402 с.
135. *Крылов Н. Н.* Введение в нелинейную механику / Н. Н. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
136. *Кублановская В. И.* О вычислении обобщенной обратной матрицы и проекторов / В. И. Кублановская // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1966. – Т. 6, № 2. – С. 326 – 332.
137. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа / С. С. Кутателадзе – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001. – 354 с.
138. *Куфнер А.* Нелинейные дифференциальные уравнения / А. Куфнер, С. Фучик. – М. : Наука, 1988. – 304 с.
139. *Ландо Ю. К.* О разрешимости интегро-дифференциального уравнения / Ю. К. Ландо // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 4. – С. 695 – 697.
140. *Ландо Ю. К.* Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов / Ю. К. Ландо // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4, № 6. – С. 1112 – 1126.
141. *Лика Д. К.* Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний / Д. К. Лика, Ю. А. Рябов. – Кишинев: Штиинца, 1974. – 291 с.
142. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс – М.: Мир, 1972. – 588 с.
143. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы / А. Ю. Лучка – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.

144. *Лыкова О.Б.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях / О. Б. Лыкова, А. А. Бойчук // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40, № 1. – С. 62 – 69.
145. *Люстерник Л. А.* Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.
146. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов – М.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
147. *Максимов В. П.* Нетеровость общей краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения / В. П. Максимов // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 12. – С. 2288 – 2291.
148. *Малкин И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин – Л., М.: Гостехиздат, 1949. – 244 с.
149. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
150. *Мари Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях / Дж. Мари – М.: Мир, 1983. – 397 с.
151. *Марчук Г. И.* Математические модели в иммунологии / Г. И. Марчук – М.: Наука, 1980. – 264 с.
152. *Массера Х. Л.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х. Л. Массера, Х.Х. Шеффер. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
153. *Митропольский Ю. А.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием / Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк. – Киев: Вища шк., 1979. – 248 с.
154. *Митропольский Ю. А.* Математические проблемы нелинейной механики / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко. – Киев: Вища школа, 1987. – 72 с.

155. *Михайлец В. А.* Обобщение теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач / Михайлец В. А., Рева Н. В. // Доп. НАН України. – 2008. – № 9 – С. 23 – 27.
156. *Морен К.* Методы гильбертова пространства / К. Морен – М.: Мир, 1965. – 570 с.
157. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А. Д. Мышкис – М.: Гостехиздат, 1951. – 256 с.
158. *Мышкис А. Д.* Системы с толчками в заданные моменты времени / А. Д. Мышкис, А. М. Самойленко // Мат. сб. – 1967. – Т. 74, Вып. 2. – С. 202 – 208.
159. *Найфе А.* Введение в методы возмущений / А. Найфе – М.: Мир, 1984. – 535 с.
160. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в метрическом пространстве / С. М. Никольский // Доклады АН СССР. Новая серия. – 1936. – Т. 2, № 8. – С. 309 – 312.
161. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. – 1943. – Т. 7, № 3. – С. 147 – 163.
162. *Пелчинский А. П.* О некоторых проблемах Банаха / А. П. Пелчинский // УМН – 1973. – Т. 28, Вып. 6. – С. 67 – 75.
163. *Пелюх Г. П.* Введение в теорию функциональных уравнений / Г. П. Пелюх, А. Н. Шарковский. – Киев: Наук. думка, 1974. – 119 с.
164. *Перестюк Н. А.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2004. – 428 с.
165. *Покутний О.О.* Розв'язки еволюційних рівнянь Соболева-Гальперіна з чистим запізненням / О.О. Покутний, В.В. Семенов //

- Третя Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика" присвячена пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка: Тез. доп. конф. 11-12 вересня 2009 р. – м.Київ, 2009. – С. 57.
166. *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха / М. М. Попов // Математика сьогодні'07. – 2007. – Вип. 13. – С. 78 – 116.
 167. *Пуанкаре А.* Избранные труды / А. Пуанкаре. – М.: Наука, 1971. – Т. I. – 771 с.
 168. *Пуанкаре А.* Избранные труды / А. Пуанкаре. – М.: Наука, 1972. – Т. II. – 801 с.
 169. *Пытьев Ю. П.* Псевдообратный оператор. Свойства и применения / Ю. П. Пытьев // Мат. сборник. Нов. сер. – 1982. – Т. 118, № 1. – С. 19 – 49.
 170. *Рид М.* Методы современной математической физики: в 4 т. / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1977 – . – Т. 1: Функциональный анализ. – 1977. – 357 с.
 171. *Рисс Ф.* О линейных функциональных уравнениях / Ф. Рисс // УМН. – 1936. – В. 1. – С. 175 – 199.
 172. *Рисс Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: Мир, 1979. – 587 с.
 173. *Ронто Н. Й.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. I / Н. Й. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук // Укр. мат. журнал. – 1998. – Т. 50, № 1. – С. 102 – 107.
 174. *Ронто Н. Й.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. II / Н. Й. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук // Укр. мат. журнал. – 1998. – Т. 50, № 2. – С. 225 – 243.

175. *Ронто Н. Й.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III / Н. Й. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук // Укр. мат. журнал. – 1998. – Т. 50, № 7. – С. 960 – 979.
176. *Ронто Н. Й.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. IV / Н. Й. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук // Укр. мат. журнал. – 1998. – Т. 50, № 12. – С. 1656 – 1672.
177. *Ронто Н. Й.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. V / Н. Й. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук // Укр. мат. журнал. – 1999. – Т. 51, № 1. – С. 102 – 107.
178. *Ронто Н. Й.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. VI / Н. Й. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук // Укр. мат. журнал. – 1999. – Т. 51, № 5. – С. 663 – 673.
179. *Ронто Н. Й.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. VII / Н. Й. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук // Укр. мат. журнал. – 1999. – Т. 51, № 7. – С. 960 – 971.
180. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием / В. П. Рубаник. – М.: Наука, 1969. – 287 с.
181. *Садовничий В. А.* Теория операторов / В. А. Садовничий. – 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1986. – 368 с.
182. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I / А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1965. – Т. 17, № 4. – С. 82 – 93.

183. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II / А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1965. – Т. 18, № 2. – С. 50 – 59.
184. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. – Киев: Наук. думка, 1986. – 224 с.
185. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
186. *Самойленко А. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, А. А. Бойчук // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, № 4. – С. 564 – 568.
187. *Самойленко А. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, А. А. Бойчук, С. А. Кривошея // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 11. – С. 1576 – 1579.
188. *Самойленко А. М.* Ограниченные на всей оси решения линейных слабозмущенных систем / А. М. Самойленко, А. А. Бойчук, Ан. А. Бойчук // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 4. – С. 1517 – 1530.
189. *Самойленко А. М.* Слабонелинейные краевые задачи для операторных уравнений с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 2. – С. 272 – 289.
190. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.

191. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – Київ: Либідь, 2003. – 600 с.
192. *Самойленко А. М.* Об инвариантных множествах дифференциальных уравнений с малыми случайными возмущениями / А. М. Самойленко, А. Н. Станжицкий // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 1. – С. 54 – 58.
193. *Самойленко А. М.* Счетные системы дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, Ю. В. Теплинский. – Киев: ИМ НАН Украины, 1993. – 308 с.
194. *Самойленко А. М.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах / А. М. Самойленко, Ю. В. Теплінський. – Киев: ІМ НАН України, 2008. – 496 с.
195. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем / В. Е. Слюсарчук // Укр. мат. журн. – 1983. – Т. 35, № 1. – С. 109 – 114.
196. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних операторів / В. Ю. Слюсарчук – Рівне: Міністерство освіти і науки України, 2002. – 240 с.
197. *Слюсарчук В. Е.* Плотность множества неразрешимых задач Коши во множестве всех задач Коши в случае бесконечномерного банахова пространства / В. Е. Слюсарчук // Нелінійні коливання. – 2002. – Т. 5, № 1. – С. 86 – 89.
198. *Слюсарчук В. Ю.* Задачі Коші з неєдиними розв'язками / В. Ю. Слюсарчук // Науковий вісник Чернівецького університету. Сер. математика. – 2011. – Т. 1, № 4. – С. 117 – 118.
199. *Станжицький О. М.* Дослідження експоненціальної дихотомії стохастичних систем Іто за допомогою квадратичних форм / О. М. Станжицький // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 11. – С. 1545–1555.

200. *Ткаченко В. І.* Про лінійні системи з квазіперіодичними коефіцієнтами та обмеженими розв'язками / В. І. Ткаченко // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 1. – С. 109 – 115.
201. *Треногин В. А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин – М.: Наука, 1980. – 495 с.
202. *Турбин А. Ф.* Формулы для вычисления полуобратной и псевдообратной матрицы / А. Ф. Турбин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1974. – Т. 14, № 3. – С. 772 – 776.
203. *Фещенко С. Ф.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко. – Киев: Наук. думка, 1966. – 251 с.
204. *Халанай А.* Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
205. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах / П. Халмош – М.: Мир, 1970. – 353 с.
206. *Хейл Дж. К.* Колебания в нелинейных системах / Дж. К. Хейл. – М.: Мир, 1966. – 230 с.
207. *Хейл Дж. К.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. К. Хейл. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
208. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу / А. Я. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с.
209. *Хусаинов Д. Я.* Об относительной управляемости в системах с чистым запаздыванием / Д. Я. Хусаинов, Г. В. Шуклин // Прикладная механика. – 2005. – Т. 431, Вып. 2. – С. 118 – 130.
210. *Цуркис И. Я.* Об одном обобщении теорем Фредгольма / И. Я. Цуркис // Функциональный анализ и его приложения. – 1995. – Т. 2, №29. – С. 91 – 94.
211. *Черноусько Ф. Л.* Управление колебаниями / Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

212. *Чуйко С. М.* Лекції з теорії імпульсних крайових задач / С. М. Чуйко. – Слов'янськ.: Видавництво Б.І. Маторіна, 2010. – 208 с.
213. *Чистяков В.Ф.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова – Новосибирск: Наука, 2003. – 317 с.
214. *Шиманов С. Н.* К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием / С. Н. Шиманов // Прикладн. матем. и мех. – 1959. – Т. 23, В. 5. – С. 836 – 844.
215. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдвардс. – М.: Мир, 1969. – 1072 с.
216. *Эльсгольц Л. Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
217. *Якубович В. А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. – М.: Наука, 1972. – 718 с.
218. *Banach S.* Zur Theorie der linearen Dimension / S. Banach, S. Mazur // Studia Math. – 1933. – № 4. – P. 100 – 112.
219. *Ben Israel.* Generalized Inverses. Theory and Applications / Ben Israel, T. N. E. Greville. – New York: Wiley Interscience, 1974. – 395 p.
220. *Birkhoff G. D.* Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations / G. D. Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – № 9. – P. 373 – 395.
221. *Bogoliubov N. N.* Methods of accelerated convergence in nonlinear mechanics / N. N. Bogoliubov, Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko. – Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. – VIII+291 p.
222. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line / A. A. Boichuk // Nonlinear Oscillations. – 1999. – V. 2. – P. 3 – 10.

223. *Boichuk A. A.* Solutions of linear and nonlinear difference equations, founded on the whole line / A. A. Boichuk // Nonlinear Oscillations. – 2001. – V. 4. – P. 16 – 27.
224. *Boichuk A. A.* Bounded solutions of perturbed differential equations in Banach space / A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi // Tatra Mountains Mathematical Publications. – 2007. – V. 38. – P. 29 – 40.
225. *Boichuk A. A.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV+317 p.
226. *Boichuk A.* Fredholm's boundary-value problems for differential systems with a single delay / A. Boichuk, J. Diblík, D. Khusainov, M. Ružičová // Nonlinear analysis – 2010. – V. 72. – P. 2251 – 2258.
227. *Boichuk A.A.* Bifurcation of Solutions of Singular Fredholm Boundary Value Problems / A. A. Boichuk, L. M. Shegda // Diff. Eq. – 2011. – V. 47, № 4. – P. 453 – 461.
228. *Boichuk A. A.* Dichotomy on semiaxes and bounded solutions of systems with delay / A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlyov // Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications": Abstracts 04–09 September, 2012. – Mersin, Turkey. – P. 32.
229. *Bradley I. S.* Generalized Green's Matrices for Compatible Differential Systems / I. S. Bradley // Mich. Math. Journ. – 1966. – V. 13, № 1. – P. 97 – 108.
230. *Campbell S.L.* Generalized inverses of linear transformations. /S. L. Campbell, C. D. Meyer // SIAM, Philadelphia. – 2009. – 272 p.
231. *Conti R.* Recent Trends in the Theory of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations / R. Conti // Boll. Unione Math. Ital. – 1967. – V. 22, № 2. – P. 135 – 178.

232. *Doutch E.* Semi-inverses, Reflexive Semi-inverses, and Pseudoinverses of an Arbitrary Linear Transformation / E. Doutch // Linear Algebra and Its Appl. – 1971. – V. 4, № 2. – P. 313 – 322.
233. *Elaidi S.* Exponential trichotomy of differential systems / S. Elaidi, O. Hajek // Journ. Math. Anal and Appl. – 1988. – V. 123, № 2. – P. 362 – 374.
234. *Fichtenholz G.* Sur les operations dans l'espace des fonctions bornées / G. Fichtenholz, L. Kantorovich // Studia Math. – 1934. – № 5. – P. 69 – 98.
235. *Fredholm I.* Sur une Classe d'equations fonctionnelles / I. Fredholm // Acta Math. – 1903. – V. 27. – P. 265 – 390.
236. *Furi M.* Periodic solutions of some nonlinear differential equations of higher order / M. Furi, J. Mawhin // Čas. přest. mat. – 1975. – V. 100. – P. 276 – 283.
237. *Generalized Inverses and Applications.* Ed. by Nashed M. Z. – New York – San Francisco – London. – Acad. Press, 1976. – 1054 p.
238. *Latushkin Yu.* Fredholm differential operators with unbounded coefficients / Yu. Latushkin., Yu. Tomilov // Journ. of Diff. Eq. – 2005. – V. 208. – P. 388– 429.
239. *Lindenstrauss J.* Contribution to the theory of the classical Banach spaces / J. Lindenstrauss, A. Pelczyński // Journ. Funct. Anal. – 1973. – № 4. – P. 134 – 148.
240. *Lindenstrauss J.* On the complemented subspaces problem / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri // Isr. Journ. Math. – 1971. – № 9. – P. 263 – 269.
241. *Loud W. S.* Generalized Inverses and Generalized Green's Functions / W. S. Loud // SIAM Journ. Appl. Math. – 1966. – V. 14, № 2. – P. 269 – 342.
242. *Mallet-Paret J.* The Fredholm alternative for functional-differential equations of mixed type / J. Mallet-Paret // Journ. Dyn. Diff. Eq. – 1999. – V. 11, № 1. – P. 1 – 47.

243. *Maniar L.* The Fredholm alternative for parabolic evolution equations with inhomogeneous boundary conditions. / L. Maniar, R. Schnaubelt // Journ. of Diff. Eq. – 2007. – V. 235. – P. 308 – 339.
244. *Martin R.H.* Separation of solutions to differential equations. / R. H. Martin // Journ. of Diff. Eq. – 1973. – V.14. – P. 213 – 234.
245. *Mawhin J.* Topological degree methods in nonlinear boundary value problems / J. Mawhin // Regional conference series in mathematics, № 40. – Providence, 1979. – 122 p.
246. *Moore E. H.* On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract) / E. H. Moore // Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – № 26. – P. 394 – 395.
247. *Nashed M. Z.* A unified Approach to Generalized inverses of linear operators: I. algebraic, topological and projectional properties / M. Z. Nashed, G. F. Votruba // Bull. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 80. – № 5. – P. 825 – 830.
248. *Nashed M. Z.* A unified Approach to Generalized inverses of linear operators: II. extremal and proximal properties / M. Z. Nashed, G. F. Votruba // Bull. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 80, № 5. – P. 831 – 835.
249. *Noether F.* Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen / F. Noether // Math. Ann. – 1921. – № 82. – P. 42 – 64.
250. *Palmer K. J.*, Exponential Dichotomies and transversal Homoclinic Points / K. J. Palmer // Journ. of Diff. Eq. – 1984. – V. 55. – P. 225 – 256.
251. *Pelczyński A.* Projections in certain Banach spaces / A. Pelczyński // Studia Math. – 1960. – № 19. – P. 209 – 228.
252. *Penrose R.* A Generalized Inverse for Matrices / R. Penrose // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1955. – V. 51, № 3. – P. 406 – 413.
253. *Petryshyn W. V.* Variational solvability of quasilinear elliptic boundary value problems at resonance / W. V. Petryshyn // Nonlinear Analysis,

- Theory, Methods and Applications. – 1981. – V. 5, № 10. – P. 1095 – 1108.
254. *Petryshyn W. V.* On the iteration, projection and projection-iteration methods in the solution of nonlinear functional equations / W. V. Petryshyn // Journ. Math. Anal. Appl. – 1968. – V. 21, № 3. – P. 575 – 607.
 255. *Popescu L. H.* A topological classification of linear differential equations on Banach spaces / L. H. Popescu // Journ. of Diff. Eq. – 2004. – v. 203. – P. 28 – 37.
 256. *Ramm A. G.* A simple proof of the Fredholm alternative and a characterization of the Fredholm operators / A. G. Ramm // Amer. Math. Monthly – 2001. – V. 108, № 9. – P. 855 – 860.
 257. *Rao C. R.* Generalized inverse of matrices and its applications / C. R. Rao, S. K. Mitra. – New York: Wiley, 1971. – 213 p.
 258. *Reid W. T.* Generalized Green's Matrices for Compatible Systems for Two-Point Boundary Problems / W. T. Reid // SIAM J. Appl. Math. – 1967. – V. 15, № 4. – P. 856 – 870.
 259. *Read W. T.* Riccati Differential Equations / W. T. Read – New York; London, 1972. – 124 p.
 260. *Rodrigues H.M.* Evolution Equations: Dichotomies and the Fredholm Alternative for Bounded Solutions. / H.M.Rodrigues, J.G.Ruas-Filho. // Journ. of Diff. Eq. – 1995. – V.119. – P.263 – 283.
 261. *Ronto M.* Numerical-Analitic Methods for the Theory differential and differece equations in partially ordered Banach space, and some applications / M. Ronto, A. Ronto, S. I. Trofimchuk. – Miskolc, 1996. – 60 p. (Preprint/Univ. Miskolc. Ins. Math., 96-02).
 262. *Ronto M.* Numerical-Analitic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems / M. Ronto, A. Samoilenko. – Singapore: World Scientific Publishing Co., 2000. – X+455 p.

263. *Saker R. J.* The splitting index for linear differential systems / R. J. Saker // Journ. of Diff. Eq. – 1979. – V. 33. – P. 368 – 405.
264. *Saker R. J.* Dichotomies for Linear Evolutionary Equations in Banach Spaces. / R.J.Saker, G.R.Sell. // Journ. of Diff. Eq. – 1994. – V.113. – P. 17 – 67.
265. *Samoilenko A. M.* Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. (Mathematics and Applications, V. 71) / A. M. Samoilenko – Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. – XVI+313 p.
266. *Samoilenko A. M.* Generalized solutions of impulse systems and the phenomenon of pulsations / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, S. I. Trofimchuk // Ukr. Math. Zh. – 1991. – V. 43, № 5. – P. 610 – 615.
267. *Samoilenko, A. M.* Linear systems of differential equations with Singularities. / A. M. Samoilenko, M. I. Shkil', V. P. Yakovec' – Kyiv: Vyscha Shkola, 2000. – 294 p.
268. *Samoilenko A. M.* Pseudo-Inverse Matrices and solutions Bounded on R of Linear and Nonlinear Systems / A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, An. A. Boichuk // Processings of the Fifth International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing – "CASC – 2002". (September 22 – 27, 2002, Yalta, Ukraine) – Institut für Informatik, Technische Universität München, Germany. – 2002. – P. 269 – 278.
269. *Samoilenko A. M.* Boundary-value problem for linear system of integro-differential equations with degenerate kernel / A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya // Ukr. Mat. Zh. – 1996. – V. 48, № 11. – P. 1576 – 1579.
270. *Samoilenko A. M.* Impulsive Differential Equations. (World Scientific Series on Nonlinear Science, Ser A, V. 14) / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. – Singapore: World Scientific Publishing Co., 1995. – X+462 p.

271. *Samoilenko A. M.* Countable Systems of Differential Equations / A. M. Samoilenko, Yu. V. Teplinskii. – VSP, Brill Academic Publishers, Utrecht – Boston – Netherlands, 2003. – VIII+287 p.
272. *Shinnosuke O.* Semigroups of linear operators in a Banach space. / Oharu Shinnosuke // Publ. RIMS, Kyoto Univ. – 1971/72. – V.7. – P. 205 – 260.
273. *Schmidt E.* Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Teil 3, Über die Auflösungen der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen / E. Schmidt // Math. Ann. – 1908. – № 65. – P. 119 – 133.
274. *Schwabik Š.* Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints / Š. Schwabik, M. Tvrdý, O. Veivoda. – Praha, Academia. – 1979. – 245 p.
275. *Schauder J.* Über lineare vollstetige Functional operationen / J. Schauder // Studia Mathem. – 1930. – № 2. – P. 183 – 196.
276. *Sobczyk A.* Projections in Minkowski and Banach spaces / A. Sobczyk // Duke Math. Journ. – 1941. – № 8. – P. 78 – 106.
277. *Tvrdý M.* General boundary value problems for an integrodifferential system and its adjoint / M. Tvrdý, O. Veivoda. // Čas. prestov. mat. – 1973. – V. 98. – P. 26 – 42.
278. *Toshiki N.* Evolution semigroups and spectral criteria for almost periodic solutions of periodic evolution equations. / N. Toshiki, Nguen van Minh. // Journ. of Diff. Eq. – 1999. – V. 152. – P. 358 – 376.
279. *Traple J.* Weak almost periodic solutions of differential equations. / J. Traple // Journ. of Diff. Eq. – 1982. – V. 45. – P. 199 – 206.
280. *Veivoda O.* On Perturbed Nonlinear Boundary Value Problems / O. Veivoda // Chec. Math. Journ. – 1961. – № 11. – P. 323 – 364.
281. *Wexler D.* On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems / D. Wexler // Ann. Vft. Mat. pura et Appl. – 1968. – V. 80. – P. 123 – 136.

282. *Zhuravlev V. F.* Nonlinear Boundary Value Problems with normally solved Linear Part in Banach Spaces / V. F. Zhuravlev // Abstract International Conference "Nonlinear Differential Equations", August 21 – 27, 1995: Kiev, 1995. – P. 184.
283. *Zhuravlyov V. F.* Normally solvable operator equations in the Banach spaces / V. F. Zhuravlyov // Conference on Differential and Difference Equations and Applications: Abstracts 25 – 29 June, 2012. – Terechova, Slovakia. – P. 59 – 60.